W.A. GRANVILLE

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

WILLIAM ANTHONY GRANVILLE
Doctor en Filosofía. Doctor en Leyes
Ex Presidente del Colegio de Gettisburg

Edición revisada por:

PERCEY F. SMITH
WILLIAM RAYMOND LONGLEY
Doctores en Filosofía y Profesores
de Matemáticas de la Universidad de Yale

LIMUSA

PROLOGO

Esta obra es, en sus líneas generales, una edición revisada y aumentada del texto debido al profesor Granville. Los únicos cambios introducidos se reducen a pequeños detalles en las demostraciones, a la revisión de los problemas —añadiendo algunos de aplicación a la Economía y otros adicionales al final de cada capítulo para alumnos más aventajados— y a la redacción de un capítulo sobre Funciones hiperbólicas, junto con algunos ejemplos de aplicación de las coordenadas cilíndricas en las integrales dobles. El capítulo añadido ha sido escrito siguiendo el método del libro, procurando que forme un todo armónico con el resto de la obra.

Las soluciones de la mayor parte de los problemas se dan en el texto. Algunas soluciones se omiten de intento para acostumbrar al estudiante a tener confianza en sí mismo.

El trabajo de los autores de esta edición se verá ampliamente compensado si tiene la misma acogida que tuvo la primera edición de la obra de Granville.

PERCEY F. SMITH
WILLIAM R. LONGLEY

INDICE

CALCULO DIFERENCIAL

CAPITULO I

Resumen de fórmulas

CAPITULO II

Variables, funciones y límites

CAPITULO III

Derivación

CAPITULO IV

Reglas para derivar funciones algebraicas

CAPITULO V

Aplicaciones de la derivada

CAPITULO VI

Derivadas sucesivas de una función. Aplicaciones

CAPITULO VII

Derivación de funciones trascendentes. Aplicaciones

CAPITULO VIII

Aplicaciones a las ecuaciones paramétricas y polares y al cálculo de las raíces de una ecuación

CAPITULO IX

Diferenciales

CAPITULO X

Curvatura. Radio de curvatura. Círculo de curvatura

CAPITULO XI

Teorema del valor medio y sus aplicaciones

CALCULO INTEGRAL

CAPITULO XII

Integración de formas elementales ordinarias

CAPITULO XIII

Constante de integración

CAPITULO XIV

Integral definida

CAPITULO XV

La integración como suma

CAPITULO XXI

Ecuaciones diferenciales ordinarias

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CAPITULO XXII

Funciones hiperbólicas

CAPITULO XXIII

Derivadas parciales

CAPITULO XXIV

Aplicaciones de las derivadas parciales

CAPITULO XXV

Integrales múltiples

CAPITULO XXVI

Curvas importantes

CAPITULO XXVII

Tabla de integrales

CAPITULO PRIMERO

RESUMEN DE FORMULAS

1. **Fórmulas de Algebra y de Geometría elementales.** Para comodidad del estudiante, en los Artículos 1 a 4 damos un resumen de fórmulas elementales. Empezaremos por las relativas al Algebra.

(1) Resolución de la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bx + C = 0.$$

1. Factorizando: Se descompone $Ax^2 + Bx + C$ en factores, se iguala cada factor a cero y se resuelven las ecuaciones que resultan, con respecto a x.

2. Completando el cuadrado: Se transpone C al segundo miembro, se divide la ecuación por el coeficiente de x^2, se añade a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y se extrae la raíz cuadrada.

3. Empleando la fórmula

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2\,A}.$$

Carácter de las raíces. La expresión $B^2 - 4\,AC$, que aparece en la fórmula debajo del signo radical, se llama *discriminante* de la ecuación. Las dos raíces son reales y desiguales, reales e iguales, o imaginarias, según que el discriminante sea positivo, cero o negativo.

(2) Logaritmos.

$$\log ab = \log a + \log b. \qquad \log a^n = n \log a. \qquad \log 1 = 0.$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \qquad \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a. \qquad \log_a a = 1.$$

(3) **Fórmula del binomio de Newton** (siendo n un número entero positivo).

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} a^{n-2}b^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{\underline{|r-1}} a^{n-r+1}b^{r-1} + \ldots .$$

(4) **Factorial de un número.**

$$n! = \underline{|n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\,n.$$

En las siguientes fórmulas de la Geometría elemental, r o R representa el radio, a la altura, B el área de la base y s el lado o altura inclinada.

(5) **Círculo.** Longitud de la circunferencia $= 2\pi r$. Area $= \pi r^2$.

(6) **Sector circular.** Area $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$, siendo $\alpha =$ ángulo central del sector, medido en radianes.

(7) **Prisma.** Volumen $= Ba$.

(8) **Pirámide.** Volumen $= \frac{1}{3} Ba$.

(9) **Cilindro circular recto.** Volumen $= \pi r^2 a$. Area lateral $= 2\pi ra$. Area total $= 2\pi r(r+a)$.

(10) **Cono circular recto.** Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 a$. Area lateral $= \pi rs$. Area total $= \pi r(r+s)$.

(11) **Esfera.** Volumen $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Area $= 4\pi r^2$.

(12) **Tronco de cono circular recto.** Volumen $= \frac{1}{3}\pi a(R^2+r^2+Rr)$. Area lateral $= \pi s(R+r)$.

2. **Fórmulas de Trigonometría plana.** Son de uso frecuente muchas de las siguientes fórmulas.

(1) **Medida de ángulos.** Hay dos métodos generalmente usados para medir ángulos; es decir, hay dos sistemas de unidades angulares.

Medida en grados. En este sistema el ángulo unidad es $\frac{1}{360}$ de una revolución completa y se llama *grado*.

Medida circular. En este sistema el ángulo unidad es el que subtiende un arco de longitud igual al radio del arco, y se llama *radián*.

La ecuación que da la relación entre los dos ángulos unidad es

$$180 \text{ } grados = \pi \text{ } radianes \quad (\pi = 3{,}14159\ldots),$$

de donde: $1 \text{ grado} = \dfrac{\pi}{180} = 0{,}0174\ldots \text{ radianes};$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} = 57{,}29\ldots \text{ grados}.$$

De dicha definición tenemos

$$\textit{Número de radianes en un ángulo} = \frac{\textit{arco correspondiente}}{\textit{radio}}.$$

Estas ecuaciones permiten pasar de una medida a la otra.

(2) Relaciones entre las funciones trigonométricas.

$$\text{ctg } x = \frac{1}{\text{tg } x}; \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}; \quad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x};$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}; \quad \text{ctg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}.$$

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1; \quad 1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x; \quad 1 + \text{ctg}^2 x = \csc^2 x.$$

(3) Fórmulas para reducir ángulos.

Angulo	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
$-x$	$-\text{sen } x$	$\cos x$	$-\text{tg } x$	$-\text{ctg } x$	$\sec x$	$-\csc x$
$90°-x$	$\cos x$	$\text{sen } x$	$\text{ctg } x$	$\text{tg } x$	$\csc x$	$\sec x$
$90°+x$	$\cos x$	$-\text{sen } x$	$-\text{ctg } x$	$-\text{tg } x$	$-\csc x$	$\sec x$
$180°-x$	$\text{sen } x$	$-\cos x$	$-\text{tg } x$	$-\text{ctg } x$	$-\sec x$	$\csc x$
$180°+x$	$-\text{sen } x$	$-\cos x$	$\text{tg } x$	$\text{ctg } x$	$-\sec x$	$-\csc x$
$270°-x$	$-\cos x$	$-\text{sen } x$	$\text{ctg } x$	$\text{tg } x$	$-\csc x$	$-\sec x$
$270°+x$	$-\cos x$	$\text{sen } x$	$-\text{ctg } x$	$-\text{tg } x$	$\csc x$	$-\sec x$
$360°-x$	$-\text{sen } x$	$\cos x$	$-\text{tg } x$	$-\text{ctg } x$	$\sec x$	$-\csc x$

(4) Funciones trigonométricas de $(x+y)$ y $(x-y)$.

$$\text{sen }(x+y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y.$$
$$\text{sen }(x-y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{ sen } y.$$
$$\cos (x+y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y.$$
$$\cos (x-y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{ sen } y.$$

$$\text{tg }(x+y) = \frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{1 - \text{tg } x \text{ tg } y}. \quad \text{tg }(x-y) = \frac{\text{tg } x - \text{tg } y}{1 + \text{tg } x \text{ tg } y}.$$

(5) Funciones trigonométricas de $2x$ y de $\frac{1}{2}x$.

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x; \quad \text{tg } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x}.$$

$$\text{sen } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}; \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}; \quad \text{tg } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2x; \quad \cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2x.$$

(6) Transformación de sumas y diferencias de senos y cosenos en productos.

$$\text{sen}\, x + \text{sen}\, y = 2\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,(x+y)\cos \tfrac{1}{2}\,(x-y).$$
$$\text{sen}\, x - \text{sen}\, y = 2\cos \tfrac{1}{2}\,(x+y)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,(x-y).$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos \tfrac{1}{2}\,(x+y)\cos \tfrac{1}{2}\,(x-y).$$
$$\cos x - \cos y = -2\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,(x+y)\, \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\,(x-y).$$

(7) Relaciones en un triángulo cualquiera.

Ley de los senos. $$\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C}.$$

Ley de los cosenos. $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, bc \cos A.$$

Fórmulas para el área. $$K = \tfrac{1}{2}\, bc\, \text{sen}\, A.$$

$$K = \frac{\tfrac{1}{2}\, a^2\, \text{sen}\, B\, \text{sen}\, C}{\text{sen}\,(B+C)}.$$

$$K = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}\,,\ \text{siendo } s = \tfrac{1}{2}\,(a+b+c).$$

3. **Fórmulas de Geometría analítica plana.** Las fórmulas más importantes son las siguientes:

(1) Distancia entre dos puntos $P_1\,(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Pendiente de $P_1 P_2$. $$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Coordenadas del punto medio.

$$x = \tfrac{1}{2}\,(x_1 + x_2)\,,\quad y = \tfrac{1}{2}\,(y_1 + y_2).$$

(2) Angulo de dos rectas en función de sus pendientes.

$$\text{tg}\ \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

(Si las rectas son paralelas es $m_1 = m_2$; si las rectas son perpendiculares es $m_1 m_2 = -1$.)

(3) Ecuaciones de la línea recta.

En función de uno de sus puntos y de la pendiente.

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

En función de la pendiente y de la ordenada en el origen.

$$y = mx + b.$$

En función de dos de sus puntos.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En función de los segmentos que determina sobre los ejes

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

(4) Distancia del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(5) Relaciones entre las coordenadas rectangulares y las polares.

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \operatorname{sen}\theta, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

(6) Ecuación de la circunferencia.

Centro (h, k). $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$

(7) Ecuaciones de la parábola.

Con vértice en el origen. $y^2 = 2\,px$, foco $(\frac{1}{2}\,p, 0)$.

$x^2 = 2\,py$, foco $(0, \frac{1}{2}\,p)$.

Con vértice en (h, k).

$(y - k)^2 = 2\,p(x - h)$, eje $y = k$.

$(x - h)^2 = 2\,p(y - k)$, eje $x = h$.

Con eje en el eje de las y. $y = Ax^2 + C$.

(8) Ecuaciones de otras curvas.

Elipse con centro en el origen y focos en el eje de las x.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (a > b).$$

Hipérbola con centro en el origen y focos en el eje de las x.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbola equilátera con centro en el origen y los ejes de coordenadas como asíntotas.

$$xy = C.$$

Véase también el Capítulo XXVI

4. **Fórmulas de Geometría analítica del espacio.** He aquí algunas de las fórmulas más importantes.

(1) **Distancia entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$.**

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(2) **Línea recta.**

Cosenos directores: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.
Números directores: a, b, c.

Entonces $$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c}.$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Para la recta que une los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2), se tiene:

$$\frac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \frac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \frac{\cos\gamma}{z_2 - z_1}.$$

(3) **Angulo de dos rectas.**

Cosenos directores: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$.
Números directores: a, b, c; a', b', c'.
Si θ = ángulo de las dos rectas, se tiene:

$$\cos\theta = \cos\alpha\,\cos\alpha' + \cos\beta\,\cos\beta' + \cos\gamma\,\cos\gamma',$$

$$\cos\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}.$$

Rectas paralelas. $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Rectas perpendiculares. $aa' + bb' + cc' = 0$.

(4) **Ecuaciones de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1, z_1), y sus números directores son a, b, c.**

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.$$

(5) Ecuación del plano. En el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, los coeficientes A, B, C son los números directores de la recta perpendicular al plano.

Ecuación de un plano que pasa por el punto (x_1, y_1, z_1) *y es perpendicular a la recta que tiene los números directores* A, B, C.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

(6) Angulo de dos planos.

Ecuaciones:
$$Ax + By + Cz + D = 0.$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Números directores de la recta de intersección:

$$BC' - CB', \quad CA' - AC', \quad AB' - BA'.$$

Si θ es el ángulo de los dos planos, se tiene:

$$\cos \theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}.$$

(7) Coordenadas cilíndricas. La distancia z (fig. 1) de un punto $P(x, y, z)$ al plano XY y las coordenadas polares (ρ, θ), de su proyección $A(x, y, 0)$ sobre el plano XY, se llaman *coordenadas cilíndricas* de P. Las coordenadas cilíndricas de P se escriben (ρ, θ, z).

Si x, y, z son las coordenadas rectangulares de P, entonces, de las definiciones y de la figura, tenemos:

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \qquad z = z;$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad \theta = \operatorname{arc\ tg} \frac{y}{x}.$$

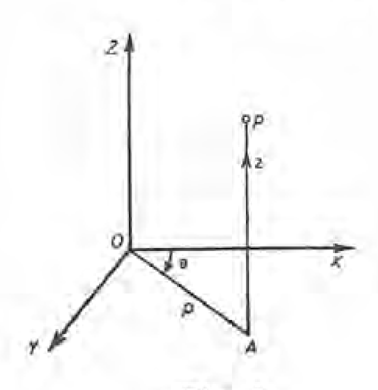


Fig. 1

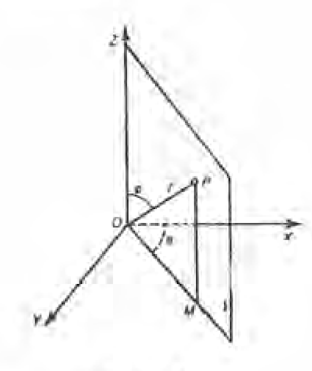


Fig. 2

(8) Coordenadas esféricas. El radio vector r (fig. 2) de un punto P, el ángulo ϕ que forma OP con el eje de las z y el ángulo θ que forma la proyección de OP sobre el plano XY con el eje de las x, se llaman *coordenadas esféricas* de P. El ángulo ϕ se llama

la *colatitud* y θ la *longitud*. Las coordenadas esféricas de P se escriben (r, ϕ, θ).

Si x, y, z son las coordenadas rectangulares de P, entonces, de las definiciones y de la figura, tenemos:

$$x = r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = r \cos \phi;$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \quad \phi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

5. Alfabeto griego.

LETRAS	NOMBRES	LETRAS	NOMBRES	LETRAS	NOMBRES
A α	Alfa	I ι	Iota	P ϱ	Ro
B β	Beta	K κ	Kapa	Σ σ	Sigma
Γ γ	Gama	Λ λ	Lambda	T τ	Tau
Δ δ	Delta	M μ	Mi o mu	Υ υ	Ipsilon
E ε	Epsilon	N ν	Ni o nu	Φ ϕ	Fi
Z ζ	Dseta o zeta	Ξ ξ	Xi	X χ	Ji o ki
H η	Eta	O o	Omicron	Ψ ψ	Psi
Θ θ	Teta	Π π	Pi	Ω ω	Omega

CAPITULO II

VARIABLES, FUNCIONES Y LIMITES

6. Variables y constantes. Una *variable* es una cantidad a la que se le puede asignar, durante el curso de un proceso de análisis, un número ilimitado de valores. Las variables se designan usualmente por las últimas letras del alfabeto

Una cantidad que durante el curso de un proceso tiene un valor fijo se llama *constante*.

Constantes numéricas o *absolutas* son las que conservan los mismos valores en todos los problemas, como 2, 5, $\sqrt{7}$, π, etc.

Constantes arbitrarias, o *parámetros,* son aquellas a las que se pueden asignar valores numéricos, y que durante todo el proceso conservan esos valores asignados. Usualmente se representan por las primeras letras del alfabeto.

Así. en la ecuación de la recta,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

x y y son las coordenadas variables de un punto que se mueve sobre la línea, mientras que a y b son las constantes arbitrarias que representan la abscisa en el origen y la ordenada en el origen, las cuales se supone que son valores definidos para cada recta.

El *valor numérico* (o *absoluto*) de una constante a, para diferenciarlo de su valor algebraico, se representa por $|a|$. Así, $|-2| = 2 = |2|$. El símbolo $|a|$ se lee "valor numérico de a" o "valor absoluto de a".

7. Intervalo de una variable. A menudo nos limitamos solamente a una porción del sistema de números. Por ejemplo, podemos restringir nuestra variable de manera que tome únicamente valores comprendidos entre a y b. También puede ser que a y b sean incluídos o que

uno o ambos sean excluídos. Emplearemos el símbolo $[a, b]$, siendo a menor que b, para representar los números a y b y todos los números comprendidos entre ellos, a menos que se diga explícitamente otra cosa. Este símbolo $[a, b]$ se lee "intervalo de a a b".

8. Variación continua. Se dice que una variable x varía de una manera continua en un intervalo $[a, b]$ cuando x *aumenta* desde el valor a hasta el valor b, de tal manera que toma todos los valores intermedios entre a y b en el orden de sus magnitudes; o cuando x *disminuye* desde $x = b$ hasta $x = a$, tomando sucesivamente todos los valores intermedios. Esta idea se ilustra geométricamente mediante el diagrama de la figura 3.

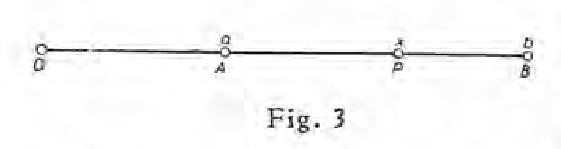


Fig. 3

Tomando el punto O como origen, marquemos sobre la recta los puntos A y B correspondientes a los números a y b. Además, hagamos corresponder el punto P a un valor particular de la variable x. Evidentemente, el intervalo $[a, b]$ estará representado por el segmento AB. Al variar x de una manera continua en el intervalo $[a, b]$, el punto P engendrará el segmento AB si x aumenta o el segmento BA si x disminuye.

9. Funciones. Cuando dos variables están relacionadas de tal manera que el valor de la primera queda determinado si se da un valor a la segunda, entonces se dice que la primera es función de la segunda.

Casi todos los problemas científicos tratan con cantidades y relaciones de esta naturaleza, y en la experiencia de la vida diaria nos encontramos constantemente con situaciones en las que intervienen magnitudes dependientes unas de otras. Así, por ejemplo, el *peso* que un hombre puede levantar depende directamente, a igualdad de otras circunstancias, de su *fuerza*. Análogamente, se puede considerar que la *distancia* que un muchacho puede recorrer depende del *tiempo*. O también podemos decir que el *área* de un cuadrado es una función de la *longitud de su lado*, y que el *volumen* de una esfera es una función de su *diámetro*.

10. Variables independientes y dependientes. La segunda variable, a la cual se pueden asignar valores a voluntad dentro de límites que dependen del problema particular, se llama la *variable independiente* o el *argumento*. La primera variable, cuyo valor queda fijado cuando se asigna un valor a la variable independiente, se llama la *variable dependiente* o la *función*.

Frecuentemente, cuando se consideran dos variables ligadas entre sí, queda a nuestro arbitrio el elegir a una de ellas como variable independiente; pero una vez hecha esta elección, no es permitido cambiar de variable independiente sin tomar ciertas precauciones y hacer las transformaciones pertinentes. El área de un cuadrado, por ejemplo, es una función de la longitud del lado, y, recíprocamente, la longitud del lado es una función del área.

11. Notación de funciones. El símbolo $f(x)$ se emplea para designar una función de x, y se lee *f de x*. Con objeto de distinguir entre diferentes funciones se cambia la letra inicial, como en $F(x)$, $\phi(x)$, $f'(x)$, etc.

Durante todo el curso de un proceso, un mismo símbolo de funcionalidad indicará una misma ley de dependencia entre una función y su variable. En los casos más simples, esta ley expresa la ejecución de un conjunto de operaciones analíticas con la variable. Por consiguiente, en un caso de esta clase el mismo símbolo de función indicará la misma operación, o conjunto de operaciones, aplicadas a diferentes valores de la variable. Así, por ejemplo, si

$$f(x) = x^2 - 9x + 14,$$

entonces,

$$f(y) = y^2 - 9y + 14;$$

$$f(b+1) = (b+1)^2 - 9(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6$$

$$f(0) = 0^2 - 9 \cdot 0 + 14 = 14,$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 9(-1) + 14 = 24,$$

$$f(3) = 3^2 - 9 \cdot 3 + 14 = -4.$$

12. La división por cero, excluída. El cociente de dos números a y b es un número x tal que $a = bx$. Evidentemente, con esta definición la división por cero queda excluída. En efecto, si $b = 0$, y recordando que cero tomado cualquier número de veces como sumando es siempre igual a cero, se ve que x no existe, a menos que $a = 0$. Si $a = 0$, entonces x puede ser cualquier número. Por lo tanto, las expresiones que se presentan en una de las formas

$$\frac{a}{0}, \quad \frac{0}{0},$$

carecen de sentido por no ser posible la división por cero.

Debe tenerse cuidado de no dividir inadvertidamente por cero. La siguiente paradoja es un ejemplo.

Supongamos que $a = b$.
Entonces, evidentemente, $ab = a^2$.
Restando b^2, $ab - b^2 = a^2 - b^2$.
Descomponiendo en factores, $b(a - b) = (a + b)(a - b)$.
Dividiendo por $a - b$, $b = a + b$.
Pero, $a = b$;
luego, $b = 2b$,
o sea que $1 = 2$.

El resultado absurdo proviene de haber dividido por $a - b = 0$.

PROBLEMAS

1. Dado $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, demostrar que
$$f(1) = 12,\quad f(5) = 0,\quad f(0) = -2f(3),\quad f(7) = 5f(-1).$$

2. Si $f(x) = 4 - 2x^2 + x^4$, calcular $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-2)$.

3. Si $F(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta + \cos\theta$, hallar $F(0)$, $F(\frac{1}{2}\pi)$, $F(\pi)$.

4. Dado $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$, demostrar que
$$f(t + 1) = t^3 - 2t^2 - 11t + 12.$$

5. Dado $f(y) = y^2 - 2y + 6$, demostrar que
$$f(y + h) = y^2 - 2y + 6 + 2(y - 1)h + h^2.$$

6. Dado $f(x) = x^3 + 3x$, demostrar que
$$f(x + h) - f(x) = 3(x^2 + 1)h + 3xh^2 + h^3.$$

7. Dado $f(x) = \dfrac{1}{x}$, demostrar que $f(x + h) - f(x) = -\dfrac{h}{x^2 + xh}$.

8. Dado $\phi(z) = 4^z$, demostrar que $\phi(z + 1) - \phi(z) = 3\phi(z)$.

9. Si $\phi(x) = a^x$, demostrar que $\phi(y)\cdot\phi(z) = \phi(y + z)$.

10. Dado $\phi(x) = \log\dfrac{1 - x}{1 + x}$, demostrar que
$$\phi(y) + \phi(z) = \phi\left(\frac{y + z}{1 + yz}\right).$$

11. Dado $f(x) = \operatorname{sen} x$, demostrar que
$$f(x + 2h) - f(x) = 2\cos(x + h)\operatorname{sen} h.$$

SUGESTION. Utilizar las fórmulas (6) del Artículo 2.

13. Gráfica de una función; continuidad. Consideremos la función x^2 y hagamos

$$(1) \qquad y = x^2.$$

Esta relación da un valor de y para cada valor de x; es decir, (1) *define unívocamente* a y para todos los valores de la variable independiente. El lugar geométrico de (1) es una parábola (fig. 4) y se llama la *gráfica* de la función x^2. Si x varía continuamente (Art. 8) desde $x = a$ hasta $x = b$, entonces y variará continuamente desde $y = a^2$ hasta $y = b^2$, y el punto $P(x, y)$ se moverá continuamente, a lo largo de la curva, desde el punto (a, a^2) hasta (b, b^2). Además, a y b pueden admitir todos los valores. En este caso decimos que "la función x^2 es continua para todos los valores de x".

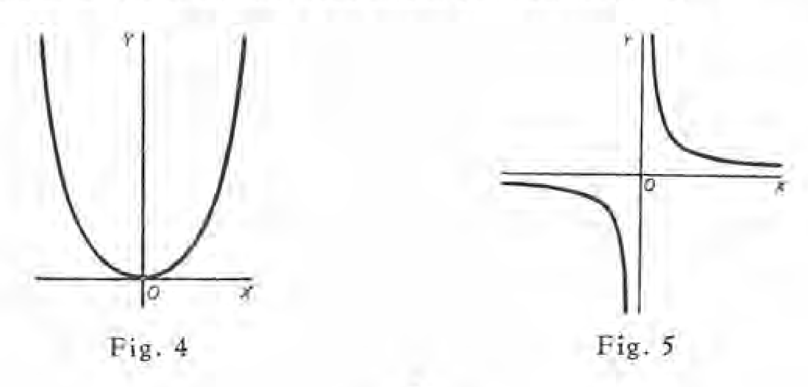


Fig. 4 Fig. 5

Consideremos ahora la función $\frac{1}{x}$. Hagamos

$$(2) \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Está ecuación da un valor de y para cada valor de x, con excepción de $x = 0$ (Art. 12); para $x = 0$ la función *no está definida*. La gráfica (fig. 5), que es el lugar geométrico de (2), es una hipérbola equilátera. Si x aumenta continuamente en cualquier intervalo $[a, b]$ que no incluya $x = 0$, entonces y decrecerá continuamente desde $\frac{1}{a}$ hasta $\frac{1}{b}$, y el punto $P(x, y)$ describirá la curva entre los puntos correspondientes $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\left(b, \frac{1}{b}\right)$. En este caso decimos que "la función $\frac{1}{x}$ es continua para todos los valores de x con excepción de $x = 0$". No existe en la gráfica un punto correspondiente a $x = 0$.

Estos ejemplos ilustran el concepto de continuidad de una función. Una definición se dará en el Artículo 17.

14. Límite de una variable. La noción de una variable que se aproxima a un límite se encuentra, en la Geometría elemental, al establecer o deducir la fórmula que da el área del círculo. Se considera el área de un polígono regular inscrito con un número n cualquiera de lados, y se supone, después, que n crece infinitamente. El área variable tiende así hacia un límite, y este límite se define como área del círculo. En este caso, la variable v (área) aumenta indefinidamente, y la diferencia $a - v$ (siendo a el área del círculo) va disminuyendo hasta que, finalmente, llega a ser menor que cualquier número positivo escogido de antemano, sin importar lo pequeño que éste se haya elegido.

El concepto de límite se precisa mediante la siguiente

DEFINICIÓN. Se dice que la variable v tiende a la constante l como límite, cuando los valores sucesivos de v son tales que el valor numérico de la diferencia $v - l$ puede llegar a ser, finalmente, menor que cualquier número positivo predeterminado tan pequeño como se quiera.

La relación así definida se escribe $\lim v = l$. Por conveniencia, nos serviremos de la notación $v \to l$, que se leerá "v tiende hacia el límite l" o, más brevemente, "v tiende a l". (Algunos autores usan la notación $v \doteq l$.)

EJEMPLO. Si v toma la sucesión infinita de valores

$$2+1, \quad 2+\frac{1}{2}, \quad 2+\frac{1}{4}, \quad \ldots, \quad 2+\frac{1}{2^n}, \quad \ldots$$

es evidente que $v \to 2$ al crecer n, es decir, $\lim v = 2$.

Si sobre una línea recta, como en el Artículo 8, se señala el punto L que corresponde al límite l, y se coloca a ambos lados de L la longitud ε, sin importar lo pequeño que éste sea, entonces se observará que los puntos determinados por v caerán todos, finalmente, dentro del segmento que corresponde al intervalo $[l - \varepsilon, \ l + \varepsilon]$.

15. Límite de una función. En las aplicaciones de la definición de límite, se presentan usualmente casos como el siguiente: se tiene una variable v y una función dada z de v, y se supone que la variable v recibe valores tales que $v \to l$. Tenemos que examinar entonces los valores de la variable dependiente z e investigar, particularmente, si z tiende también a un límite. Si efectivamente existe una constante a tal que $\lim z = a$, entonces se expresa esta relación escribiendo

$$\lim_{v \to l} z = a,$$

y se leerá: "el límite de z, cuando v tiende a l, es a."

16. Teoremas sobre límites. En el cálculo del límite de una función tienen aplicación los teoremas siguientes. Las demostraciones se darán en el Artículo 20.

Supongamos que u, v y w sean funciones de una variable x y que

$$\lim_{x\to a} u = A, \quad \lim_{x\to a} v = B, \quad \lim_{x\to a} w = C.$$

Entonces son ciertas las siguientes relaciones.

(1) $$\lim_{x\to a}(u + v - w) = A + B - C.$$

(2) $$\lim_{x\to a}(uvw) = ABC.$$

(3) $$\lim_{x\to a}\frac{u}{v} = \frac{A}{B}, \text{ si } B \text{ no es cero}.$$

En breves palabras: *el límite de una suma algebraica, de un producto o de un cociente es igual, respectivamente, a la suma algebraica, al producto o al cociente de los límites respectivos, con tal de que, en el último caso, el límite del divisor no sea cero.*

Si c es una constante (independiente de x) y B no es cero, de lo anterior se deduce:

(4) $$\lim_{x\to a}(u + c) = A + c, \quad \lim_{x\to a} cu = cA, \quad \lim_{x\to a}\frac{c}{v} = \frac{c}{B}.$$

Consideremos algunos ejemplos.

1. Demostrar que $\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x) = 12$.

Demostración. La función dada es la suma de x^2 y $4x$. En primer lugar hallaremos los límites de estas dos funciones.

Según (2), $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, puesto que $x^2 = x \cdot x$.

Según (4), $\lim_{x\to 2} 4x = 4\lim_{x\to 2} x = 8$.

Luego, según (1), el límite buscado es $4 + 8 = 12$.

2. Demostrar que $\lim_{z\to 2}\frac{z^2 - 9}{z + 2} = -\frac{5}{4}$.

Demostración. Considerando el numerador, $\lim_{z\to 2}(z^2 - 9) = -5$, según (2) y (4). En cuanto al denominador, $\lim_{z\to 2}(z + 2) = 4$. Luego, de (3), tenemos el resultado buscado.

17. Funciones continuas y discontinuas. En el ejemplo 1 del Artículo 16, donde se demostró que

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 4x) = 12,$$

observamos que la solución es el *valor* de la función para $x = 2$; es decir, el valor límite de la función cuando x tiende a 2 es igual al valor de la función para $x = 2$. En este caso decimos que la función es *continua* para $x = 2$. La definición general es la siguiente :

DEFINICIÓN. Se dice que una función $f(x)$ es *continua* para $x=a$ si el límite de la función, cuando x tiende a a, es igual al valor de la función para $x = a$. En símbolos, si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

entonces $f(x)$ es continua para $x = a$.

Se dice que la función es *discontinua* para $x = a$ si no se satisface esta condición.

Llamamos la atención de los dos casos siguientes, que se presentan frecuentemente.

CASO I. Como ejemplo sencillo de una función que es continua para un valor particular de la variable, consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Para $x = 1$, $f(x) = f(1) = 3$. Además, si x tiende a 1, la función $f(x)$ tiende a 3 como límite (Art. 16). Luego la función es continua para $x = 1$.

CASO II. La definición de función continua supone que la función está definida para $x = a$. Sin embargo, si este no es el caso, a veces es posible asignar a la función tal valor para $x = a$ que la condición de continuidad se satisfaga. En estos casos se aplica el siguiente teorema :

Teorema. *Si* $f(x)$ *no está definida para* $x = a$, *pero*

$$\lim_{x \to a} f(x) = B,$$

entonces $f(x)$ *será continua para* $x = a$, *si se toma como valor de* $f(x)$ *para* $x = a$ *el valor* B.

Así, por ejemplo, la función

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

no está definida para $x = 2$ (puesto que entonces habría división por cero). Pero para todo otro valor de x

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2 ;$$

y $$\lim_{x \to 2} (x+2) = 4\,;$$

luego, $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Aunque la función no está definida para $x = 2$, si arbitrariamente asignamos a ella para $x = 2$ el valor 4, se hace continua para este valor.

Se dice que una función f(x) *es continua en un intervalo cuando es continua para todos los valores de* x *dentro de este intervalo.* *

En el Cálculo diferencial e integral, es frecuente tener que calcular el límite de una función de la variable v, cuando v tiende a un valor a situado en un intervalo donde la función es continua. En este caso el límite de la función es el valor de la función para $v = a$.

18. Infinito (∞). Si el valor numérico de una variable v llega a ser y permanece mayor que cualquier número positivo asignado de antemano, por grande que éste sea, decimos que v *se vuelve infinita*. Si v toma solamente valores positivos, se hace infinita positivamente; si solamente toma valores negativos, se hace infinita negativamente. La notación que se emplea para los tres casos es

$$\lim v = \infty, \quad \lim v = +\infty, \quad \lim v = -\infty.$$

En estos casos v no se aproxima a un límite, según la definición del Artículo 14. La notación $\lim v = \infty$, o $v \to \infty$, debe leerse ''v se vuelve infinita'' y no ''v se aproxima al infinito'' **

Con esta notación podemos escribir, por ejemplo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty,$$

significando que $\frac{1}{x}$ se hace infinito cuando x tiende a cero.

* En este libro trataremos solamente funciones que son, en general, continuas, es decir, que son continuas para todos los valores de x, con la posible excepción de ciertos valores aislados; se sobrentiende que, en general, nuestros resultados son válidos solamente para aquellos valores de x para los cuales la función que se considera es realmente continua.

** A causa de la notación y para mayor uniformidad, a veces la expresión $v \to +\infty$ se lee ''v tiende al límite más infinito''. De igual manera $v \to -\infty$ se lee ''v tiende al límite menos infinito'' y $v \to \infty$ se lee ''v, en valor numérico, tiende al límite infinito''.

Esta fraseología es cómoda, pero el lector no debe olvidar que el infinito no es un límite, puesto que el infinito no es un número.

Según el Artículo 17, es evidente que si

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

es decir, si $f(x)$ se hace infinita cuando x tiende a a, entonces $f(x)$ es discontinua para $x = a$.

Una función puede tender hacia un límite cuando la variable independiente se hace infinita. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

En general, si $f(x)$ tiende al valor constante A como límite cuando $x \to \infty$, empleamos la notación del Artículo 17 y escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Ciertos límites particulares que se presentan frecuentemente se dan a continuación. La constante c no es cero.

	Escrito en forma de límites	*Forma abreviada, frecuentemente usada*
(1)	$\lim_{v \to 0} \frac{c}{v} = \infty.$	$\frac{c}{0} = \infty.$
(2)	$\lim_{v \to \infty} cv = \infty.$	$c \cdot \infty = \infty.$
(3)	$\lim_{v \to \infty} \frac{v}{c} = \infty.$	$\frac{\infty}{c} = \infty$
(4)	$\lim_{v \to \infty} \frac{c}{v} = 0.$	$\frac{c}{\infty} = 0.$

Estos límites particulares son útiles para hallar el límite del cociente de dos polinomios cuando la variable se hace infinita. El siguiente ejemplo ilustrará el método.

EJEMPLO ILUSTRATIVO. Demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = -\frac{2}{7}.$

Demostración. Divídanse el numerador y el denominador por x^3, que es la mayor potencia de x que entra en la fracción. Entonces tenemos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7}.$$

El límite de cada término que contiene a x, tanto en el numerador como en el denominador del segundo miembro, es cero, de acuerdo con (4). Por consiguiente, se obtiene la solución aplicando las fórmulas (1) y (3) del Artículo 16. En cualquier caso análogo se procede, por lo tanto, como sigue:

Se dividen numerador y denominador por la mayor potencia de la variable que entre en la fracción.

Si u y v son funciones de x, y

$$\lim_{x\to a} u = A, \quad \lim_{x\to a} v = 0,$$

y A no es igual a cero, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{u}{v} = \infty.$$

Esta fórmula resuelve el caso excepcional de (3), del Artículo 16, cuando $B = 0$ y A no es cero. Véase también el Artículo 20.

PROBLEMAS

Demostrar cada una de las siguientes igualdades:

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{5-2x^2}{3x+5x^2} = -\frac{2}{5}.$

Demostración. $\lim_{x\to\infty} \frac{5-2x^2}{3x+5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x^2}-2}{\frac{3}{x}+5}.$

[Dividiendo numerador y denominador por x^2.]

El límite de cada término conteniendo a x, en el numerador y en el denominador, es cero, de acuerdo con (4). Aplicando (1) y (3) del Artículo 16 se obtiene la solución.

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{2x+3} = 2.$

3. $\lim_{t\to 0} \frac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6} = -\frac{1}{3}.$

4. $\lim_{h\to 0} \frac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2} = \frac{x}{2}.$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7} = 3.$

6. $\lim_{k\to 0} \frac{(2z+3k)^3-4k^2z}{2z(2z-k)^2} = 1.$

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^4+bx^2+c}{dx^5+ex^3+fx} = 0.$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^4+bx^2+c}{dx^3+ex^2+fx+g} = \infty.$

9. $\lim_{s\to a} \frac{s^4-a^4}{s^2-a^2} = 2a^2.$

10. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{5}{4}.$

11. $\lim_{\to\infty} \frac{4y^2-3}{2y^3+3y^2} = 0.$

12. $\lim_{h\to\infty} \frac{3h+2xh^2+x^2h^3}{4-3xh-2x^3h^3} = -\frac{1}{2x}.$

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} = \frac{a_0}{b_0}.$

14. $\lim_{x\to 0} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n} = \frac{a_n}{b_n}.$

15. $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$. ($n$ = número entero y positivo.)

16. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Demostración. No se puede hallar el límite sustituyendo $h = 0$, porque se obtiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ (Art. 12). Por esta razón hay que transformar la expresión de una manera conveniente, como se indica abajo, a saber, racionalizando el numerador.

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Por tanto, $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

17. Dado $f(x) = x^2$, demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x.$$

18. Dado $f(x) = ax^2 + bx + c$, demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2ax + b.$$

19. Dado $f(x) = \frac{1}{x}$, demostrar que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}.$$

20. Si $f(x) = x^3$, hallar

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

19. Infinitésimos. Una variable v que tiende a cero se llama un *infinitésimo*. Simbólicamente se escribe (Art. 14)

$$\lim v = 0 \quad \text{o} \quad v \to 0,$$

y quiere decir que el valor numérico de v llega a ser, y permanece, menor que cualquier número positivo asignado de antemano, por pequeño que sea.

Si $\lim v = l$, entonces $\lim (v - l) = 0$; es decir, *la diferencia entre una variable y su límite es un infinitésimo*.

Recíprocamente, *si la diferencia entre una variable y una constante es un infinitésimo, entonces la constante es el límite de la variable*.

20. Teoremas relativos a infinitésimos y límites. En las siguientes consideraciones todas las variables se suponen funciones de la misma variable independiente, y, además, que tienden a sus límites respectivos cuando esta variable tiende a un valor fijo a. La constante ε es un número positivo asignado de antemano, tan pequeño como se quiera, pero no cero.

En primer lugar demostraremos cuatro teoremas sobre infinitésimos.

I. *La suma algebraica de* n *infinitésimos, siendo* n *un número finito, es otro infinitésimo.*

En efecto, el valor numérico de la suma llegará a ser, y permanecerá, menor que ε cuando el valor numérico de cada infinitésimo llega a ser, y permanece, menor que $\frac{\varepsilon}{n}$.

II. *El producto de una constante* c *por un infinitésimo es otro infinitésimo.*

En efecto, el valor numérico del producto será menor que ε cuando el valor numérico del infinitésimo sea menor que $\frac{\varepsilon}{|c|}$.

III. *El producto de un número finito* n *de infinitésimos es otro infinitésimo.*

En efecto, el valor numérico del producto llegará a ser, y permanecerá, menor que ε cuando el valor numérico de cada infinitésimo llega a ser, y permanece, menor que la raíz n de ε.

IV. *Si lím de $v = l$* y *l no es cero, entonces el cociente de un infinitésimo* i *dividido por* v *es también un infinitésimo.*

En efecto, podemos elegir un número positivo c, numéricamente menor que l, tal que el valor numérico de v llega a ser, y permanece, mayor que c, y también tal que el valor numérico de i llega a ser, y permanece, menor que $c\varepsilon$. Entonces el valor numérico del cociente llegará a ser, y permanecerá, menor que ε.

Demostraciones de los teoremas del Artículo 16. Sea

$$(1) \qquad u - A = i, \quad v - B = j, \quad w - C = k.$$

Entonces i, j, k son funciones de x, y cada una tiende a cero cuando $x \rightarrow a$; es decir, son infinitésimos (Art. 19). De las igualdades (1) obtenemos

$$(2) \qquad u + v - w - (A + B - C) = i + j - k.$$

El segundo miembro es un infinitésimo según el teorema I. Luego, según el Artículo 19,

$$(3) \qquad \lim_{x \to a} (u + v - w) = A + B - C.$$

Según (1) tenemos $u = A + i$, $v = B + j$. Multiplicando y transponiendo AB resulta:

$$(4) \qquad uv - AB = Aj + Bi + ij.$$

Según los teoremas I a III que hemos demostrado, el segundo miembro es un infinitésimo. Luego,

$$(5) \qquad \lim_{x \to a} uv = AB.$$

La demostración se extiende fácilmente al producto uvw.

En fin, podemos escribir,

$$(6) \qquad \frac{u}{v} - \frac{A}{B} = \frac{A+i}{B+j} - \frac{A}{B} = \frac{Bi - Aj}{B(B+j)}.$$

El numerador es un infinitésimo según los teoremas I y II. Según (3) y (4), lím $B(B+j) = B^2$. Según el teorema IV, el segundo miembro de (6) es un infinitésimo y, por lo tanto,

$$(7) \qquad \lim_{x \to a} \frac{u}{v} = \frac{A}{B}.$$

Luego las proposiciones del Artículo 16 están demostradas.

CAPITULO III

DERIVACION

21. Introducción. En este capítulo vamos a investigar cómo varía el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a Newton * al descubrimiento de los principios fundamentales del *Cálculo infinitesimal*, el instrumento científico más poderoso del matemático moderno.

22. Incrementos. El *incremento* de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la *diferencia* que se obtiene restando el valor inicial del valor final. Un incremento de x se representa por el símbolo Δx, que se lee "delta x". El estudiante no debe leer este símbolo "delta veces x"

Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo, ** según que la variable aumente o disminuya al cambiar de valor. Asimismo,

Δy significa incremento de y,

$\Delta \phi$ significa incremento de ϕ,

$\Delta f(x)$ significa incremento de $f(x)$, etc.

---

* El célebre matemático y físico inglés Isaac Newton (1642-1727) ha sido uno de los genios más grandes que han existido. Desarrolló la ciencia del Cálculo diferencial e integral bajo el nombre de *fluxiones*. Aunque Newton descubrió y empleó la nueva ciencia desde 1670, su primera obra publicada que la exhibe está fechada en 1687, teniendo el título "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica". Esta es la obra principal de Newton. De ella dijo Laplace: "Siempre permanecerá preeminente sobre todas las otras producciones de la mente humana."

** Algunos autores al *incremento negativo* le llaman "*decremento*".

Si en $y=f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará el incremento correspondiente de la función $f(x)$ (o sea, de la variable dependiente y).

El incremento Δy siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de y, que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de x desde el cual se cuenta el incremento Δx. Por ejemplo, consideremos la función

$$y = x^2.$$

Si tomamos $x = 10$ como valor inicial de x, esto fija $y = 100$ como valor inicial de y.

Supongamos que x aumenta hasta $x = 12$, es decir, $\Delta x = 2$;

entonces y aumenta hasta $y = 144$, y $\Delta y = 44$.

Si se supone que x decrece hasta $x = 9$, es decir, $\Delta x = -1$;

entonces y decrece hasta $y = 81$, y $\Delta y = -19$.

En este ejemplo, y aumenta cuando x aumenta, y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; Δx y Δy tendrán entonces signos contrarios.

23. Comparación de incrementos. Consideremos la función

$$y = x^2. \tag{1}$$

Supongamos que x tiene un valor inicial fijo y le damos después un incremento Δx. Entonces y tomará un incremento correspondiente Δy, y tendremos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

o sea,

$$y + \Delta y = x^2 + 2\,x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Restando (1),

$$\begin{array}{rl} y & = x^2 \\ \hline \Delta y & = \quad 2\,x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \end{array} \tag{2}$$

obtenemos el incremento Δy en función de x y Δx.

Para hallar la razón de los incrementos, basta dividir los dos miembros de (2) por Δx, y resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,x + \Delta x.$$

Si el valor de x es 4, es claro (Art. 16) que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

Observemos ahora con cuidado, mediante una tabla, cómo se comporta la razón de los incrementos de x y de y cuando el incremento de x decrece.

Valor inicial de x	Valor final de x	Incremento Δx	Valor inicial de y	Valor final de y	Incremento Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5,0	1,0	16	25	9	9
4	4,8	0,8	16	23,04	7,04	8,8
4	4,6	0,6	16	21,16	5,16	8,6
4	4,4	0,4	16	19,36	3,36	8,4
4	4,2	0,2	16	17,64	1,64	8,2
4	4,1	0,1	16	16,81	0,81	8,1
4	4,01	0,01	16	16,0801	0,0801	8,01

Esta tabla pone de manifiesto que al decrecer Δx también disminuye Δy, mientras que la razón de los dos incrementos toma los valores sucesivos 9, 8,8, 8,6, 8,4, 8,2, 8,1, 8,01. Esta sucesión de valores nos dice que podemos hacer que el valor de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sea tan próximo a 8 como deseemos con sólo tomar a Δx suficientemente pequeño. Luego,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8.$$

24. Derivada de una función de una variable. La definición fundamental del Cálculo diferencial es la siguiente:

*La derivada * de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.*

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es *derivable* o que *tiene derivada*.

La definición puede darse mediante *símbolos*, en la forma siguiente: Dada la función

(1) $$y = f(x),$$

consideremos un valor inicial fijo de x.

* Llamada también *coeficiente diferencial* o *función derivada*.

Demos a x un incremento Δx; entonces obtenemos para la función y un incremento Δy, siendo el valor final de la función

$$(2) \qquad y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Para hallar el incremento de la función, restamos (1) de (2); se obtiene

$$(3) \qquad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo los dos miembros por Δx, incremento de la variable independiente, resulta:

$$(4) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

El límite del segundo miembro cuando $\Delta x \rightarrow 0$ es, por definición, la *derivada* de $f(x)$, o sea, según (1), de y, y *se representa por el símbolo* $\frac{dy}{dx}$. Luego, la igualdad

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

define la *derivada de* y [*o de* f(x)] *con respecto a* x.

De (4) obtenemos también

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Asimismo, si u es función de t, entonces,

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \text{derivada de } u \text{ con respecto a } t.$$

La operación de hallar la derivada de una función se llama *derivación*.

25. Símbolos para representar las derivadas. Puesto que Δy y Δx son siempre cantidades finitas y tienen valores definidos, la expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

es una verdadera fracción. Pero el símbolo

$$\frac{dy}{dx}$$

ha de mirarse *no como una fracción, sino como el valor límite de una fracción*. En muchos casos veremos que este símbolo sí tiene propiedades de

fracción, y más adelante demostraremos el significado que puede atribuirse a dy y dx, pero, por ahora, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ ha de considerarse como conjunto.

Puesto que, en general, la derivada de una función de x es también función de x, se emplea también el símbolo $f'(x)$ para representar la derivada de $f(x)$. Luego, si

$$y = f(x),$$

podemos escribir la igualdad

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),$$

que se lee "la derivada de y con respecto a x es igual a f prima de x" El símbolo

$$\frac{d}{dx},$$

considerado por sí mismo, se llama *operador derivada;* indica que toda función que se escriba después de él ha de derivarse con respecto a x. Así,

$\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}y$ indica la derivada de y con respecto a x;

$\frac{d}{dx}f(x)$ indica la derivada de $f(x)$ con respecto a x;

$\frac{d}{dx}(2x^2+5)$ indica la derivada de $2x^2+5$ con respecto a x.

El símbolo y es una forma abreviada de $\frac{dy}{dx}$.

El símbolo D_x se emplea por algunos autores en lugar de $\frac{d}{dx}$ Luego, si

$$y = f(x),$$

podemos escribir las identidades

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}f(x) = D_x f(x) = f'(x).$$

Debe hacerse hincapié en esto: en el paso esencial de hacer que $\Delta x \to 0$, la variable es Δx y no x. El valor de x se supone fijo desde el principio. Para hacer resaltar que $x = x_0$ desde el principio hasta el fin, podemos escribir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

26. Funciones derivables. De la teoría de los límites se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable.

Sin embargo, la recíproca no es siempre cierta: se han descubierto funciones que son continuas y, a pesar de eso, no tienen derivada. Pero tales funciones no son frecuentes en las Matemáticas aplicadas, y *en este libro se consideran solamente las funciones derivables*, es decir, las funciones que tienen derivada para todos los valores de la variable independiente, con excepción, a lo más, de valores aislados.

27. Regla general para la derivación. Según la definición de derivada se puede ver que el procedimiento para derivar una función $y = f(x)$ comprende los siguientes pasos:

Regla general para la derivación

Primer paso. *Se sustituye en la función* x *por* $x + \Delta x$, *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

Segundo paso. *Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene* Δy *(incremento de la función).*

Tercer paso. *Se divide* Δy *(incremento de la función) por* Δx *(incremento de la variable independiente).*

Cuarto paso. *Se calcula el límite de este cociente cuando* Δx *(incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada.*

El estudiante debe familiarizarse con esta regla, aplicando el procedimiento a muchos ejemplos. La resolución detallada de tres de estos ejemplos se da a continuación. Nótese que los teoremas del Artículo 16 se emplean en el cuarto paso, manteniéndose x constante.

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función $3x^2 + 5$.

Resolución. Aplicando los pasos sucesivos de la regla general, obtenemos, después de hacer

$$y = 3x^2 + 5.$$

Primer paso.

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= 3(x + \Delta x)^2 + 5 \\ &= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5. \end{aligned}$$

Segundo paso.

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ y \quad &= 3x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 5 \\ \hline \Delta y &= \qquad 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Tercer paso. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6\,x + 3 \cdot \Delta x.$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \rightarrow 0$. Según (A) resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 6\,x.$$

O bien, $$y' = \frac{d}{dx}(3\,x^2 + 5) = 6\,x.$$

EJEMPLO 2. Hallar la derivada de $x^3 - 2\,x + 7$.

Resolución. Hagamos $y = x^3 - 2\,x + 7$.

Primer paso.
$$\begin{aligned} y + \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - 2\,(x + \Delta x) + 7 \\ &= x^3 + 3\,x^2 \cdot \Delta x + 3\,x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2\,x - 2 \cdot \Delta x + 7. \end{aligned}$$

Segundo paso.
$$\begin{array}{rll} y + \Delta y &= x^3 + 3\,x^2 \cdot \Delta x + 3\,x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 & - 2\,x - 2 \cdot \Delta x + 7 \\ y &= x^3 & - 2\,x \qquad\quad + 7 \\ \hline \Delta y &= \quad 3\,x^2 \cdot \Delta x + 3\,x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 & \qquad - 2 \cdot \Delta x \end{array}$$

Tercer paso. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3\,x^2 + 3\,x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - 2.$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \rightarrow 0$. Según (A) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = 3\,x^2 - 2.$$

O bien, $$y' = \frac{d}{dx}(x^3 - 2\,x + 7) = 3\,x^2 - 2.$$

EJEMPLO 3. Hallar la derivada de la función $\dfrac{c}{x^2}$.

Resolución. Hagamos $y = \dfrac{c}{x^2}$.

Primer paso. $$y + \Delta y = \frac{c}{(x + \Delta x)^2}.$$

Segundo paso.
$$\begin{array}{rl} y + \Delta y &= \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2}. \\ y &= \dfrac{c}{x^2} \\ \hline \Delta y &= \dfrac{c}{(x + \Delta x)^2} - \dfrac{c}{x^2} = \dfrac{-\,c \cdot \Delta x\,(2\,x + \Delta x)}{x^2\,(x + \Delta x)^2}. \end{array}$$

Tercer paso. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -c \cdot \frac{2\,x + \Delta x}{x^2\,(x + \Delta x)^2}.$$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \rightarrow 0$. Según (A) tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = -c \cdot \frac{2\,x}{x^2\,(x)^2} = -\frac{2\,c}{x^3}. \quad \left[y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x^2}\right) = -\frac{2\,c}{x^3}. \right]$$

PROBLEMAS

Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones usando la regla general.

1. $y=2-3x$. *Sol.* $y'=-3$.
2. $y=mx+b$. $y'=m$.
3. $y=ax^2$. $y'=2ax$.
4. $s=2t-t^2$. $s'=2-2t$.
5. $y=cx^3$. $y'=3cx^2$.
6. $y=3x-x^3$. $y'=3-3x^2$.
7. $u=4v^2+2v^3$. $u'=8v+6v^2$.
8. $y=x^4$. $y'=4x^3$.
9. $\varrho=\frac{2}{\theta+1}$. $\frac{d\varrho}{d\theta}=-\frac{2}{(\theta+1)^2}$.
10. $y=\frac{3}{x^2+2}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{6x}{(x^2+2)^2}$.
11. $s=\frac{t+4}{t}$. $\frac{ds}{dt}=-\frac{4}{t^2}$.
12. $y=\frac{1}{1-2x}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{(1-2x)^2}$.
13. $\varrho=\frac{\theta}{\theta+2}$. $\frac{d\varrho}{d\theta}=\frac{2}{(\theta+2)^2}$.
14. $s=\frac{At+B}{Ct+D}$. $\frac{ds}{dt}=\frac{AD-BC}{(Ct+D)^2}$.
15. $y=\frac{x^3+1}{x}$. $\frac{dy}{dx}=2x-\frac{1}{x^2}$.
16. $y=\frac{1}{x^2+a^2}$. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{(x^2+a^2)^2}$.
17. $y=\frac{x}{x^2+1}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
18. $y=\frac{x^2}{4-x^2}$. $\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{(4-x^2)^2}$.
19. $y=3x^2-4x-5$.
20. $s=at^2+bt+c$.
21. $u=2v^3-3v^2$.
22. $y=ax^3+bx^2+cx+d$.
23. $\varrho=(a-b\theta)^2$.
24. $y=(2-x)(1-2x)$.
25. $y=(Ax+B)(Cx+D)$.
26. $s=(a+bt)^3$.
27. $y=\frac{x}{a+bx^2}$.
28. $y=\frac{a+bx^2}{x^2}$.
29. $y=\frac{x^2}{a+bx^2}$.

28. Interpretación geométrica de la derivada. Ahora vamos a considerar un teorema que es fundamental en todas las aplicaciones del Cálculo diferencial a la Geometría. Primero es necesario recordar la definición de *tangente* a una curva en un punto P de la misma. Supongamos una secante que pase por P y un punto próximo Q de la curva (fig. 6). Hagamos que el punto Q se mueva sobre la curva aproximándose indefinidamente a P. La secante girará alrededor de P, y su posición límite es, por definición, la tangente a la curva en P. Consideremos ahora la gráfica de la función $f(x)$, o sea, la curva AB (fig. 6), dada por la ecuación

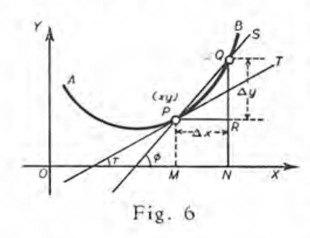


Fig. 6

(1) $$y=f(x).$$

Procedamos ahora a derivar la función (1) según la regla general y a interpretar cada paso geométricamente. Para ello escogemos un punto $P(x, y)$ de la curva, y un segundo punto $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$, también de la curva y cercano a P.

Primer paso. $y + \Delta y = f(x + \Delta x) \qquad = NQ$

Segundo paso.

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= f(x + \Delta x) &&= NQ \\ y &= f(x) &&= MP = NR \\ \hline \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) &&= RQ \end{aligned}$$

Tercer paso.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{RQ}{MN} = \frac{RQ}{PR}$$

$$= \operatorname{tg} \angle RPQ = \operatorname{tg} \phi$$

$$= \text{pendiente de la secante } PQ.$$

Con este paso vemos que la razón de los incrementos Δy y Δx es igual a la pendiente de la secante determinada por los puntos

$$P(x, y) \text{ y } Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

en la gráfica de $f(x)$.

Examinemos el sentido geométrico del cuarto paso. Ahora se considera el valor de x como fijo. Luego P es un *punto fijo* de la gráfica. Asimismo, Δx varía tendiendo a cero. Por tanto, evidentemente, el punto Q ha de moverse *a lo largo de la curva* y aproximarse a P como posición límite. Luego la secante PQ girará alrededor de P y tendrá como límite la tangente en P. En la figura,

$$\phi = \text{inclinación de la secante } PQ,$$

$$\tau = \text{inclinación de la tangente } PT.$$

Luego $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \phi = \tau$. Suponiendo que $\operatorname{tg} \phi$ es una función continua (véase el Art. 70), tenemos:

Cuarto paso.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg} \tau,$$

$$= \textit{pendiente de la tangente en } P.$$

Así hemos establecido el importante teorema siguiente:

Teorema. *El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.*

Este problema de la tangente llevó a Leibnitz * al descubrimiento del *Cálculo diferencial*.

EJEMPLO. Hallar las pendientes de las tangentes a la parábola $y = x^2$ (fig. 7) en el vértice y en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

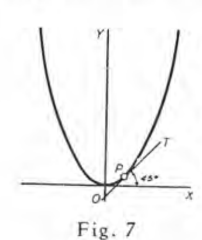


Fig. 7

Solución. Derivando según la regla general (Art. 27) resulta:

(2) $\frac{dy}{dx} = 2x$ = pendiente de la tangente en *cualquier* punto (x, y) de la curva.

Para hallar la pendiente de la tangente en el vértice, bastará sustituir $x = 0$ en (2), obteniendo:

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Luego la pendiente de la tangente en el vértice es cero; es decir, la tangente es paralela al eje de las x, y en este caso coincide con él.

Para hallar la pendiente de la tangente en el punto P, de abscisa $x = \frac{1}{2}$, bastará sustituir $x = \frac{1}{2}$ en (2). Se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = 1;$$

es decir, la tangente en el punto P forma con el eje de las x un angulo de 45°.

PROBLEMAS

Aplicando las derivadas hallar la pendiente y la inclinación de la tangente a cada una de las curvas siguientes en el punto cuya abscisa se indica. Verificar el resultado trazando la curva y la tangente.

1. $y = x^2 - 2$, siendo $x = 1$. *Sol.* 2; 63° 26′.
2. $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$, siendo $x = 3$.
3. $y = \frac{4}{x-1}$, siendo $x = 2$.
4. $y = 3 + 3x - x^3$, siendo $x = -1$.
5. $y = x^3 - 3x^2$, siendo $x = 1$.

---

* Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) nació en Leipzig. Su gran talento se manifestó con investigaciones originales en varios ramos de la Ciencia y de la Filosofía, Fué el primero que publicó sus descubrimientos de Cálculo infinitesimal en un breve ensayo que apareció en la revista *Acta Eruditorum*, de Leipzig, en 1684. Se sabe, no obstante, que ya existían manuscritos de Newton sobre las "fluxiones", y algunos historiadores creen que Leibnitz recibió las nuevas ideas de aquéllos. Actualmente se cree, a lo que parece, que Newton y Leibnitz inventaron el Cálculo infinitesimal independientemente el uno del otro. La notación que hoy se usa es la que Leibnitz introdujo.

6. Hallar el punto de la curva $y = 5x - x^2$ en el que la inclinación de la tangente es de 45°. *Sol.* (2, 6).

7. En la curva $y = x^3 + x$ hallar los puntos en los que la tangente es paralela a la recta $y = 4x$. *Sol.* (1, 2), (−1, −2).

En cada uno de los tres siguientes problemas hallar: a) los puntos de intersección del par de curvas dado; b) la pendiente y la inclinación de la tangente a cada curva, y el ángulo formado por las tangentes, en cada punto de intersección (véase (2) del Artículo 3).

8. $y = 1 - x^2,$
$y = x^2 - 1.$ *Sol.* Angulo de intersección $= \text{arc tg } \frac{4}{3} = 53° 8'$.

9. $y = x^2,$
$x - y + 2 = 0.$

10. $y = x^3 - 3x,$
$2x + y = 0.$

11. Hallar el ángulo de las curvas $9y = x^3$ y $y = 6 + 8x - x^3$ en el punto de intersección (3, 3). *Sol.* 21° 27′.

CAPITULO IV

REGLAS PARA DERIVAR FUNCIONES ALGEBRAICAS

29. Importancia de la regla general. La regla general para derivación, dada en el Artículo 27, es fundamental, puesto que se deduce directamente de la definición de derivada, y es muy importante que el lector se familiarice completamente con ella. Sin embargo, el procedimiento de aplicar la regla en la resolución de problemas es largo o difícil; por consiguiente, se han deducido de la regla general, a fin de facilitar la tarea, reglas especiales para derivar ciertas formas normales que se presentan con frecuencia.

Es cómodo expresar estas reglas especiales por medio de fórmulas, de las cuales se da a continuación una lista. El lector no sólo debe aprender de memoria cada fórmula cuando se ha deducido, sino también poder enunciar en palabras la regla correspondiente.

En estas fórmulas u, v, w representan funciones derivables de x.

FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

I $$\frac{dc}{dx} = 0.$$

II $$\frac{dx}{dx} = 1.$$

III $$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

IV $$\frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

V $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

VI $$\frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

VI *a* $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

VII *a* $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

VIII $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx},$$ **siendo *y* función de *v*.**

IX $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$ **siendo *y* función de *x*.**

30. Derivada de una constante. Si se sabe que una función tiene el mismo valor para cada valor de la variable independiente, esta función es constante, y podemos representarla por

$$y = c.$$

Cuando x toma un incremento Δx, el valor de la función no se altera; es decir, $\Delta y = 0$, y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Pero $$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = 0.$$

I $$\therefore\ \frac{dc}{dx} = 0.$$

La derivada de una constante es cero.

Este resultado se prevé fácilmente. En efecto, la gráfica de la ecuación $y = c$ es una recta paralela a OX; luego su pendiente es cero. Y como la pendiente es el valor de la derivada (Art. 28) resulta que la derivada es cero.

31. Derivada de una variable con respecto a sí misma.

Sea $$y = x.$$

Siguiendo la regla general (Art. 27), tenemos:

PRIMER PASO. $$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

SEGUNDO PASO. $$\Delta y = \Delta x.$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dx} = 1.$$

II $$\therefore \quad \frac{dx}{dx} = 1.$$

La derivada de una variable con respecto a sí misma es la unidad.

Este resultado se prevé fácilmente. En efecto, la pendiente de la recta $y = x$ es la unidad.

32. Derivada de una suma.

Sea $$y = u + v - w.$$

Según la regla general:

PRIMER PASO. $$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - w - \Delta w.$$

SEGUNDO PASO. $$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Ahora bien (Art. 24),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{dw}{dx}.$$

Luego, según (1) del Artículo 16,

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

III $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}.$$

Una demostración semejante es válida para la suma algebraica de cualquier número de funciones.

La derivada de la suma algebraica de un número finito n *de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones.*

33. Derivada del producto de una constante por una función.

Sea $$y = cv.$$

Según la regla general:

PRIMER PASO $$y + \Delta y = c(v + \Delta v) = cv + c\Delta v.$$

SEGUNDO PASO $$\Delta y = c\Delta v$$

TERCER PASO $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

De donde, según (4) del Artículo 16,

CUARTO PASO $$\frac{dy}{dx} = c\frac{dv}{dx}.$$

IV $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(cv) = c\frac{dv}{dx}.$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

34. Derivada del producto de dos funciones.

Sea $$y = uv.$$

Según la regla general:

PRIMER PASO $$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

Efectuando la multiplicación:

$$y + \Delta y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

SEGUNDO PASO. $$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v.$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Aplicando (2) y (4) del Artículo 16, notando que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$, y que, por tanto, el límite del producto $\Delta u \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ es cero, tenemos:

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

V $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

La derivada de un producto de dos funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera.

35. Derivada del producto de n funciones, siendo n un número fijo. Si se dividen ambos miembros de la fórmula **V** por uv, se obtiene:

$$\frac{\dfrac{d}{dx}(uv)}{uv} = \frac{\dfrac{du}{dx}}{u} + \frac{\dfrac{dv}{dx}}{v}.$$

Luego, si tenemos el producto de n funciones,

$$y = v_1 v_2 \cdots v_n,$$

podemos escribir

$$\frac{\dfrac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n)}{v_1 v_2 \cdots v_n} = \frac{\dfrac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\dfrac{d}{dx}(v_2 v_3 \cdots v_n)}{v_2 v_3 \cdots v_n}$$

$$= \frac{\dfrac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\dfrac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\dfrac{d}{dx}(v_3 v_4 \cdots v_n)}{v_3 v_4 \cdots v_n}$$

$$= \frac{\dfrac{dv_1}{dx}}{v_1} + \frac{\dfrac{dv_2}{dx}}{v_2} + \frac{\dfrac{dv_3}{dx}}{v_3} + \cdots + \frac{\dfrac{dv_n}{dx}}{v_n}.$$

Multiplicando ambos miembros por $v_1 v_2 \cdots v_n$, tenemos:

$$\frac{d}{dx}(v_1 v_2 \cdots v_n) = (v_2 v_3 \cdots v_n)\frac{dv_1}{dx} + (v_1 v_3 \cdots v_n)\frac{dv_2}{dx} + \cdots$$
$$+ (v_1 v_2 \cdots v_{n-1})\frac{dv_n}{dx}.$$

La derivada del producto de n *funciones, siendo* n *un número finito, es igual a la suma de los* n *productos que se forman multiplicando la derivada de cada función por todas las otras funciones.*

36. Derivada de la potencia de una función, siendo el exponente constante. Si en el resultado obtenido en el artículo anterior, cada uno de los n factores es igual a v, se tiene

$$\frac{\frac{d}{dx}(v^n)}{v^n} = n\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$

VI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(v^n) = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}.$$

Cuando $v = x$ esto se convierte en

VI *a* $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$

En esta demostración **VI** hemos supuesto que n es número entero positivo. En el Artículo 65 se demostrará que esta fórmula es válida para cualquier valor de n, y nos serviremos desde ahora de este resultado general.

La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuído en una unidad y por la derivada de la función.

Esta regla se llama, a veces, *regla de potencias*.

37. Derivada de un cociente.

Sea $$y = \frac{u}{v}. \qquad (v \neq 0)$$

Según la regla general:

PRIMER PASO. $$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

SEGUNDO PASO. $$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

Aplicando los teoremas del Artículo 16:

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

VII $$\therefore \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

La derivada de un cociente de funciones es igual al producto del denominador por la derivada del numerador, menos el producto del numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Cuando el denominador es constante, basta poner $v = c$ en **VII**; esto da:

VII a
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

$$\left[\text{Puesto que } \frac{dv}{dx} = \frac{dc}{dx} = 0.\right]$$

Podemos también obtener **VII** a de **IV** como sigue:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}\frac{du}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{c}.$$

La derivada del cociente de una función dividida por una constante es igual a la derivada de la función dividida por la constante.

PROBLEMAS *

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = x^3$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$ Según VI a

2. $y = ax^4 - bx^2$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^4 - bx^2) = \frac{d}{dx}(ax^4) - \frac{d}{dx}(bx^2)$ según III

$= a\frac{d}{dx}(x^4) - b\frac{d}{dx}(x^2)$ según IV

$= 4ax^3 - 2bx.$ Según VI a

3. $y = x^{4/3} + 5$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{4/3}) + \frac{d}{dx}(5)$ según III

$= \frac{4}{3}x^{1/3}.$ Según VI a y I

* Mientras el estudiante aprende a derivar, debe recibir lección oral de derivación de funciones sencillas.

4. $y = \frac{3\,x^3}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{7\,x}{\sqrt[3]{x^4}} + 8\,\sqrt[7]{x^3}$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(3\,x^{13/5}) - \frac{d}{dx}\,(7\,x^{-1/3}) + \frac{d}{dx}\,(8\,x^{3/7})$ según III

$= {}^{39}\!/_5\,x^{8/5} + {}^{7}\!/_3\,x^{-4/3} + {}^{24}\!/_7\,x^{-4/7}$. Según IV y VI *a*

5. $y = (x^2 - 3)^5$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = 5\,(x^2 - 3)^4\,\frac{d}{dx}\,(x^2 - 3)$ según VI

$[v = x^2 - 3 \quad \text{y} \quad n = 5.]$

$= 5\,(x^2 - 3)^4 \cdot 2\,x = 10\,x\,(x^2 - 3)^4$

Es posible desarrollar esta función según la fórmula del binomio de Newton [(3), Art. 1] y entonces aplicar III, etc., pero el procedimiento aquí dado es preferible.

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(a^2 - x^2)^{1/2} = \frac{1}{2}\,(a^2 - x^2)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}\,(a^2 - x^2)$ según VI

$[v = a^2 - x^2 \quad \text{y} \quad n = 1/2\,.]$

$= \frac{1}{2}\,(a^2 - x^2)^{-1/2}\,(-2\,x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

7. $y = (3\,x^2 + 2)\sqrt{1 + 5\,x^2}$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = (3\,x^2 + 2)\,\frac{d}{dx}\,(1 + 5\,x^2)^{1/2} + (1 + 5\,x^2)^{1/2}\,\frac{d}{dx}\,(3\,x^2 + 2)$

según V

$[u = 3\,x^2 + 2 \quad \text{y} \quad v = (1 + 5\,x^2)^{1/2}.]$

$= (3\,x^2 + 2)\,\frac{1}{2}\,(1 + 5\,x^2)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}\,(1 + 5\,x^2) +$

$+ (1 + 5\,x^2)^{1/2}\,6\,x$ según VI, etc.

$= (3\,x^2 + 2)\,(1 + 5\,x^2)^{-1/2}\,5\,x + 6\,x\,(1 + 5\,x^2)^{1/2}$

$= \frac{5\,x\,(3\,x^2 + 2)}{\sqrt{1 + 5\,x^2}} + 6\,x\sqrt{1 + 5\,x^2} = \frac{45\,x^3 + 16\,x}{\sqrt{1 + 5\,x^2}}$.

8. $y = \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solución. $\frac{dy}{dx} = \frac{(a^2 - x^2)^{1/2}\,\frac{d}{dx}\,(a^2 + x^2) - (a^2 + x^2)\,\frac{d}{dx}\,(a^2 - x^2)^{1/2}}{a^2 - x^2}$

según VII

$= \frac{2\,x\,(a^2 - x^2) + x\,(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$

[Multiplicando numerador y denominador por $(a^2 - x^2)^{1/2}$.]

$= \frac{3\,a^2x - x^3}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$.

Comprobar cada una de las siguientes derivadas.

9. $\frac{d}{dx}(3x^4 - 2x^2 + 8) = 12x^3 - 4x.$

10. $\frac{d}{dx}(4 + 3x - 2x^3) = 3 - 6x^2.$

11. $\frac{d}{dt}(at^5 - 5bt^3) = 5at^4 - 15bt^2.$

12. $\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^7}{7}\right) = z - z^6.$

13. $\frac{d}{dx}\sqrt{v} = \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{dv}{dx}.$

14. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}.$

15. $\frac{d}{dt}(2t^{4/3} - 3t^{2/3}) = \frac{8}{3}t^{1/3} - 2t^{-1/3}.$

16. $\frac{d}{dx}(2x^{3/4} + 4x^{-1/4}) = \frac{3}{2}x^{-1/4} - x^{-5/4}.$

17. $\frac{d}{dx}(x^{2/3} - a^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$

18. $\frac{d}{dx}\left(\frac{a + bx + cx^2}{x}\right) = c - \frac{a}{x^2}.$

19. $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}.$

20. $s = \frac{a + bt + ct^2}{\sqrt{t}}.$ $\qquad \frac{ds}{dt} = -\frac{a}{2t\sqrt{t}} + \frac{b}{2\sqrt{t}} + \frac{3c\sqrt{t}}{2}.$

21. $y = \sqrt{ax} + \frac{a}{\sqrt{ax}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{ax}} - \frac{a}{2x\sqrt{ax}}.$

22. $r = \sqrt{1 - 2\theta}.$ $\qquad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2\theta}}.$

23. $f(t) = (2 - 3t^2)^3.$ $\qquad f'(t) = -18t(2 - 3t^2)^2.$

24. $F(x) = \sqrt[3]{4 - 9x}.$ $\qquad F'(x) = -\frac{3}{(4 - 9x)^{2/3}}.$

25. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$

26. $f(\theta) = (2 - 5\theta)^{3/5}.$ $\qquad f'(\theta) = -\frac{3}{(2 - 5\theta)^{2/5}}.$

27. $y = \left(a - \frac{b}{x}\right)^2.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2b}{x^2}\left(a - \frac{b}{x}\right).$

28. $y = \left(a + \frac{b}{x^2}\right)^3.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{6b}{x^3}\left(a + \frac{b}{x^2}\right)^2.$

29. $y = x\sqrt{a + bx}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2a + 3bx}{2\sqrt{a + bx}}.$

30. $s = t\sqrt{a^2 + t^2}.$ $\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{a^2 + 2t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}}.$

31. $y = \frac{a - x}{a + x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{2a}{(a + x)^2}.$

32. $y = \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{4a^2x}{(a^2 - x^2)^2}.$

33. $y = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}.$

34. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$

35. $r = \theta^2\sqrt{3 - 4\theta}.$ $\qquad \frac{dr}{d\theta} = \frac{6\theta - 10\theta^2}{\sqrt{3 - 4\theta}}.$

36. $y = \sqrt{\frac{1 - cx}{1 + cx}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{c}{(1 + cx)\sqrt{1 - c^2x^2}}.$

37. $y = \sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2a^2x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^4 - x^4}}.$

38. $s = \sqrt[3]{\frac{2 + 3t}{2 - 3t}}.$ $\qquad \frac{ds}{dt} = \frac{4}{(2 + 3t)^{2/3}\,(2 - 3t)^{4/3}}.$

39. $y = \sqrt{2px}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$

40. $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$

41. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}.$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}.$

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

42. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{3x}.$

43. $y = \frac{2 - x}{1 + 2x^2}.$

44. $y = \frac{x}{\sqrt{a - bx}}.$

45. $s = \frac{\sqrt{a + bt}}{t}.$

46. $r = \frac{\sqrt[3]{a + b\theta}}{\theta}.$

47. $y = x^2\sqrt{5 - 2x}.$

48. $y = x\sqrt[3]{2 + 3x}.$

49. $s = \sqrt{2t - \frac{1}{t^2}}.$

50. $y = (x + 2)^2\sqrt{x^2 + 2}.$

51. $y = \frac{\sqrt{1 + 2x}}{\sqrt[3]{1 + 3x}}.$

En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$ para el valor dado de x.

52. $y = (x^2 - x)^3; \quad x = 3.$ *Sol.* 540.

53. $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}; \quad x = 64.$ $\frac{1}{12}$.

54. $y = (2x)^{\frac{1}{3}} + (2x)^{\frac{2}{3}}; \quad x = 4.$ $\frac{5}{6}$.

55. $y = \sqrt{9 + 4x^2}; \quad x = 2.$ $\frac{8}{5}$.

56. $y = \frac{1}{\sqrt{25 - x^2}}; \quad x = 3.$ $\frac{3}{64}$.

57. $y = \frac{\sqrt{16 + 3x}}{x}; \quad x = 3.$ $-\frac{41}{90}$.

58. $y = x\sqrt{8 - x^2}; \quad x = 2.$ 0.

59. $y = x^2\sqrt{1 + x^3}; \quad x = 2.$ 20.

60. $y = (4 - x^2)^3; \quad x = 3.$

61. $y = \frac{x^2 + 2}{2 - x^2}; \quad x = 2.$

62. $y = \frac{\sqrt{5 - 2x}}{2x + 1}; \quad x = \frac{1}{2}.$

63. $y = x\sqrt{3 + 2x}; \quad x = 3.$

64. $y = \sqrt{\frac{4x + 1}{5x - 1}}; \quad x = 2.$

65. $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5}{10 - x^2}}; \quad x = 3.$

32. **Derivada de una función de función.** A veces acontece que y no se define directamente como función de x, sino que se da como función de otra variable v que se define como función de x. En este caso, y es función de x por intermedio de v, y se llama *función de función*.

Por ejemplo, si
$$y = \frac{2v}{1 - v^2}$$
y
$$v = 1 - x^2,$$

entonces y es una función de función. Eliminando v podemos expresar y directamente como función de x, pero, en general, este método no es el mejor cuando deseamos hallar $\frac{dy}{dx}$.

Si $y = f(v)$ y $v = \phi(x)$, decimos que y es función de x por intermedio de v. Entonces, si damos a x un incremento Δx, obtendremos para v un incremento Δv y para y un incremento correspondiente Δy. Teniendo esto en cuenta, apliquemos la regla general de derivación simultáneamente a las dos funciones

$$y = f(v) \quad \text{y} \quad v = \phi(x).$$

PRIMER PASO. $y+\Delta y=f(v+\Delta v) \qquad v+\Delta v=\phi(x+\Delta x)$.

SEGUNDO PASO.
$$\begin{array}{ll} y+\Delta y=f(v+\Delta v) & v+\Delta v=\phi(x+\Delta x) \\ y \qquad =f(v) & v \qquad =\phi(x) \\ \hline \Delta y=f(v+\Delta v)-f(v) & \Delta v=\phi(x+\Delta x)-\phi(x) \end{array}$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\frac{f(v+\Delta v)-f(v)}{\Delta v}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}.$$

Los miembros de la izquierda expresan la razón del incremento de cada función al incremento de la variable correspondiente, y los miembros de la derecha expresan las mismas razones en otra forma. Antes de pasar al límite, formemos el producto de las dos razones, tomando las formas de la izquierda. Resulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}, \text{ que es igual a } \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

En símbolos, $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

CUARTO PASO. Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, igualmente $\Delta v \rightarrow 0$. Pasando al límite, se obtiene:

(A) $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}. \qquad \text{Según (2), Art. 16}$$

Esta igualdad puede también escribirse en la forma:

(B) $$\frac{dy}{dx}=f'(v)\cdot\phi'(x).$$

Si y = f(v) *y* v = ϕ(x), *la derivada de* y *con respecto a* x *es igual al producto de la derivada de* y *con respecto a* v *por la derivada de* v *con respecto a* x.

39. Relación entre las derivadas de las funciones inversas. Sea una función y dada como función de x según la ecuación

$$y = f(x).$$

A menudo es posible, en el caso de las funciones que se consideran en este libro, resolver la ecuación con respecto a x y hallar

$$x = \phi(y);$$

es decir, podemos también considerar y como la variable independiente y x como la dependiente. En este caso se dice que $f(x)$ y $\phi(y)$

son *funciones inversas*. Cuando deseamos distinguir la una de la otra, es usual llamar *función directa* la que se dió al principio, y *función inversa* a la segunda. Así, en los ejemplos que siguen, si los segundos miembros en la primera columna se toman como las funciones directas, entonces los miembros correspondientes en la segunda serán respectivamente las *funciones inversas*.

$$y = x^2 + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y-1},$$

$$y = a^x, \qquad x = \log_a y.$$

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad x = \operatorname{arc\,sen} y.$$

Ahora derivemos las funciones inversas $y = f(x)$ y $x = \phi(y)$ simultáneamente según la regla general.

PRIMER PASO. $y+\Delta y = f(x+\Delta x) \qquad x+\Delta x=\phi(y+\Delta y).$

SEGUNDO PASO.

$$\begin{array}{ll} y+\Delta y = f(x+\Delta x) & x+\Delta x = \phi(y+\Delta y) \\ y \qquad = f(x) & x \qquad = \phi(y) \\ \hline \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) & \Delta x = \phi(y+\Delta y) - \phi(y). \end{array}$$

TERCER PASO. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{\phi(y+\Delta y)-\phi(y)}{\Delta y}.$

Multiplicando estas razones, tomando las formas de la izquierda, tenemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\,\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1,$$

o sea,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

CUARTO PASO. Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, entonces, en general, también $\Delta y \rightarrow 0$. Pasando al límite,

$$(C) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}, \qquad \text{según (3), Art. 16}$$

$$(D) \qquad f'(x) = \frac{1}{\phi'(y)}.$$

La derivada de la función inversa es igual al recíproco de la derivada de la función directa.

40. Funciones implícitas. Cuando se da una relación entre x y y por medio de una ecuación no resuelta para y, entonces y se llama *función implícita* de x. Por ejemplo, la ecuación

$$(1) \qquad x^2 - 4y = 0$$

define y como función implícita de x. Es claro que por medio de esta ecuación x se define igualmente como función implícita de y.

A veces es posible resolver la ecuación que define una función implícita con respecto a una de las variables, obteniendo así una *función explícita*. Así, por ejemplo, la ecuación (1) puede resolverse con respecto a y, obteniéndose

$$y = \frac{1}{4}x^2,$$

donde aparece y como función explícita de x. En un caso dado, sin embargo, puede ocurrir que semejante resolución sea imposible, o demasiado complicada para una aplicación cómoda.

41. Derivación de funciones implícitas. Cuando y se define como función implícita de x, puede no ser conveniente (como hemos dicho en el artículo anterior) el resolver la ecuación para obtener y como función explícita de x, o x como función explícita de y.

Entonces para calcular la derivada seguimos la siguiente regla:

Derivar la ecuación, término a término, considerando y *como función de* x, *y de la ecuación resultante despejar* $\frac{dy}{dx}$.

La justificación de este método se dará en el Artículo 231. En la derivada pueden sustituirse solamente los valores correspondientes de x y y que satisfacen a la ecuación dada.

Apliquemos esta regla en hallar $\frac{dy}{dx}$ en la función

$$ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10.$$

Tendremos:

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10);$$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7xy^6\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$(2x^3 - 7xy^6)\frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y;$$

y despejando $\frac{dy}{dx}$, resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6\,ax^5 - 6\,x^2y}{2\,x^3 - 7\,xy^6}.$$

El estudiante debe notar que, en general, el resultado contendrá tanto a x como a y.

PROBLEMAS

Hallar $\frac{dy}{dx}$ para cada una de las funciones siguientes:

1. $y = u^6, \quad u = 1 + 2\sqrt{x}$. *Sol.* $\frac{dy}{dx} = \frac{6\,u^5}{\sqrt{x}}$.

2. $y = \sqrt{2\,u} - u^2, \quad u = x^3 - x$. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\,u}} - 2\,u\right)(3\,x^2 - 1)$.

3. $y = \frac{a - u}{a + u}, \quad u = \frac{b - x}{b + x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\,ab}{(a + u)^2\,(b + x)^2}$.

4. $y = u\sqrt{a^2 - u^2}, \quad u = \sqrt{1 - x^2}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\,(2\,u^2 - a^2)}{\sqrt{(a^2 - u^2)\,(1 - x^2)}}$.

5. $15\,x = 15\,y + 5\,y^3 + 3\,y^5$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + y^2 + y^4}$.

6. $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{6\,y^{2/3}}{3\,y^{1/6} + 2}$.

7. $y^2 = 2\,px$.
8. $x^2 + y^2 = r^2$.
9. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.
11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
12. $x^3 - 3\,axy + y^3 = 0$.
13. $x^3 + 3\,x^2y + y^3 = c^3$.
14. $x + 2\sqrt{xy} + y = a$.
15. $x^2 + a\sqrt{xy} + y^2 = b^2$.
16. $x^4 + 4\,x^3y + y^4 = 20$.
17. $ax^3 - 3\,b^2xy + cy^3 = 1$.
18. $\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{\frac{x}{y}} = 6$.

Hallar la pendiente de cada una de las siguientes curvas en el punto dado.

19. $x^2 + xy + 2\,y^2 = 28$; $(2,\ 3)$. *Sol.* $-\frac{1}{2}$.
20. $x^3 - 3\,xy^2 + y^3 = 1$; $(2,\ -1)$. $-\frac{3}{5}$.
21. $\sqrt{2\,x} + \sqrt{3\,y} = 5$; $(2,\ 3)$.
22. $x^2 - 2\sqrt{xy} - y^2 = 52$; $(8,\ 2)$.
23. $x^3 - axy + 3\,ay^2 = 3\,a^3$; $(a,\ a)$.
24. $x^2 - x\sqrt{xy} - 2\,y^2 = 6$; $(4,\ 1)$.

25. Demostrar que las parabolas $y^2 = 2\ px + p^2$ y $y^2 = p^2 - 2\ px$ se cortan en ángulo recto.

26. Demostrar que las circunferencias $x^2 + y^2 - 12\ x - 6\ y + 25 = 0$ y $x^2 + y^2 + 2\ x + y = 10$ son tangentes en el punto $(2,\ 1)$.

27. ¿Bajo qué ángulo corta la recta $y = 2\ x$ a la curva $x^2 - xy + 2\ y^2 = 28$?

28. Si $f(x)$ y $\phi(y)$ son funciones inversas, demostrar que la gráfica de $\phi(x)$ puede dibujarse construyendo la gráfica de $-f(x)$ y haciendo girar ésta a la izquierda 90° alrededor del origen.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. El vértice de la parábola $y^2 = 2\ px$ es el centro de una elipse. El foco de la parábola es un extremo de uno de los ejes principales de la elipse, y la parábola y la elipse se cortan en ángulo recto. Hallar la ecuación de la elipse.

Sol. $4\ x^2 + 2\ y^2 = p^2$.

2. Se traza un círculo de centro $(2\ a,\ 0)$ con un radio tal que el círculo corta en ángulo recto a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hallar el radio.

Sol. $r^2 = \frac{3}{4}(3\ a^2 + b^2)$.

3. Se une un punto cualquiera P de una elipse con los focos. Demostrar que estas rectas forman con la normal a la curva en P ángulos agudos iguales.

4. Demostrar que la recta $Bx + Ay = AB$ es tangente a la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

únicamente si se verifica que $B^2a^2 + A^2b^2 = A^2B^2$.

5. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x^m y^n = a^{m+n}$ en un punto cualquiera. Demostrar que la parte de tangente comprendida entre los ejes queda dividida en la razón $\frac{m}{n}$ por el punto de contacto.

Sol. $my_1(x - x_1) + nx_1(y - y_1) = 0$.

6. Si k es la pendiente de una tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que su ecuación es $y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}$, y que el lugar geométrico de los puntos de intersección de las tangentes perpendiculares está dado por la ecuación $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.

CAPITULO V

APLICACIONES DE LA DERIVADA

42. Dirección de una curva. Se ha demostrado en el Artículo 28 que si

$$y = f(x)$$

es la ecuación de una curva (fig. 8), entonces

$$\frac{dy}{dx} = \textbf{pendiente de la tangente a la curva en } P(x,\, y).$$

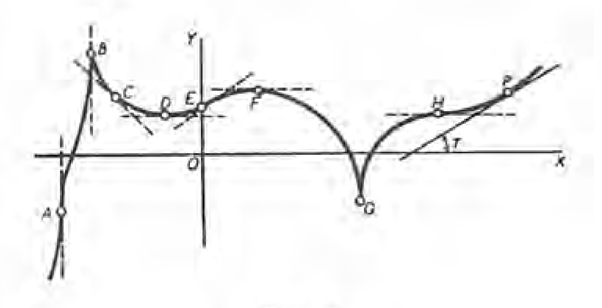


Fig. 8

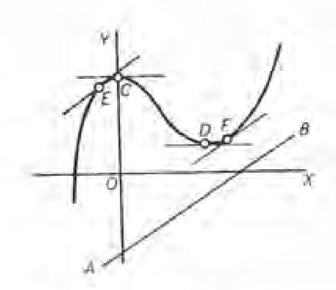


Fig. 9

La *dirección de una curva* en cualquier punto se define como la dirección de la tangente a la curva en este punto. Sea τ = inclinación de la tangente. Entonces la pendiente = tg τ, y

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\tau = \textbf{pendiente de la curva en cualquier punto } P(x,\, y).$$

En los puntos como D, F, H, donde la dirección de la curva es paralela al eje de las x y *la tangente es horizontal*, se tiene

$$\tau = 0\,; \text{ luego } \frac{dy}{dx} = 0.$$

En los puntos como A, B, G, donde la dirección de la curva es perpendicular al eje de las x y *la tangente es vertical*, se tiene

$$\tau = 90^\circ\text{; } \textit{luego } \frac{dy}{dx} \textit{ se hace infinita.}$$

EJEMPLO 1. Dada la curva $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2$ (fig. 9), hallar:

a) La inclinación τ cuando $x = 1$.

b) El ángulo τ cuando $x = 3$.

c) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a OX.

d) Los puntos donde $\tau = 45^\circ$.

e) Los puntos donde la dirección de la curva es paralela a la recta

$$2x - 3y = 6 \text{ (recta } AB\text{)}.$$

Solución. Derivando, $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x = \operatorname{tg} \tau$.

a) Cuando $x = 1$, $\operatorname{tg} \tau = 1 - 2 = -1$; luego $\tau = 135^\circ$.

b) Cuando $x = 3$, $\operatorname{tg} \tau = 9 - 6 = 3$; luego $\tau = 71^\circ 34'$.

c) Cuando $\tau = 0$, $\operatorname{tg} \tau = 0$; luego $x^2 - 2x = 0$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos $x = 0$ ó 2. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva, hallamos $y = 2$ cuando $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$ cuando $x = 2$. Por tanto, las tangentes en $C(0, 2)$ y $D\left(2, \frac{2}{3}\right)$ son paralelas al eje OX.

d) Cuando $\tau = 45^\circ$, $\operatorname{tg} \tau = 1$, luego $x^2 - 2x = 1$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos $x = 1 \pm \sqrt{2} = 2.41$ y -0.41, que corresponden a los dos puntos donde la pendiente de la curva (o de la tangente) es la unidad.

e) Pendiente de la recta dada $= \frac{2}{3}$; luego $x^2 - 2x = \frac{2}{3}$. Resolviendo, obtenemos $x = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}} = 2{,}29$ y $-0{,}29$, que son las abscisas de los puntos F y E donde la dirección de la curva dada (o de la tangente) es paralela a la recta AB.

Puesto que una curva tiene en cualquier punto la misma dirección que su tangente en este punto, el ángulo de dos curvas en un punto común será el ángulo formado por las tangentes en dicho punto.

EJEMPLO 2. Hallar el ángulo de intersección de las circunferencias

(A) $x^2 + y^2 - 4x = 1$.

(B) $x^2 + y^2 - 2y = 9$.

Solución. Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones hallamos que los puntos de intersección son $(3, 2)$ y $(1, -2)$.

Sea m_1 = pendiente de la tangente al círculo A en (x, y),

y m_2 = pendiente de la tangente al círculo B en (x, y),

Entonces de (A) resulta $\quad m_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{2-x}{y}$, según el Artículo 41

y de (B) $\quad m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{1-y}$. Según el Artículo 41

Sustituyendo $x = 3$, $y = 2$, tenemos:

$$m_1 = -\tfrac{1}{2} = \text{pendiente de la tangente a } (A) \text{ en } (3,\ 2).$$
$$m_2 = -3 = \text{pendiente de la tangente a } (B) \text{ en } (3,\ 2).$$

La fórmula para hallar el ángulo θ entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2 es, según (2) del Artículo 3,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Sustituyendo, $\quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2} + 3}{1 + \frac{3}{2}} = 1; \quad \therefore \quad \theta = 45°.$

Este es también el ángulo de las dos circunferencias en el punto $(1,\ -2)$.

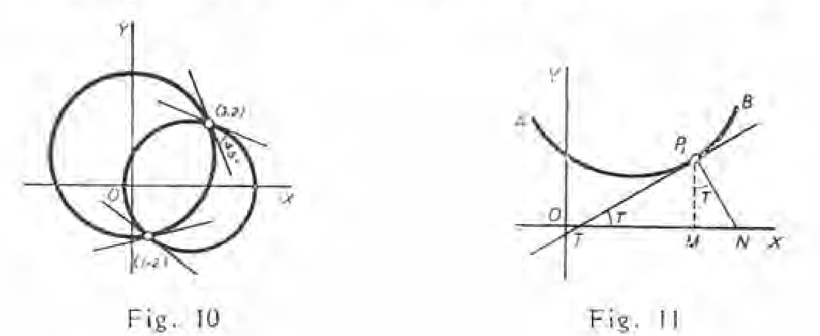


Fig. 10 Fig. 11

43. Ecuaciones de la tangente y la normal; longitudes de la subtangente y la subnormal. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_1,\ y_1)$ y tiene de pendiente m es, según (3) del Artículo 3,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si esta recta es tangente a la curva AB (fig. 11) en el punto $P_1(x_1\ y_1)$, entonces m es igual a la pendiente de la curva en $(x_1,\ y_1)$. Si representamos este valor de m por m_1, la *ecuación de la tangente* TP_1, siendo $P_1(x_1,\ x_1)$ el punto de contacto, será

$$(1) \qquad y - y_1 = m_1(x - x_1).$$

Siendo la normal perpendicular a la tangente, su pendiente es, según (2) del Artículo 3, el valor negativamente recíproco de m_1. Y puesto que también pasa por el punto de contacto $P_1(x_1,\ y_1)$, tenemos, como *ecuación de la normal* P_1N:

$$(2) \qquad y - y_1 = -\frac{1}{m_1}(x - x_1).$$

La porción de tangente comprendida entre el punto de contacto y OX (fig. 11) se llama *longitud de la tangente* $(= TP_1)$, y su proyección sobre el eje de las x se llama *longitud de la subtangente* $(= TM)$. Asimismo tenemos la *longitud de la normal* $(= P_1N)$ y la *longitud de la subnormal* $(= MN)$.

En el triángulo TP_1M, $\operatorname{tg} \tau = m_1 = \dfrac{MP_1}{TM}$; luego:

$$(3) \qquad TM\,^* = \frac{MP_1}{m_1} = \frac{y_1}{m_1} = \text{longitud de la subtangente.}$$

En el triángulo MP_1N, $\operatorname{tg} \tau = m_1 = \dfrac{MN}{MP_1}$; luego:

$$(4) \qquad MN\,^* = m_1 MP_1 = m_1 y_1 = \text{longitud de la subnormal.}$$

La longitud de la tangente (TP_1) y la longitud de la normal (P_1N) pueden calcularse observando en la figura 11 que una y otra son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son conocidos.

Cuando se ha determinado la longitud de la subtangente o de la subnormal en un punto de una curva, la tangente y la normal se construyen fácilmente.

PROBLEMAS

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal y las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal en el punto (a, a) de la cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ (fig. 12).

Solución. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3ax^2 - x^3}{y(2a - x)^2}$.

Sustituyendo $x = a$, $y = a$, tenemos

$$m_1 = \frac{3a^3 - a^3}{a(2a - a)^2} = 2 = \text{pendiente de la tangente.}$$

Sustituyendo en (1), se obtiene

$$y = 2x - a, \quad \text{ecuación de la tangente.}$$

Sustituyendo en (2), se obtiene

$$2y + x = 3a, \quad \text{ecuación de la normal.}$$



Fig. 12

Sustituyendo en (3), resulta $TM = \dfrac{a}{2}$ = longitud de la subtangente.

Sustituyendo en (4), resulta $MN = 2a$ = longitud de la subnormal.

---

* Si la subtangente se extiende a la derecha de T, la consideramos como positiva; si a la izquierda, negativa. Si la subnormal se extiende a la derecha de M, la consideramos como positiva; si a la izquierda, negativa.

Asimismo, $PT = \sqrt{(TM)^2 + (MP)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$ = longitud de la tangente

y $PN = \sqrt{(MN)^2 + (MP)^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ = longitud de la normal

Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las curvas siguientes en el punto dado.

2. $y = x^3 - 3x$; $(2, 2)$. *Sol.* $9x - y - 16 = 0$, $x + 9y - 20 = 0$.

3. $y = \frac{2x + 1}{3 - x}$; $(2, 5)$. $7x - y - 9 = 0$, $x + 7y - 37 = 0$.

4. $2x^2 - xy + y^2 = 16$; $(3, 2)$.

5. $y^2 + 2y - 4x + 4 = 0$; $(1, -2)$.

6. Obtener las ecuaciones de la tangente y de la normal en (x_1, y_1) a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Sol. $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, $a^2y_1x - b^2x_1y = x_1y_1(a^2 - b^2)$.

7. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal, y las longitudes de la subtangente y la subnormal, en el punto (x_1, y_1) de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Sol. $x_1x + y_1y = r^2$, $x_1y - y_1x = 0$, $-\frac{y_1^2}{x_1}$, $-x_1$.

8. Demostrar que la subtangente de la parábola $y^2 = 2px$ es bisecada por el vértice, y que la subnormal es constante e igual a p.

Obtener las ecuaciones de la tangente y la normal, y las longitudes de la subtangente y la subnormal de cada una de las siguientes curvas en los puntos indicados.

9. $ay = x^2$; (a, a). *Sol.* $2x - y = a$, $x + 2y = 3a$, $\frac{a}{2}$, $2a$.

10. $x^2 - 4y^2 = 9$; $(5, 2)$. $5x - 8y = 9$, $8x + 5y = 50$, $\frac{16}{5}$, $\frac{5}{4}$.

11. $9x^2 + 4y^2 = 72$; $(2, 3)$.

12. $xy + y^2 + 2 = 0$; $(3, -2)$.

13. Calcular el área del triángulo que forman el eje de las x, y la tangente y la normal a la curva $y = 6x - x^2$ en el punto $(5, 5)$. *Sol.* $^{425}/_{8}$.

14. Hallar el área del triángulo que forman el eje de las y, y la tangente y la normal a la curva $y^2 = 9 - x$ en el punto $(5, 2)$.

Hallar los ángulos de intersección de cada uno de los siguientes pares de curvas.

15. $y^2 = x + 1$, $x^2 + y^2 = 13$. *Sol.* $109° 39'$.

16. $y = 6 - x^2$, $7x^2 + y^2 = 32$.

Sol. En $(\pm 2, 2)$, $5° 54'$; en $(\pm 1, 5)$, $8° 58'$.

17. $y = x^2$, $y^2 - 3y = 2x$.

18. $x^2 + 4y^2 = 61$, $2x^2 - y^2 = 41$.

Hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales de cada una de las siguientes curvas.

19. $y = 5x - 2x^2$. *Sol.* Horizontal, $(\frac{5}{4}, \frac{25}{8})$.

20. $3y^2 - 6y - x = 0$. Vertical, $(-3, 1)$.

21. $x^2 + 6xy + 25y^2 = 16$. Horizontal, $(3, -1)$, $(-3, 4)$.
Vertical, $(5, -\frac{3}{5})$, $(-5, \frac{3}{5})$.

22. $x^2 - 8xy + 25y^2 = 81$.

23. $x^2 - 24xy + 169y^2 = 25$.

24. $169x^2 + 10xy + y^2 = 144$.

25. Demostrar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ y la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ se cortan en ángulos rectos.

26. Demostrar que el circulo $x^2 + y^2 = 8ax$ y la cisoide $(2a - x)y^2 = x^3$

a) son perpendiculares en el origen;

b) se cortan en ángulo de 45° en otros dos puntos. (Véase la figura en el Capitulo XXVI.)

27. Demostrar que las tangentes a la hoja de Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$ en los puntos de intersección con la parábola $y^2 = ax$ son paralelas al eje de las y. (Véase la figura en el Capitulo XXVI.)

28. Hallar la ecuación de la normal a la parábola $y = 5x + x^2$ que forma un ángulo de 45° con el eje de las x.

29. Hallar las ecuaciones de las tangentes al circulo $x^2 + y^2 = 58$ que son paralelas a la recta $3x - 7y = 19$.

30. Hallar las ecuaciones de las normales a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 36$, paralelas a la recta $2x + 5y = 4$.

31. Hallar las ecuaciones de las dos tangentes a la elipse $4x^2 + y^2 = 72$ que pasan por el punto $(4, 4)$. *Sol.* $2x + y = 12$, $14x + y = 60$.

32. Demostrar que la suma de las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes coordenados de la tangente en un punto cualquiera a la parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ es constante e igual a a. (Véase la figura en el Capitulo XXVI.)

33. Demostrar que en la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ la porción de la tangente en un punto cualquiera limitada por los ejes coordenados, es constante e igual a a. (Véase la figura en el Capítulo XXVI.)

34. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = x - \frac{x^2}{100}$, siendo la unidad de distancia un metro, el eje de las x horizontal y el origen el punto desde el cual se lanza la pelota. a) ¿Con qué ángulo se lanza la pelota? b) ¿Con qué ángulo dará la pelota contra una pared vertical, situada a 75 m del punto de partida? c) Si la pelota cae en una azotea horizontal de 16 m de alto, ¿con qué ángulo dará en la azotea? d) Si la pelota se ha lanzado desde la azotea de un edificio de 24 m de alto, con qué ángulo dará en el suelo? e) Si se ha lanzado desde la cumbre de una cuesta, inclinada hacia abajo en ángulo de 45°, ¿con qué ángulo dará en el suelo?

35. El cable de un puente colgante (fig. 13) tiene la forma de una parábola y está amarrado a dos columnas que distan 60 m la una de la otra. El punto más bajo del cable es 12 m debajo de los puntos de suspensión. Hallar el ángulo entre el cable y las columnas.

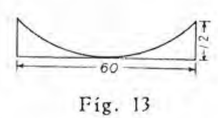


Fig. 13

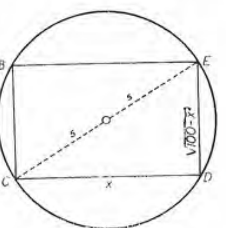


Fig. 14

44. Valores máximo y mínimo de una función; introducción. Entre los valores de una función puede haber uno que sea más grande (máximo) o más pequeño (mínimo) que los demás.* En muchísimos problemas prácticos importa saber a qué valor de la variable corresponde tal valor de la función.

Supongamos, por ejemplo, que se desea hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de 5 cm de radio. Consideremos el círculo de la figura 14. Inscribamos un rectángulo cualquiera, como $BCDE$.

Sea $CD = x$; entonces $DE = \sqrt{100 - x^2}$, y evidentemente, el área del rectángulo es

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2}.$$

Debe existir un rectángulo de área máxima; en efecto, si la base CD $(= x)$ se aumenta hasta 10 cm (el diámetro), entonces la altura $DE = \sqrt{100 - x^2}$ disminuirá hasta cero, y el área llegará a ser cero. Si ahora se disminuye la base hasta cero, entonces la altura aumentará hasta 10 cm y otra vez el área llegará a ser cero. Luego es evidente, por intuición, que existe un rectángulo que es el mayor de todos. Estudiando la figura con atención podríamos sospechar que cuando el rectángulo se convierte en un cuadrado es cuando tiene mayor área, pero esto sería una simple conjetura. Evidentemente es mejor construir la gráfica de la función (1) y observar cómo se comporta. Para ayudarnos a trazar la gráfica observemos:

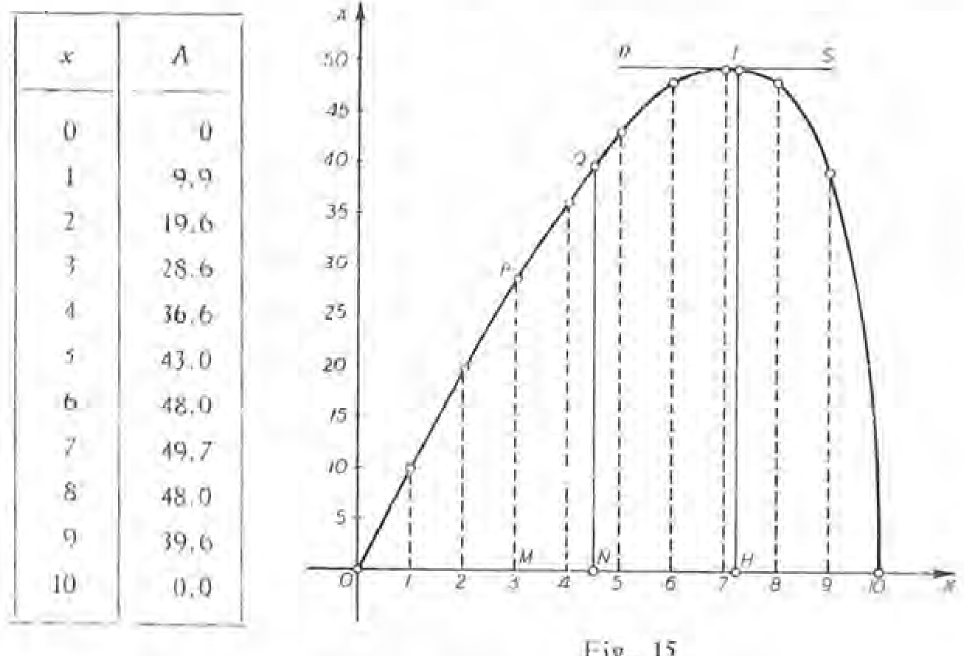
a) que por la naturaleza del problema es evidente que x y A deben ser positivos, y

b) que los valores de x varían de cero a 10.

---

* Más adelante, en el Artículo 48, estudiaremos una ampliación del concepto de máximos y mínimos, de los cuales una función puede presentar varios de ellos.

Construyamos ahora una tabla de valores y tracemos la gráfica, tal como se indica en la figura 15.



x	A
0	0
1	9,9
2	19,6
3	28,6
4	36,6
5	43,0
6	48,0
7	49,7
8	48,0
9	39,6
10	0,0

Fig. 15

¿Qué nos enseña la gráfica?

a) Si se ha trazado con todo cuidado, podemos hallar con bastante exactitud el área del rectángulo que corresponde a todo valor de x midiendo la longitud de la ordenada correspondiente. Así,

cuando $x = OM = 3$ cm,
$A = MP = 28{,}6$ cm^2,
y cuando $x = ON = 4{,}5$ cm,
$A = NQ = 39{,}8$ cm^2 aproximadamente (hallado por medición).

b) Hay una tangente horizontal (RS). La ordenada TH de su punto de contacto es mayor que toda otra ordenada. Por esto observamos: *Uno de los rectángulos inscritos tiene, evidentemente, una área mayor que cualquiera de los otros*. En otros términos, podemos deducir de esto que la función definida por (1) tiene un *valor máximo*. No podemos por medición hallar con exactitud este valor ($= HT$), ni el valor de x correspondiente ($= OH$), pero mediante el Cálculo diferencial es facilísimo hacerlo. En efecto, hemos observado que en T la tangente era horizontal; luego la pendiente será cero en este punto (Art. 42). Por tanto, para hallar la abscisa de T, hallaremos a partir

de (1) la derivada de A con respecto a x, la igualaremos a cero y resolveremos la ecuación en x así obtenida. Tendremos:

$$(1) \qquad A = x\sqrt{100 - x^2},$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0.$$

Resolviendo la ecuación se obtiene

$$x = 5\sqrt{2}.$$

Sustituyendo, obtenemos $DE = \sqrt{100 - x^2} = 5\sqrt{2}$.

Luego el rectángulo de área máxima inscrito en el círculo de radio 5 cm, es un cuadrado de área

$$A = CD \times DE = 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

Por tanto, la longitud de HT es 50.

Tomemos otro ejemplo. Se ha de construir una caja de madera de base cuadrada de 108 dm³ de capacidad. La parte de arriba debe ser abierta. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que la cantidad de material empleada en su construcción sea mínima?, es decir, ¿qué dimensiones exigirán el menor costo?

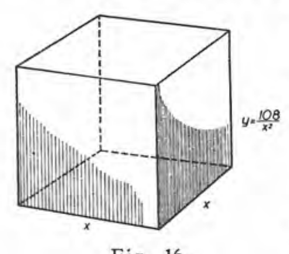


Fig. 16

Sean x = longitud del lado de la base en decímetros,

y $\qquad y$ = altura de la caja.

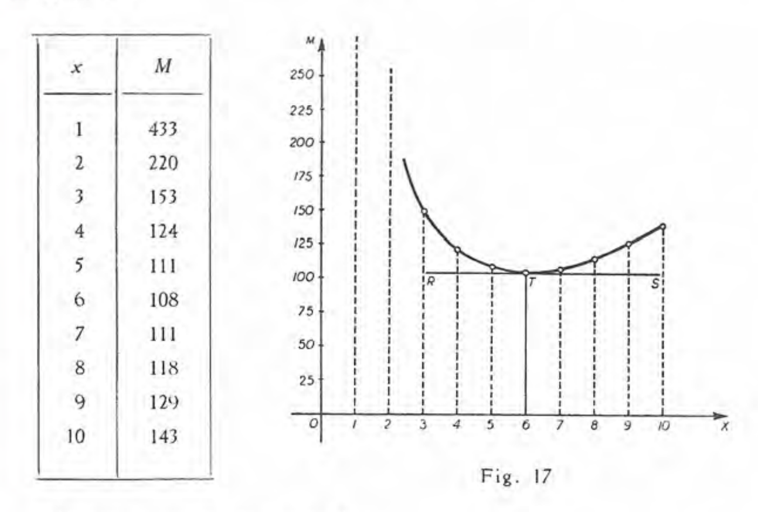
Vemos que hay dos variables, pero puede hallarse y en función de x, puesto que el volumen de la caja es dado. Así,

$$\text{Volumen} = x^2y = 108; \qquad \therefore \quad y = \frac{108}{x^2}.$$

Ahora podemos expresar en función de x el número $(= M)$ de decímetros cuadrados de madera que entran en la construcción de la caja como sigue: El área de la base $= x^2$ dm²; el área de las cuatro caras laterales $= 4\,xy = \frac{432}{x}$ dm². Luego:

$$(2) \qquad M = x^2 + \frac{432}{x},$$

es la fórmula que da el número de decímetros cuadrados que se necesitan para construir una caja cualquiera semejante a la deseada y con capacidad de 108 dm³. Trácese una gráfica de (2), como se indica en la figura 17.



x	M
1	433
2	220
3	153
4	124
5	111
6	108
7	111
8	118
9	129
10	143

Fig. 17

¿Qué nos enseña la gráfica?

a) Si se ha trazado esmeradamente, podemos medir la ordenada que corresponde a cualquier longitud ($= x$) del lado de la base cuadrada y así determinar el número necesario de decímetros cuadrados de madera.

b) Hay una tangente horizontal (RS). La ordenada de su punto de contacto T es menor que toda otra ordenada. Por esto observamos: *Una de las cajas necesita evidentemente menos madera que cualquiera de las otras*. En otros términos, podemos inferir que la función definida por (2) tiene un *valor mínimo*. Hallemos este punto de la gráfica con exactitud, empleando el Cálculo diferencial. Derivando (2) para obtener la pendiente en un punto cualquiera, tenemos

$$\frac{dM}{dx} = 2\,x - \frac{432}{x^2}.$$

En el punto más bajo, T, la pendiente será cero. Luego

$$2\,x - \frac{432}{x^2} = 0.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene que para $x = 6$ se necesitará la menor cantidad de madera.

Sustituyendo en (2), vemos que esta cantidad es

$$M = 108 \text{ dm}^2 = 1{,}08 \text{ m}^2.$$

La existencia de un valor de M menor que todos los demás, se deduce también del siguiente razonamiento. Hagamos variar la base desde un cuadrado muy pequeño a uno muy grande. Es fácil ver que al dividir por 10 el lado de la base hay que multiplicar por 100 la altura de la caja para obtener el mismo volumen, y, por consiguiente, el área de las caras laterales se hará muy grande y se necesitará mucho material para la construcción. Recíprocamente, si se disminuye la altura, es decir, si se aumenta el lado de la base, el área llega a ser muy grande y el material empleado también muy grande. Luego, tanto si x es muy grande como si es muy pequeño, el valor de M será mucho mayor que para un valor mediano de x. De ahí se sigue que la gráfica debe tener un punto, el más bajo de todos, que corresponda a las dimensiones que necesitan la menor cantidad de madera y que, por esto, exigen el menor costo.

Ahora pasemos a tratar detalladamente el tema de máximos y mínimos.

45. Funciones crecientes y decrecientes. * Una función $y = f(x)$ se llama *función creciente* si y aumenta (algebraicamente) cuando x aumenta. Una función $y = f(x)$ se llama *función decreciente* si y disminuye (algebraicamente) cuando x aumenta.

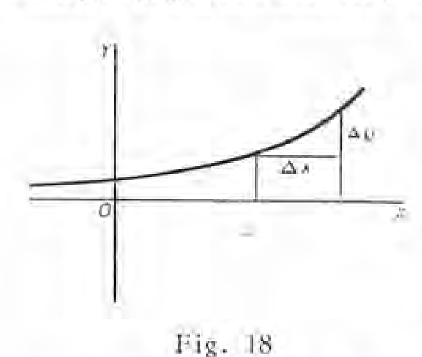


Fig. 18

La gráfica de una función indica claramente si es creciente o decreciente. Por ejemplo, consideremos la gráfica de la figura 18.

Al variar un punto a lo largo de la curva de izquierda a derecha, la curva "sube"; es decir, a medida que la x del punto aumenta, la función $(= y)$ aumenta. Evidentemente, Δy y Δx tienen un mismo signo.

Por otra parte, en la gráfica de la figura 19, si el punto se mueve a lo largo de la curva de izquierda a derecha, la curva "baja"; es

* Las demostraciones que se dan aquí se apoyan principalmente en intuición geométrica. El tema de máximos y mínimos se tratará analíticamente en el Artículo 125.

decir, a medida que la x del punto aumenta, la función $(= y)$ disminuye siempre. Claramente, en este caso Δy y Δx tienen signos opuestos.

El hecho de que una función puede ser unas veces creciente y otras decreciente, puede verse en la gráfica (fig. 20) de la curva

$$(1) \qquad y = 2\,x^3 - 9\,x^2 + 12\,x - 3.$$

Si un punto se mueve a lo largo de la curva de izquierda a derecha,

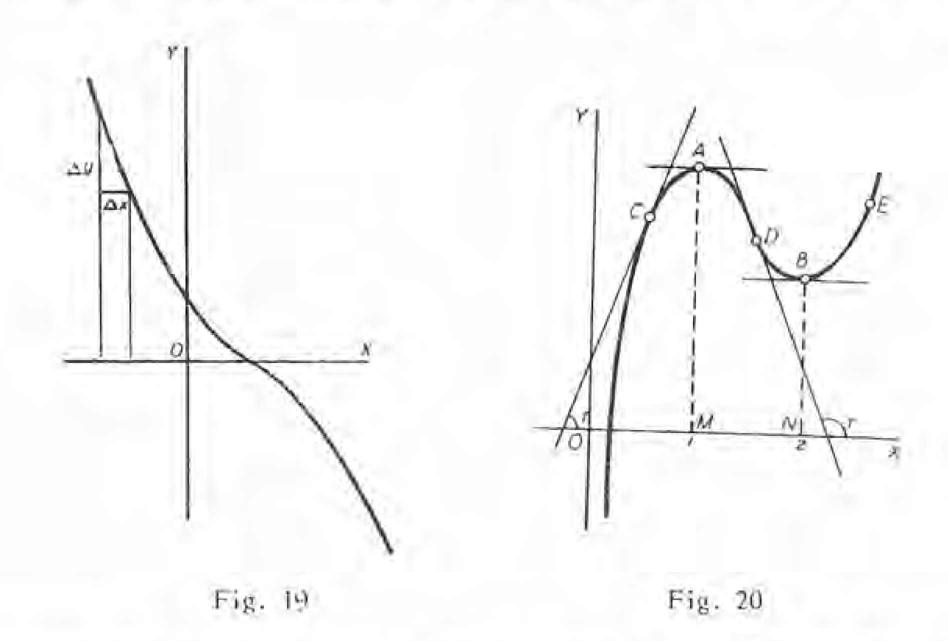


Fig. 19 Fig. 20

la curva sube hasta llegar al punto A, baja desde A hasta B y sube a la derecha de B. Luego:

a) *desde* x = $-\infty$ *hasta* x = 1 *la función es creciente;*

b) *desde* x = 1 *hasta* x = 2 *la función es decreciente;*

c) *desde* x = 2 *hasta* x = $+\infty$ *la función es creciente.*

En cualquier punto (como C) donde la función es creciente, la tangente forma un ángulo agudo con el eje de las x. La pendiente es positiva. Por otra parte, en un punto (como D) donde la función es decreciente, la tangente forma un ángulo obtuso con el eje de las x, y la pendiente es negativa. De aquí resulta el siguiente criterio para averiguar el carácter creciente o decreciente en un punto:

Una función es creciente cuando su derivada es positiva; es decreciente cuando su derivada es negativa.

Por ejemplo, derivando (1), tenemos

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = f'(x) = 6\,x^2 - 18\,x + 12 = 6(x-1)\,(x-2).$$

Cuando $x < 1$, $f'(x)$ es positiva, y $f(x)$ es creciente.

Cuando $1 < x < 2$, $f'(x)$ es negativa, y $f(x)$ es decreciente

Cuando $x > 2$, $f'(x)$ es positiva, y $f(x)$ es creciente.

Estos resultados concuerdan con las conclusiones deducidas con ayuda de la gráfica (fig. 21).

46. Máximos y mínimos de una función; definiciones. Un valor de una función es un *máximo* si es *mayor* que cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente. Un valor de una función es un *mínimo* si es *menor* que uno cualquiera de los valores que le anteceden o le siguen inmediatamente.

Por ejemplo, en la figura 21, es evidente que la función tiene un valor máximo MA $(= y = 2)$ cuando $x = 1$, y un valor mínimo NB $(= y = 1)$ cuando $x = 2$.

El estudiante observará que un máximo, así definido, *no es, necesariamente, el mayor valor posible de una función*, ni un mínimo *tiene que ser el menor de todos.* * En efecto, en la figura 21 se ve que la función $(= y)$ tiene valores a la derecha de B que son mayores que el máximo MA, y valores a la izquierda de A que son menores que el mínimo NB.

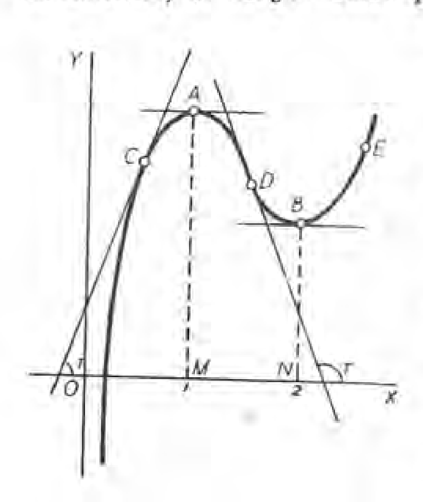


Fig. 21

Si $f(x)$ es una función creciente de x cuando x es ligeramente menor que a, pero es una función decreciente de x cuando x es ligeramente mayor que a, es decir, si $f'(x)$ cambia de signo pasando de $+$ a $-$ al aumentar x a través de a, entonces $f(x)$ tiene un máximo cuando $x = a$. Luego, si $f'(x)$ es continua, debe anularse cuando $x = a$.

Así, en el ejemplo anterior (fig. 21) en C, $f'(x)$ es positiva; en A, $f'(x) = 0$; en D, $f'(x)$ es negativa.

---

* N. del T. Por esto algunos autores les llaman *relativos* a estos máximos y mínimos.

Por otra parte, si $f(x)$ es una función decreciente cuando x es ligeramente menor que a, pero es una función creciente cuando x es ligeramente mayor que a; es decir, si $f'(x)$ cambia de signo pasando de $-$ a $+$ al aumentar x a través de a, entonces $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = a$. Luego, si $f'(x)$ es continua debe anularse cuando $x = a$.

Así, en la figura 21, en D, $f'(x)$ es negativa; en B, $f'(x) = 0$; en E, $f'(x)$ es positiva.

Podemos formular, pues, las condiciones generales siguientes para máximos y mínimos de $f(x)$:

$f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ cambia de signo pasando de $+$ a $-$.

$f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f'(x)$ cambia de signo pasando de $-$ a $+$.

Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$ se llaman **valores críticos**; así, según (2) del Artículo 45, $x = 1$ y $x = 2$ son los valores críticos de la variable para la función cuya gráfica es la figura 21. Los valores críticos determinan *puntos de cambio* donde la tangente es paralela a OX.

Para determinar el signo de la primera derivada * en puntos vecinos a un punto de cambio, basta sustituir en ella en primer lugar un valor de la variable ligeramente menor que el valor crítico correspondiente, y después un valor ligeramente mayor.

Si el primer signo es $+$ y el segundo $-$, entonces la función tiene un máximo para el valor crítico que se considera. Si el primer signo es $-$ y el segundo $+$, entonces la función tiene un mínimo. Si el signo es el mismo en ambos casos, entonces la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico que se considera.

Consideremos, por ejemplo, la función (1) del Artículo 45.

(1) $$y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3.$$

Según vimos,

(2) $$f'(x) = 6(x - 1)(x - 2).$$

Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$, hallamos los valores críticos $x = 1$, $x = 2$. Consideremos primero el valor $x = 1$. Sustituiremos en el segundo miembro de (2) valores de x cercanos a este valor

---

* Por lo que veremos en el capítulo siguiente, a la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ se le llama también primera derivada.

crítico y observaremos los signos de los factores. (Compárese con lo visto en el Artículo 45.)

x	y
1	2
2	1

Cuando $x < 1$, $f'(x) = (-)(-) = +$.

Cuando $x > 1$, $f'(x) = (+)(-) = -$.

Luego $f(x)$ tiene un máximo cuando $x = 1$. Por la tabla adjunta vemos que este valor es $y = f(1) = 2$.

Veamos ahora lo que ocurre para $x = 2$. Procederemos como antes, tomando en este caso valores de x próximos al valor crítico 2.

Cuando $x < 2$, $f'(x) = (+)(-) = -$.

Cuando $x > 2$, $f'(x) = (+)(+) = +$.

Luego $f(x)$ tiene un mínimo cuando $x = 2$. Según la tabla anterior, este valor es $y = f(2) = 1$.

Estos resultados se resumen en la siguiente *regla*, que sirve de *guía en las aplicaciones*.

47. Primer método para calcular los máximos y mínimos de una función. Regla guía en las aplicaciones.

PRIMER PASO. *Se halla la primera derivada de la función.*

SEGUNDO PASO. *Se iguala la primera derivada a cero, y se hallan las raíces reales de la ecuación resultante. Estas raíces son los valores críticos de la variable.*

TERCER PASO. *Se consideran los valores críticos uno por uno, y se calculan los signos de la primera derivada, en primer lugar para un valor un poco menor * que el valor crítico y después para un valor un poco mayor que él. Si el signo de la derivada es primeramente + y después —, la función tiene un máximo para este valor crítico de la variable; en el caso contrario, tiene un mínimo. Si el signo no cambia, la función no tiene ni máximo ni mínimo para el valor crítico considerado.*

En el tercer paso, a menudo conviene descomponer $f'(x)$ en factores, como se hizo en el Artículo 46.

EJEMPLO 1. En el primer problema que se resolvió en el Artículo 44 vimos, por medio de la gráfica de la función

$$A = x\sqrt{100 - x^2},$$

* En este caso, cuando decimos "un poco menor" queremos indicar cualquier valor entre la raíz (valor crítico) que se considera y la raíz inferior a ella más próxima; y "un poco mayor" significa cualquier valor entre la raíz que se considera y la próxima mayor.

que el rectángulo de área máxima inscrito en un círculo de 5 cm de radio tiene una área = 50 cm². Ahora podemos obtener el mismo resultado analíticamente, aplicando la regla que acabamos de dar.

Solución. $f(x) = x\sqrt{100 - x^2}$.

Primer paso. $f'(x) = \dfrac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$.

Segundo paso. Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$, tenemos:

$$x = 5\sqrt{2} = 7{,}07,$$

que es el valor crítico. Se toma solamente el signo positivo del radical, puesto que el signo negativo carece de sentido por la naturaleza del problema.

Tercer paso. Cuando $x < 5\sqrt{2}$, entonces $2x^2 < 100$, y $f'(x)$ es $+$.

Cuando $x > 5\sqrt{2}$, entonces $2x^2 > 100$, y $f'(x)$ es $-$.

Puesto que el signo de la derivada cambia de $+$ a $-$, la función tiene un valor máximo $f(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 50$.

EJEMPLO 2. Calcular los máximos y mínimos de la función

$$(x-1)^2(x+1)^3.$$

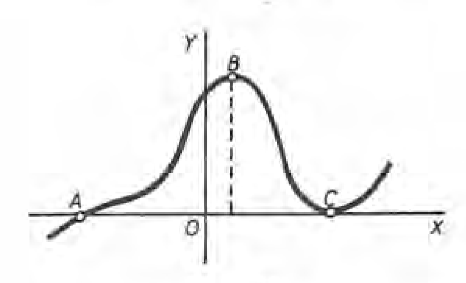


Fig. 22

Solución. $f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$.

Primer paso. $f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2$
$= (x-1)(x+1)^2(5x-1)$.

Segundo paso. $(x-1)(x+1)^2(5x-1) = 0$.

Luego $x = 1, \ -1, \ \frac{1}{5}$, son los valores críticos.

Tercer paso. $f'(x) = 5(x-1)(x+1)^2(x - \frac{1}{5})$.

Examinemos primero el valor crítico $x = 1$ (C en la figura 22).

Cuando $x < 1$, $f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -$.
Cuando $x > 1$, $f'(x) = 5(+)(+)^2(+) = +$.

Luego, cuando $x = 1$ la función tiene un valor mínimo

$$f(1) = 0 \ (= \text{la ordenada de } C).$$

Examinemos ahora el valor crítico $x = \frac{1}{5}$ (B en la figura).

$$\text{Cuando } x < \tfrac{1}{5},\ f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +.$$
$$\text{Cuando } x > \tfrac{1}{5},\ f'(x) = 5(-)(+)^2(+) = -.$$

Luego, cuando $x = \frac{1}{5}$ la función tiene un valor máximo $f\left(\frac{1}{5}\right) = 1{,}11$ (= la ordenada de B).

Examinemos, por último, el valor crítico $x = -1$ (A en la figura).

$$\text{Cuando } x < -1,\ f'(x) = 5(-)(-)^2(-) = +.$$
$$\text{Cuando } x > -1,\ f'(x) = 5(-)(+)^2(-) = +.$$

Luego, cuando $x = -1$ la función no tiene ni máximo ni mínimo.

48. Máximos o mínimos cuando $f'(x)$ se vuelve infinita y $f(x)$ es continua. Consideremos la gráfica de la figura 23. En B o G, $f(x)$

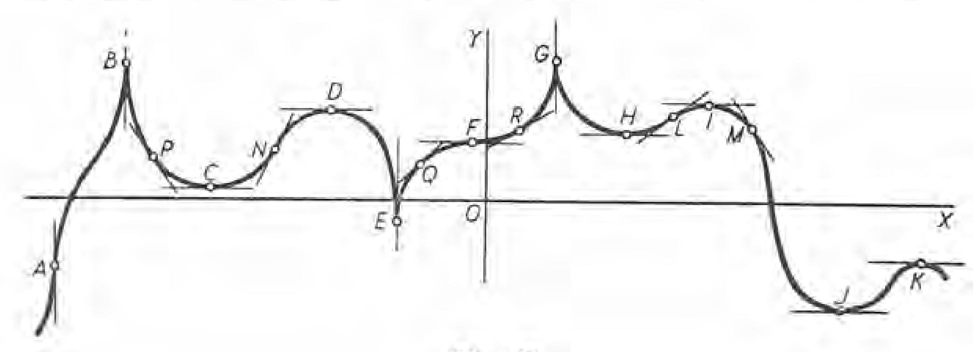


Fig. 23

es continua y tiene un valor máximo, pero $f'(x)$ se vuelve infinita, puesto que la tangente en B es paralela al eje de las y. En E, $f(x)$ tiene un valor mínimo y otra vez $f'(x)$ se vuelve infinita. Por tanto, en nuestra discusión de todos los valores máximos y mínimos posibles de $f(x)$, debemos incluir también como *valores críticos* los valores de x para los que $f'(x)$ se vuelve infinita, o lo que es lo mismo, los valores de x que satisfacen la ecuación

$$(1) \qquad \frac{1}{f'(x)} = 0.$$

Por consiguiente, el segundo paso de la regla dada en el Artículo 47 deberá modificarse teniendo en cuenta lo que representa la ecuación (1). Los otros pasos no se alteran.

En la figura 23 obsérvese que $f'(x)$ se vuelve también infinita en A, pero la función no tiene en A ni un máximo ni un mínimo.

EJEMPLO. Determinar los máximos y mínimos de la función

$$a - b(x - c)^{\frac{2}{3}}.$$

Solución. $f(x) = a - b(x-c)^{2/3}$.

$$f'(x) = -\frac{2b}{3(x-c)^{1/3}}.$$

$$\frac{1}{f'(x)} = -\frac{3(x-c)^{1/3}}{2b}.$$

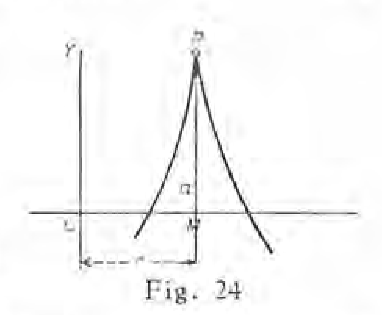


Fig. 24

Puesto que $x = c$ es un valor crítico para el que $\frac{1}{f'(x)} = 0$, (y $f'(x) = \infty$), pero para el que $f(x)$ no es infinita, veamos si cuando $x = c$ la función tiene un máximo o un mínimo.

Cuando $x < c$, $f'(x) = +$.
Cuando $x > c$, $f'(x) = -$.

Luego, cuando $x = c = OM$, (fig. 24) la función tiene el valor máximo

$$f(c) = a = MP.$$

PROBLEMAS

Calcular los máximos y mínimos de cada una de las funciones siguientes:

1. $x^3 - 6x^2 + 9x$. *Sol.* Máx. = 4 para $x = 1$. Mín. = 0 para $x = 3$.
2. $10 + 12x - 3x^2 - 2x^3$. Máx. = 17 para $x = 1$. Mín. = − 10 para $x = -2$.
3. $2x^3 + 3x^2 + 12x - 4$. No tiene ni máximos ni mínimos.
4. $x^3 + 2x^2 - 15x - 20$.
5. $2x^2 - x^4$. Mín. = 0 para $x = 0$. Máx. = 1 para $x = \pm 1$.
6. $x^4 - 4x$. Mín. = 3 para $x = 1$.
7. $x^4 - x^2 + 1$.
8. $3x^4 - 4x^3 - 12x^2$. Mín. = − 5 para $x = -1$. Máx. = 0 para $x = 0$. Mín. = − 32 para $x = 2$.
9. $x^5 - 5x^4$. Máx. = 0 para $x = 0$. Mín. = − 256 para $x = 4$.
10. $3x^5 - 20x^3$.
11. $x^2 + \frac{2a^3}{x}$. Mín. = $3a^2$ para $x = a$.
12. $2x - \frac{a^3}{x^2}$

13. $x^2 + \frac{a^4}{x^2}$. *Sol.* Mín. $= 2a^2$ para $x = \pm a$.

14. $\frac{ax}{x^2 + a^2}$. Mín. $= -\frac{1}{2}$ para $x = -a$. Máx. $= \frac{1}{2}$ para $x = a$.

15. $\frac{x^2}{x + a}$.

16. $\frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

17. $\frac{x^2 + 2a^2}{x^2 + a^2}$.

18. $(2 + x)^2 (1 - x)^2$.

19. $(2 + x)^2 (1 - x)^3$.

20. $b + c(x - a)^{\frac{2}{3}}$. Mín. $= b$ para $x = a$.

21. $a - b(x - c)^{\frac{1}{3}}$. No tiene ni máximo ni minimo.

22. $(2 + x)^{\frac{1}{3}} (1 - x)^{\frac{2}{3}}$. Mín. $= 0$ para $x = 1$. Máx. $= \sqrt[3]{4} = 1{,}6$ para $x = -1$.

23. $x(a + x)^2 (a - x)^3$. Máx. $= 0$ para $x = -a$. Mín. $= -\frac{27}{64}a^6$ para $x = -\frac{1}{2}a$. Máx. $= \frac{128}{729}a^6$ para $x = \frac{1}{3}a$.

Para el valor crítico $x = a$, la función no tiene ni máximo ni mínimo.

24. $(2x - a)^{\frac{1}{3}} (x - a)^{\frac{2}{3}}$. Máx. $= \frac{1}{3}a$ para $x = \frac{2}{3}a$. Mín. $= 0$ para $x = a$.

Para el valor crítico $x = \frac{1}{2}a$, la función no tiene ni máximo ni mínimo.

25. $\frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4}$. Máx. $= \frac{1}{2}$ para $x = 0$. Mín. $= -\frac{1}{6}$ para $x = -4$.

26. $\frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. Máx. $= -5$ para $x = -3$. Mín. $= 3$ para $x = 1$.

27. $\frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 2x + 4}$. Máx. $= \frac{3}{2}$ para $x = -2$. Mín. $= \frac{5}{6}$ para $x = 2$.

28. $\frac{(x - a)(b - x)}{x^2}$. Máx. $= \frac{(b - a)^2}{4ab}$ para $x = \frac{2ab}{a+b}$.

29. $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{a - x}$. Mín. $= \frac{(a + b)^2}{a}$ para $x = \frac{a^2}{a + b}$. Máx. $= \frac{(a - b)^2}{a}$ para $x = \frac{a^2}{a - b}$.

30. $\dfrac{(a-x)^3}{a-2x}$. *Sol.* Min. $= \frac{27}{32}a^2$ para $x = \dfrac{a}{4}$.

31. $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

49. Problemas sobre máximos y mínimos. En muchos problemas debemos primeramente hallar, a partir de los datos, la expresión matemática de la función cuyos valores máximos o mínimos se desean, tal como hemos hecho en los dos ejemplos resueltos en el Artículo 44. Esto es a veces bastante difícil. Ninguna regla es aplicable en todos los casos, pero en muchos problemas podemos guiarnos por las siguientes

Instrucciones generales.

a) *Determinar la función cuyo máximo o mínimo se desea obtener.*

b) *Si la expresión resultante contiene más de una variable, las condiciones del problema proporcionarán suficientes relaciones entre las variables para que la función pueda expresarse en términos de una sola variable.*

c) *A la función resultante se le aplica la regla que se dió en el Artículo 47 para el cálculo de máximos y mínimos.*

d) *En los problemas prácticos, muchas veces se ve con facilidad cuál de los valores críticos dará un máximo y cuál un mínimo; en consecuencia, no siempre es necesario aplicar el tercer paso.*

e) *Conviene construir la gráfica de la función para comprobar el resultado obtenido.*

El cálculo de máximos y mínimos puede a menudo simplificarse con la ayuda de los siguientes principios, que se deducen inmediatamente de lo anteriormente expuesto.

a) *Los máximos y mínimos de una función continua se presentan alternativamente.*

b) *Cuando* c *es una constante positiva,* c f(x) *es un máximo o un mínimo para los valores de* x *que hacen a* f(x) *máxima o mínima, y no para otros.*

Por tanto, al determinar los valores críticos de x y al aplicar la regla para ver si se trata de máximos o mínimos, pueden omitirse los factores constantes.

Cuando c *es negativa,* c f(x) *es un máximo cuando* f(x) *es mínima, y recíprocamente.*

c) *Si* c *es constante,* f(x) *y* c + f(x) *tienen valores máximos y mínimos para los mismos valores de* x.

Por tanto, al hallar valores críticos de x y al aplicar la regla pueden omitirse los términos constantes.

PROBLEMAS

1. De una pieza cuadrada de hojalata de lado a (fig. 25), se desea construir una caja, abierta por arriba, del mayor volumen posible, cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblando hacia arriba la hojalata para formar las caras laterales. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

Solución. Sea x = lado del cuadrado pequeño = profundidad de la caja; entonces,

$a - 2x$ = lado del cuadrado que forma el fondo de la caja,

y $V = (a - 2x)^2 x$ es el volumen de la caja.

Queremos calcular el valor de x para el cual esta función V es un máximo. Aplicando la regla (Art. 47), tendremos:

Primer paso. $\dfrac{dV}{dx} = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = a^2 - 8ax + 12x^2.$

Segundo paso. Resolviendo la ecuación $a^2 - 8ax + 12x^2 = 0$, se obtienen los valores críticos $x = \dfrac{a}{2}$ y $\dfrac{a}{6}$.

Se ve, por la figura 25, que $x = \dfrac{a}{2}$ da un mínimo, puesto que en ese caso toda la hojalata se quitaría y no quedaría material para construir la caja. Aplicando la regla, se halla que $x = \dfrac{a}{6}$ da el volumen máximo $\dfrac{2a^3}{27}$. Luego el lado del cuadrado que se ha de cortar es un sexto del lado del cuadrado dado.

En este problema y los siguientes, se recomienda al estudiante el trazado de la gráfica.

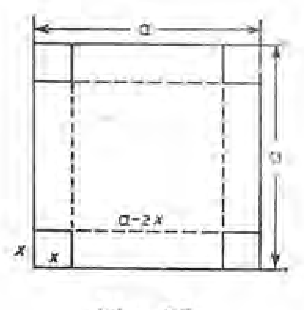


Fig. 25

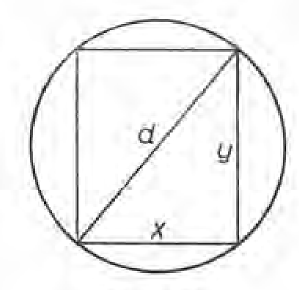


Fig. 26

2. Suponiendo que la resistencia de una viga de sección transversal rectangular es directamente proporcional a la anchura y al cuadrado de la profundidad, ¿cuáles son las dimensiones de la viga de mayor resistencia que puede aserrarse de un tronco redondo de diámetro d?

Solución. Si x = la anchura y y = la profundidad, entonces la viga tendrá resistencia máxima cuando la función xy^2 es máxima. De la figura 26 se deduce $y^2 = d^2 - x^2$; luego debemos trabajar con la función

$$f(x) = x(d^2 - x^2).$$

Primer paso. $f'(x) = -2x^2 + d^2 - x^2 = d^2 - 3x^2.$

Segundo paso. $d^2 - 3x^2 = 0.\quad \therefore\quad x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ = valor crítico que corresponde a un máximo.

Por tanto, si la viga se corta de manera que

$$\text{profundidad} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ del diámetro del tronco.}$$

y

$$\text{anchura} = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ del diametro del tronco.}$$

la viga tendrá máxima resistencia.

3. ¿Cuál es el ancho del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un segmento dado OAA' (fig. 27) de una parábola?

SUGESTION. Si $OC = h$, entonces $BC = h - x$ y $PP' = 2y$; por tanto, el área del rectángulo $PDD'P'$ es

$$2(h - x)y.$$

Pero P es un punto de la parábola $y^2 = 2px$; por consiguiente, la función por estudiar es

$$f(x) = 2(h - x)\sqrt{2px}. \qquad \textit{Sol.}\ \text{Ancho} = \tfrac{2}{3}h.$$

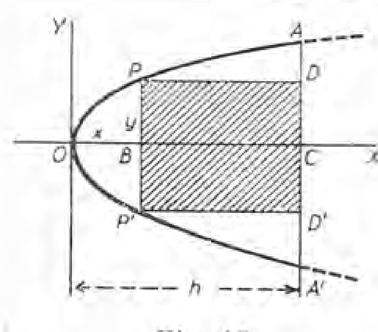


Fig. 27

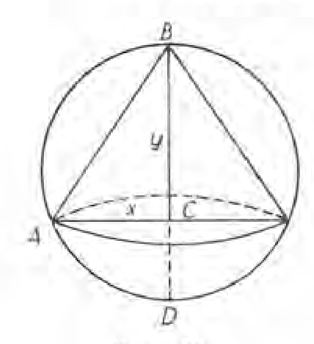


Fig. 28

4. Hallar la altura del cono de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de radio r.

SUGESTION. Volumen del cono = $\frac{1}{3}\pi x^2 y$ (fig. 28). Pero

$$x^2 = BC \times CD = y(2r - y);$$

luego la función por tratar es

$$f(y) = \frac{\pi}{3} y^2 (2r - y).$$

Sol. Altura del cono = $\frac{4}{3}r$.

5. Hallar la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto dado.

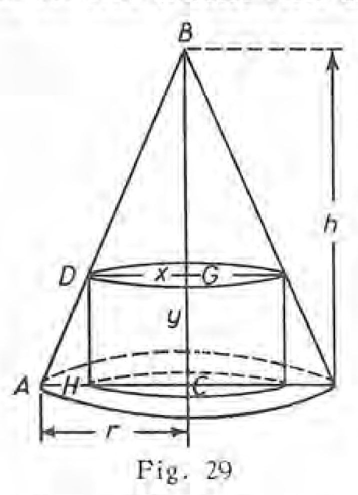


Fig. 29

SUGESTION. Sea $AC = r$ y $BC = h$ (figura 29). Volumen del cilindro $= \pi x^2 y$.

Pero de los triángulos semejantes ABC y DBG, se deduce

$$r : x = h : h - y, \quad \therefore \quad x = \frac{r(h-y)}{h}.$$

Por tanto, la función por estudiar es

$$f(y) = \frac{r^2}{h^2} y (h - y)^2.$$

Sol. Altura $= \frac{1}{3} h$.

6. Si tres lados de un trapecio miden cada uno 10 cm, ¿cuánto debe medir el cuarto lado para que el área sea máxima? *Sol.* 20 cm.

7. Se desea construir una valla alrededor de un campo rectangular, y dividirlo en dos parcelas por otra valla paralela a uno de los lados. Si el área del campo es dada, hallar la razón de los lados para que la longitud total de las vallas sea la mínima. *Sol.* $\frac{2}{3}$.

8. Una huerta rectangular ha de proyectarse al lado del solar de un vecino, y ha de tener un área de 10 800 metros cuadrados. Si el vecino paga la mitad de la cerca medianera, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la huerta para que el costo de cercarla sea para el dueño de la huerta el mínimo?

Sol. 90 m × 120 m.

9. Un fabricante de radios averigua que puede vender x instrumentos por semana a p pesos cada uno, siendo $5x = 375 - 3p$. El costo de la producción es $(500 + 15x + \frac{1}{5}x^2)$ pesos. Demostrar que se obtiene la máxima ganancia cuando la producción es alrededor de 30 instrumentos por semana.

10. Si en el problema anterior se supone que la relación entre x y p es

$$x = 100 - 20\sqrt{\frac{p}{5}},$$

demostrar que la producción que corresponde a una ganancia máxima es la de unos 25 instrumentos por semana.

11. Si en el problema 9 se supone que la relación entre x y p es

$$x^2 = 2\,500 - 20\,p,$$

¿cuántos instrumentos deben producirse cada semana para obtener la máxima ganancia?

12. El costo total de producir x artículos por semana es $(ax^2 + bx + c)$ pesos, y el precio (p pesos) al que cada uno puede venderse es $p = \beta - \alpha x^2$. Demostrar que la producción total para la ganancia máxima es

$$x = \frac{\sqrt{a^2 + 3\alpha(\beta - b)} - a}{3\alpha}$$

NOTA. En las aplicaciones a la Economía, los números a, b, c, α y β son positivos. Lo mismo ocurre en el problema 14.

13. En el problema 9, supóngase que el gobierno imponga un impuesto de t pesos por instrumento. El fabricante agrega el impuesto a sus gastos de costo y determina la producción total y el precio en las nuevas circunstancias.

a) Demostrar que el precio aumenta un poco menos que la mitad del impuesto.

b) Expresar los ingresos debidos al impuesto en función de t, y determinar para qué valor del impuesto la ganancia es máxima.

c) Demostrar que cuando se establece el impuesto determinado en (*b*), el precio se aumenta alrededor de un 33 por ciento.

14. El costo total de producción de x artículos por semana es

$$(ax^2 + bx + c) \text{ pesos},$$

a lo cual se agrega un impuesto de t pesos por artículo, decretado por el gobierno, y el precio (p pesos) a que cada artículo puede venderse es $\beta - \alpha x$. Demostrar que el máximo retorno del impuesto se consigue cuando $t = \frac{1}{2}(\beta - b)$ y que el aumento del precio de venta sobre el costo es siempre menor que el impuesto.

Nota: En aplicaciones a economía, a, b, c, α, β son números positivos.

15. Una planta productora de acero puede producir por día x Tm de acero de segunda clase, y y Tm, por día, de acero de primera clase, siendo $y = \dfrac{40 - 5x}{10 - x}$. Si el precio corriente del acero de segunda clase es la mitad del de primera, demostrar que el máximo beneficio se obtiene produciendo alrededor de 5,5 toneladas diarias de acero de segunda clase.

16. Una compañía de teléfonos halla que obtiene una ganancia líquida de 15 pesos por aparato si la central tiene 1 000 abonados o menos. Si hay más de 1 000 abonados, dicha ganancia por aparato instalado disminuye un centavo por cada abonado que sobrepasa ese número. ¿Cuántos abonados darían la máxima ganancia líquida?

Sol. 1 250.

17. El costo de fabricar cierto artículo es p pesos, y el número que pueden venderse varía inversamente con la potencia enésima del precio de venta. Calcular el precio de venta que dará la mayor ganancia líquida.

Sol. $\dfrac{np}{n-1}$.

18. Hallar el diámetro de un bote cilíndrico de hojalata de un litro de capacidad, para que en su construcción entre la menor cantidad de hojalata, *a*) si el bote es abierto por arriba; *b*) si el bote está tapado.

Sol. *a*) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{\pi}}$ dm; *b*) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$ dm.

19. El área lateral de un cilindro circular recto es 4π metros cuadrados. Del cilindro se corta un hemisferio cuyo diámetro es igual al diámetro del cilindro. Calcular las dimensiones del cilindro para que el volumen que queda sea un máximo o un mínimo. Determinar si es máximo o mínimo.

Sol. Radio = 1 m, altura = 2 m; máximo.

20. Hallar el área del mayor rectángulo, con lados paralelos a los ejes coordenados, que puede incribirse en la figura limitada por las dos parábolas $3y = 12 - x^2$ y $6y = x^2 - 12$.

Sol. 16.

21. Dos vértices de un rectángulo están sobre el eje de las x. Los otros dos vértices están sobre las rectas cuyas ecuaciones son $y = 2x$ y $3x + y = 30$. ¿Para qué valor de y será máxima el área del rectángulo? *Sol.* $y = 6$.

22. Una base de un trapecio isósceles es un diámetro de un círculo de radio a, y los extremos de la otra base están sobre la circunferencia. Hallar la longitud de la otra base para que el área sea máxima. *Sol.* a.

23. Un rectángulo está inscrito en un segmento de parábola y un lado del rectángulo está en la base del segmento. Demostrar que la razón del area del rectángulo máximo al área del segmento es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

24. La resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto del ancho por el cuadrado de su espesor. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco cuya sección transversal es una elipse de semiejes a (mayor) y b (menor).

Sol. Anchura $= 2b\sqrt{\frac{1}{3}}$; espesor $= 2a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

25. La rigidez de una viga rectangular es proporcional al producto de la anchura por el cubo del espesor. Calcular las dimensiones de la viga más rigida que pueda cortarse de una troza cilindrica de radio a. *Sol.* $a \times a\sqrt{3}$.

26. La ecuación de la trayectoria de una pelota es $y = mx - \frac{(m^2+1)x^2}{200}$, tomándose el origen en el punto desde el cual se lanza la pelota, y siendo m la pendiente de la curva en el origen; *a*) ¿Para qué valor de m caerá la pelota, en el mismo nivel horizontal, a la mayor distancia? *b*) ¿Para qué valor de m dará a la mayor altura en una pared vertical a la distancia de 75 metros?

Sol. *a*) 1; *b*) $\frac{4}{3}$.

27. Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado de un triángulo rectángulo isósceles. Demostrar que si el perímetro es p metros, la mayor cantidad de luz entrará cuando los lados del rectángulo sean iguales a los catetos del triángulo.

28. Dada la suma de las áreas de una esfera y un cubo, demostrar que la suma de sus volúmenes será mínima cuando el diámetro de la esfera es igual a la arista del cubo. ¿Cuándo será máxima la suma de los volúmenes?

29. Hallar las dimensiones del mayor rectángulo que pueda inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Sol.* $a\sqrt{2} \times b\sqrt{2}$.

30. Hallar el área del mayor rectángulo que pueda construirse con su base en el eje de las x y con dos vértices en la curva llamada bruja de Agnesi cuya ecuación es $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (véase la gráfica de la curva en el Capitulo XXVI).

Sol. $4a^2$.

31. Hallar la razón del área de la menor elipse que puede circunscribirse a un rectángulo al área del rectángulo. El area de una elipse es πab, siendo a y b los semiejes. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi$.

32. Los dos vértices inferiores de un trapecio isósceles son los puntos cuyas coordenadas son $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. Los dos vértices superiores están en la curva $x^2 + 4y = 36$. Hallar el área del mayor trapecio que puede trazarse de esta manera. *Sol.* 64.

33. Los radios de dos esferas son a y b y la distancia entre los centros es c. ¿Desde qué punto P en la recta de los centros AB es visible la mayor área de superficie esférica? (El área de una zona esférica o casquete esférico de altura h es $2\pi rh$, siendo r el radio de la esfera.)

Sol. $\dfrac{ca^{3/2}}{a^{3/2} + b^{3/2}}$ unidades de superficie.

34. Hallar las dimensiones del mayor paralelepípedo rectangular con base cuadrada que puede cortarse de una esfera sólida de radio r.

Sol. $h = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$.

35. Dada una esfera de 6 cm de radio, calcular la altura de cada uno de los sólidos siguientes:

a) cilindro circular recto inscrito de volumen máximo;
b) cilindro circular recto inscrito de superficie total máxima;
c) cono recto circunscrito de volumen mínimo.

Sol. *a*) $4\sqrt{3}$ cm; *b*) 6,31 cm; *c*) 24 cm.

36. Demostrar que una tienda de campaña de forma cónica de capacidad dada, exigirá la menor cantidad de lona cuando la altura es $\sqrt{2}$ veces el radio de la base. Demostrar también que si se extiende la lona en un plano, se obtiene un sector circular de $207° \, 51'$. ¿Cuánta lona se necesitaría para una tienda de 3 m de alto? *Sol.* 24,5 m².

37. Dado un punto del eje de la parábola $y^2 = 2px$ a una distancia a del vértice, calcular la abscisa del punto de la curva más cercano al punto dado.

Sol. $x = a - p$.

38. Hallar el punto de la curva $2y = x^2$ más cercano al punto $(4, 1)$.

Sol. $(2, 2)$.

39. Si PQ es el segmento de recta más largo que se puede trazar de $P(a, b)$ a la curva $y = f(x)$, o el más corto, demostrar que PQ es perpendicular a la tangente a la curva en Q.

40. Una fórmula para el rendimiento de un tornillo es

$$R = \frac{h(1 - h \operatorname{tg} \theta)}{h + \operatorname{tg} \theta},$$

siendo θ el ángulo de rozamiento y h el paso del tornillo. Hallar h para rendimiento máximo. *Sol* $h = \sec\theta - \operatorname{tg}\theta$

41. La distancia entre dos focos caloríficos A y B (fig. 30) cuyas intensidades respectivas son a y b, es l. La intensidad total de calor en un punto P, entre A y B, se da por la fórmula

$$I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(l - x)^2},$$

Fig. 30

siendo x la distancia entre P y A. ¿Para qué posición tendrá P la temperatura más baja?

Sol. $x = \dfrac{a^{1/3}\, l}{a^{1/3} + b^{1/3}}$.

42. La base inferior de un trapecio isósceles es el eje mayor de una elipse; los extremos de la base superior son puntos de la elipse. Demostrar que en el trapecio de este tipo de área máxima la longitud de la base superior es la mitad de la inferior.

43. En la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ se ha de inscribir un triángulo isósceles cuyo vértice sea el punto $(0, b)$. Hallar la ecuación de la base correspondiente al triángulo de área máxima. *Sol.* $2y + b = 0$.

44. Hallar la base y la altura del triángulo isósceles de área mínima circunscrito a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y cuya base es paralela al eje de las x.

Sol. Altura $= 3b$, base $= 2a\sqrt{3}$.

45. Sea $P(a, b)$ un punto en el primer cuadrante de un sistema de ejes rectangulares. Trácese por P una recta que corte las partes positivas de los ejes en A y B. Calcular la longitud de OA y de OB en cada uno de los siguientes casos:

a) cuando el área OAB es mínima;
b) cuando la longitud AB es mínima;
c) cuando la suma de OA y OB es mínima;
d) cuando la distancia (perpendicular) de O a AB es máxima.

Sol. *a*) $2a$, $2b$; *b*) $a + a^{1/3}b^{2/3}$, $b + a^{2/3}b^{1/3}$;
c) $a + \sqrt{ab}$, $b + \sqrt{ab}$; *d*) $\dfrac{a^2 + b^2}{a}$, $\dfrac{a^2 + b^2}{b}$.

50. La derivada como rapidez de variación. * En el Artículo 23 la relación funcional

$$(1) \qquad y = x^2$$

dió como razón de los incrementos correspondientes

$$(2) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Cuando $x = 4$ y $\Delta x = 0{,}5$, la ecuación (2) se convierte en

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8{,}5.$$

* Llamada también *razón de cambio* o *rapidez de cambio*.

Luego decimos que la rapidez media de variación de y con respecto a x es igual a 8,5 cuando x aumenta desde $x = 4$ hasta $x = 4{,}5$.

En general, la razón

(*A*) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = *rapidez media de variación de* y *con respecto a* x *cuando* x *varía desde* x *hasta* $x + \Delta x$.

Caso de rapidez constante de variación. En el caso

$$y = ax + b, \tag{4}$$

tenemos,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Es decir, la rapidez media de variación de y con respecto a x es igual a a, la pendiente de la recta (4), y es constante. En este caso, y solamente en este caso, el cambio en y (Δy), cuando x aumenta desde un valor cualquiera x hasta $x + \Delta x$, es igual a Δx multiplicado por la rapidez de variación a.

Rapidez instantánea de variación. Si el intervalo de x a $x + \Delta x$ disminuye, es decir, si $\Delta x \to 0$, entonces la rapidez media de la variación de y con respecto a x se convierte, en el límite, en la *rapidez instantánea de variación de* y *con respecto a* x. Por consiguiente, según el Artículo 24,

(*B*) $\frac{dy}{dx}$ = *rapidez instantánea de la variación de* y *con respecto a* x *para un valor definido de* x.

Por ejemplo, de (1) se deduce,

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \tag{5}$$

Cuando $x = 4$, la rapidez instantánea de variación de y es 8 unidades por unidad de variación de x. Es frecuente que en la igualdad (*B*) se prescinda de la palabra "instantánea".

Interpretación geométrica. Tracemos la gráfica (fig. 31) de la función

$$y = f(x). \tag{6}$$

Cuando x aumenta de OM a ON, entonces y aumenta de MP a NQ. La rapidez media de la variación de y con respecto a x es igual a la pendiente de la recta secante PQ. La rapidez

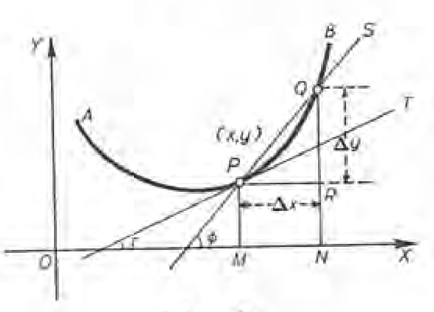


Fig. 31

instantánea cuando $x = OM$ es igual a la pendiente de la tangente PT.

Luego *la rapidez instantánea de variación de* y *en* P(x, y) *es igual a la rapidez constante de variación de* y *a lo largo de la tangente en* P.

Cuando $x = x_0$, la rapidez instantánea de variación de y, o sea de $f(x)$, en (6), es $f'(x_0)$. Si x aumenta ahora de x_0 a $x_0 + \Delta x$, el cambio *exacto* en y *no* es igual a $f'(x_0)\Delta x$, a no ser $f'(x)$ constante, como en (4). Sin embargo, veremos más tarde que este producto es, aproximadamente, igual a Δy cuando Δx es suficientemente pequeño

51. Velocidad en un movimiento rectilíneo. Cuando la variable independiente es el tiempo, se presentan aplicaciones importantes. Entonces la rapidez de variación con respecto al tiempo se llama simplemente *velocidad*. La velocidad en un movimiento rectilíneo suministra un ejemplo sencillo. Consideremos el movimiento de un punto P (fig. 32) sobre la recta AB. Sea s la distancia medida de

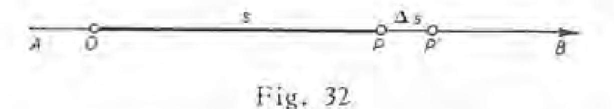


Fig. 32

un punto fijo, como O, a una posición cualquiera de P, y sea t el tiempo correspondiente transcurrido. A cada valor de t corresponde una posición de P y, por consiguiente, una distancia (o espacio) s. Luego s será una función de t, y podemos escribir

$$s = f(t).$$

Ahora, demos a t un incremento Δt; entonces s tomará un incremento Δs, y tendremos:

$$(1) \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \textit{velocidad media}$$

de P cuando el punto se mueve de P a P', en el intervalo Δt de tiempo. Si P se mueve con movimiento uniforme, es decir, con velocidad constante, dicha razón tendrá un mismo valor para todo intervalo de tiempo, y es la velocidad en cada instante.

Para el caso general de cualquiera clase de movimiento, sea uniforme o no, definimos *la velocidad* (*rapidez de variación de* s *con respecto al tiempo*) *en un instante cualquiera* como *el límite de la velocidad media* cuando Δt tiende a cero; es decir,

$$(C) \qquad v = \frac{ds}{dt}.$$

La velocidad en un instante cualquiera es, pues, la derivada del espacio con respecto al tiempo.

Cuando v es positiva, el espacio s es una función creciente de t, y el punto P se mueve en el sentido AB. Cuando v es negativa, s es una función decreciente de t, y P se mueve en el sentido BA (Artículo 45).

Para ver que esta definición concuerda con el concepto físico de velocidad que ya tenemos, vamos a calcular la velocidad de un cuerpo que cae, al cabo de dos segundos.

Se ha averiguado experimentalmente, que si un cuerpo cae libremente en el vacío partiendo del reposo a la superficie de la Tierra, obedece, aproximadamente, a la ley dada por la fórmula:

$$(2) \qquad s = 4{,}9\,t^2,$$

siendo $s =$ el espacio recorrido en metros, $t =$ el tiempo en segundos. Aplicando la regla general (Art. 27) a (2), tendremos:

Primer paso.

$$s + \Delta s = 4{,}9(t + \Delta t)^2 = 4{,}9\,t^2 + 9{,}8\,t \cdot \Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2.$$

Segundo paso.

$$\Delta s = 9{,}8\,t \cdot \Delta t + 4{,}9\,(\Delta t)^2.$$

Tercer paso.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{,}8\,t + 4{,}9\,\Delta t = \textit{velocidad media durante todo el intervalo } \Delta t \textit{ de tiempo}.$$

Haciendo $t = 2$,

$$(3) \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = 19{,}6 + 4{,}9\,\Delta t = \textit{velocidad media durante todo el intervalo } \Delta t \textit{ de tiempo durante dos segundos de caída}.$$

Nuestra idea física de velocidad nos dice inmediatamente que (3) no nos da la velocidad real *al fin de dos segundos;* en efecto, aun si tomamos Δt muy pequeño, digamos 0,01 ó 0,001 de segundo, todavía (3) da solamente la *velocidad media* durante el pequeño intervalo de tiempo correspondiente. Pero lo que sí queremos expresar con la idea de velocidad al fin de dos segundos es *el límite de la velocidad media cuando* Δt *tiende a cero;* es decir, la velocidad al fin de dos segundos es, según (3), 19,6 metros por segundo. De este modo, aún la idea ordinaria de velocidad que obtenemos de la experiencia, implica el concepto de un límite; según nuestra notación,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = 19{,}6 \text{ m por segundo}.$$

52. Relación entre la rapidez de variación de variables relacionadas. En muchos problemas entran variables que son funciones del tiempo. Si las condiciones del problema permiten establecer relaciones entre las variables, entonces, mediante la derivación, es posible hallar una relación entre la rapidez de variación de las variables.

Como guía para la resolución de problemas de esta clase, puede usarse la siguiente *regla*.

PRIMER PASO. *Construir una figura que sea una interpretación del enunciado del problema, y representar por* x, y, z, *etc. las cantidades que varían con el tiempo.*

SEGUNDO PASO. *Obtener una relación entre las variables implicadas que se verifique en un instante cualquiera.*

TERCER PASO. *Derivar con respecto al tiempo.*

CUARTO PASO. *Hacer una lista de las cantidades dadas y de las buscadas.*

QUINTO PASO. *Sustituir en el resultado de la derivación (tercer paso) las cantidades dadas, y resolver con respecto a las que se buscan.*

PROBLEMAS

1. Un hombre camina 7½ Km por hora hacia la base de una torre que tiene 18 m de alto. ¿Con qué rapidez se acerca a la cima de la torre cuando su distancia de la base es 24 m?

Solución. Aplicando la regla, tendremos:

Primer paso. Construyamos la figura 33. Sea x la distancia entre el hombre y la base de la torre, y y su distancia de la cima, en un instante cualquiera.

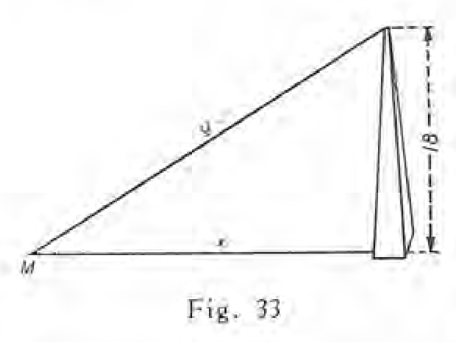


Fig. 33

Segundo paso. En el triángulo rectángulo de la figura se verifica:

$$y^2 = x^2 + 324.$$

Tercer paso. Derivando, obtenemos

$$2\,y\frac{dy}{dt} = 2\,x\frac{dx}{dt}, \quad \text{o sea,}$$

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt}.$$

Esto significa que en un instante cualquiera se verifica la igualdad:

rapidez de variación de y $= \left(\frac{x}{y}\right)$ *veces* (*rapidez de variación de* x).

Cuarto paso. $x = 24$ $\qquad \frac{dx}{dt} = -7\frac{1}{2}$ Km por hora

$= -7\,500$ m por hora.

$y = \sqrt{x^2 + 324}$ $\qquad \frac{dy}{dt} = ?$

$= 30.$

Quinto paso. Sustituyendo en (1),

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{24}{30} \times 7\,500 \text{ m por hora}$$

$$= -6 \text{ Km por hora.}$$

2. Un punto se mueve sobre la parábola $6\,y = x^2$, de manera que cuando $x = 6$ la abscisa aumenta con una rapidez de 2 m por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta la ordenada en ese instante?

Solución. *Primer paso.* Construímos la parábola (fig. 34).

Segundo paso. Según el problema, $6\,y = x^2$.

Tercer paso. $\qquad 6\frac{dy}{dt} = 2\,x\frac{dx}{dt}$, o sea,

(2) $$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{3} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

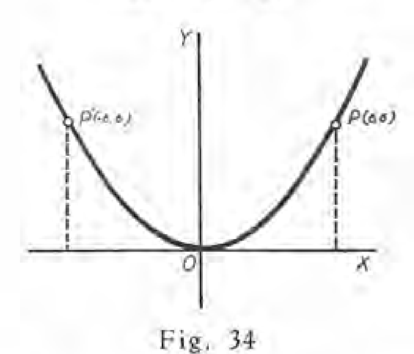


Fig. 34

Esto significa que en un punto cualquiera de la parábola se verifica:

(*rapidez de variación de la ordenada*) $= \left(\frac{x}{3}\right)$ (*rapidez de variación de la abscisa*)

Cuarto paso. $x = 6.$ $\qquad \frac{dx}{dt} = 2$ m por segundo.

$y = \frac{x^2}{6} = 6.$ $\qquad \frac{dy}{dt} = ?$

Quinto paso. Sustituyendo en (2), tendremos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{6}{3} \times 2 = 4 \text{ m por segundo.}$$

Según este resultado, en el punto $P(6, 6)$ la ordenada varía dos veces más rápidamente que la abscisa.

Si en lugar de ese punto consideramos el punto $P'(-6, 6)$, el resultado es $\frac{dy}{dt} = -4$ m por segundo; el signo menos indica que la ordenada disminuye cuando la abscisa aumenta.

3. Una placa circular de metal se dilata por el calor, de manera que su radio aumenta con una rapidez de 0,01 cm por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el área cuando el radio es de 2 cm?

Solución. Sea x = el radio y y = el área. Entonces

$$y = \pi x^2.$$

$$(3) \qquad \frac{dy}{dt} = 2\,\pi x \frac{dx}{dt}.$$

Es decir, en un instante cualquiera, el área de la placa expresada en centímetros cuadrados, aumenta $2\pi x$ veces más rápidamente que lo que el radio aumenta en centímetros lineales.

$$x = 2, \quad \frac{dx}{dt} = 0{,}01, \quad \frac{dy}{dt} = ?$$

Sustituyendo en (3),

$$\frac{dy}{dt} = 2\,\pi \times 2 \times 0{,}01 = 0{,}04\,\pi \text{ cm}^2 \text{ por segundo.}$$

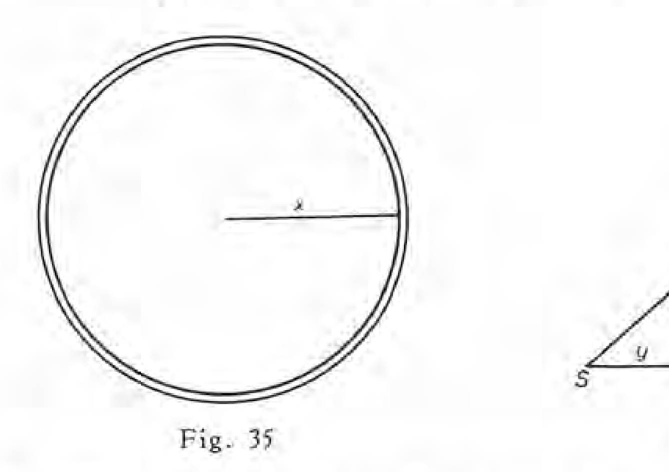
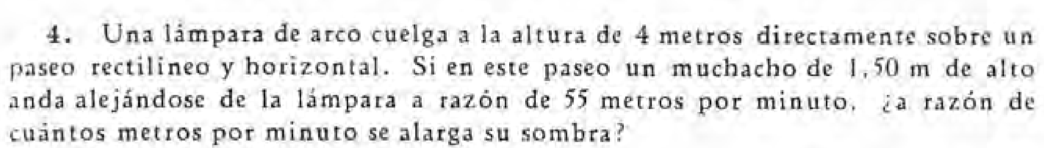


Fig. 35 Fig. 36



4. Una lámpara de arco cuelga a la altura de 4 metros directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo un muchacho de 1,50 m de alto anda alejándose de la lámpara a razón de 55 metros por minuto, ¿a razón de cuántos metros por minuto se alarga su sombra?

Solución. Sea x = distancia del muchacho de un punto directamente debajo de la lámpara L, y sea y = longitud de la sombra del muchacho. De la figura 36, se deduce,

$$y : y + x = 1{,}50 : 4,$$

o sea,

$$y = \frac{3}{5}x.$$

Derivando,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{5}\frac{dx}{dt};$$

es decir, la sombra se alarga con una rapidez igual a los $\frac{3}{5}$ de la rapidez con que se mueve el muchacho, o sea, a razón de 33 metros por minuto.

5. Un punto se mueve sobre la parábola $y^2 = 12\,x$, de manera que la abscisa aumenta uniformemente 2 cm por segundo. ¿En qué punto aumentan la abscisa y la ordenada a la misma razón? *Sol.* (3, 6).

6. Hallar los valores de x para los que la rapidez de variación de la función

$$x^3 - 12\,x^2 + 45\,x - 13$$

es cero. *Sol.* 3 y 5.

7. Un lanchón se acerca al muelle mediante un cable amarrado a un anillo en el suelo del muelle; el cable se enrolla con un torno situado en la cubierta del lanchón, a razón de 2,4 m por minuto. La cubierta está 4,5 m debajo del nivel del muelle. ¿Con qué rapidez se mueve el lanchón hacia el muelle cuando dista de él 6 metros? *Sol.* 3 m por minuto.

8. Un bote está atado a una cuerda que está arrollada alrededor de un torno situado 7 m más alto que el nivel del punto en que la cuerda está amarrada al bote. El bote se aleja con la velocidad de 3 m por segundo. ¿Con qué rapidez se desarrolla el cordel cuando dista 10 m del punto que está directamente debajo del torno y al nivel del agua? *Sol.* 2,46 m por segundo.

9. Uno de los extremos de una escalera de 15 m se apoya contra una pared vertical levantada en un piso horizontal. Supóngase que se empuje el pie de la escalera alejándola de la pared a razón de 0,9 m por minuto. *a*) ¿Con qué velocidad baja la extremidad superior de la escalera cuando su pie dista 4 m de la pared? *b*) ¿Cuándo se moverán con la misma velocidad las dos extremidades de la escalera? *c*) ¿Cuándo baja la extremidad superior de la escalera a razón de 1,2 m por minuto?

Sol. *a*) 0,25 m por minuto; *b*) cuando el pie de la escalera dista $7{,}5\sqrt{2}$ m de la pared; *c*) cuando el pie dista 12 m de la pared.

10. Un buque navegaba hacia el Sur a una velocidad de 6 millas por hora; otro navegaba hacia el Este a una velocidad de 8 millas por hora. A las cuatro de la tarde el segundo cruzó la ruta del primero en el punto por el que éste había pasado dos horas antes. *a*) ¿Cómo variaba la distancia entre los buques a las tres de la tarde? *b*) ¿Cómo a las cinco de la tarde? *c*) ¿Cuándo no variaba la distancia entre ellos?

Sol. *a*) Disminuía 2,8 millas por hora; *b*) aumentaba 8,73 millas por hora; *c*) a las $3^h\,17^m$ de la tarde.

11. El lado de un triángulo equilátero mide a cm; si aumenta a razón de k cm por hora, ¿a razón de cuántos centímetros cuadrados por hora aumenta el área?

Sol. $\frac{1}{2}ak\sqrt{3}$ cm^2 por hora.

12. Las aristas de un tetraedro regular miden 10 cm; si aumentan 0,1 cm por minuto, calcular la rapidez de aumento del volumen.

13. Si en un cierto instante las dos dimensiones de un rectángulo son a y b, y su rapidez de variación son m y n, respectivamente, demostrar que la rapidez de variación del área es $an + bm$.

14. En un cierto instante las tres dimensiones de un paralelepípedo rectangular son 6 m, 8 m y 10 m, y aumentan, respectivamente, 0,2 m, 0,3 m y 0,1 m por segundo. ¿Cuál es la rapidez de variación del volumen?

15. El período (P segundos) de una oscilación completa de un péndulo cuya longitud es l cm viene dado por la fórmula $P = 0{,}2\sqrt{l}$. Hallar la rapidez de variación del período con respecto a la longitud, cuando $l = 22{,}5$ cm. Por medio de ese resultado calcular el aumento de P correspondiente al aumento de l de 22,5 a 22,8 cm. *Sol.* 0,021 seg. por cm; 0,0063 segundos.

16. El diámetro y la altura de un cilindro circular recto son, en un cierto instante, 10 cm y 20 cm, respectivamente. Si el diámetro aumenta a razón de 1 cm por minuto, ¿qué alteración de la altura mantendrá constante el volumen?

Sol. Una disminución de 4 cm por minuto.

17. El radio de la base de cierto cono aumenta a razón de 3 cm por hora y la altura disminuye a razón de 4 cm por hora. Calcular cómo varía el área total del cono cuando el radio mide 7 cm y la altura 24 cm.

Sol. Aumenta a razón de $96\,\pi$ cm^2 por hora.

18. En cada uno de los extremos de un cilindro de radio r y altura h se coloca un hemisferio de radio r. Si r aumenta a razón de 50 cm por minuto, ¿a qué razón debe h disminuir para mantener fijo el volumen del sólido, en el instante en que r mide 10 m y h mide 20 m?

19. Desde la boca de un pozo profundo se deja caer una piedra, y después de t segundos se deja caer otra piedra. Demostrar que la distancia entre las piedras aumenta a razón de tg cm por segundo.

20. Un gasómetro contiene 1 000 m^3 de gas a la presión de 300 g por cm^2. Si la presión disminuye a razón de 3 g por cm^2 por hora, ¿con qué rapidez aumenta el volumen? (Dése por sentada la ley de Boyle: $pv = c$.)

Sol. 10 m^3 por hora.

21. La ley adiabática para la expansión del aire es $PV^{1,4} = C$. Si en un tiempo dado se observa que el volumen es de 10 m^3 y la presión es de 50 Kg por centímetro cuadrado, ¿cuál es la alteración de la presión si el volumen disminuye un m^3 por segundo? *Sol.* Aumenta 7 Kg por cm^2 por segundo.

22. Si $y = 4\,x - x^3$ y x aumenta uniformemente a razón de $\frac{1}{3}$ de unidad por segundo, ¿cuál es la rapidez de variación de la pendiente de la gráfica en el instante en que $x = 2$? *Sol.* Disminuye 4 unidades por segundo.

23. Se echa agua en un recipiente hemisférico de 35 cm de diámetro a razón de 16 cm^3 por segundo. ¿Con qué rapidez sube el agua, *a*) cuando ha llegado a media profundidad; *b*) en el momento de rebosar? (El volumen de un segmento esférico de una base es $\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$, siendo h la altura del segmento.)

24. El gas de un globo esférico se escapa a razón de 1 000 cm^3 por minuto. En el instante en que el radio es 25 cm, *a*) ¿con qué rapidez disminuye el radio? *b*) ¿con qué rapidez disminuye el área de la superficie?

Sol. *b*) 80 cm^2 por minuto.

25. Si r representa el radio de una esfera, S la superficie y V el volumen, demuéstrese la relación $\frac{dV}{dt} = \frac{r}{2}\frac{dS}{dt}$.

26. Una via de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de 60°. Una locomotora dista 160 m del crucero, y se aleja de él a la velocidad de 100 Km por hora. Un automóvil dista del crucero 160 m, y se acerca a él a la velocidad de 50 Km por hora. ¿A qué razón se altera la distancia entre los dos?

Sol. Aumenta 25 Km por hora ó $25\sqrt{3}$ Km por hora.

27. La longitud de una artesa horizontal es de 2,5 m; su sección transversal es un triángulo rectángulo isósceles. Si se echa agua en la artesa a razón de $\frac{1}{8}$ m³ por minuto, ¿con qué rapidez sube la superficie del agua cuando el agua tiene $\frac{1}{2}$ m de profundidad? *Sol.* 5 cm por minuto.

28. En el problema 27, ¿con qué rapidez debe echarse el agua en la artesa para que el nivel suba de 4 cm por minuto, cuando el agua tiene una profundidad de 75 cm?

29. La longitud de una artesa horizontal es de 4 m; su sección transversal es un trapecio; el fondo tiene un metro de ancho; el seno del ángulo entre sus caras laterales y el plano horizontal es $\frac{4}{5}$. Se echa agua en la artesa a razón de $\frac{1}{4}$ m³ por minuto. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando el agua tiene 60 cm de profundidad?

30. En el problema 29, ¿con qué rapidez se saca agua de la artesa si el nivel baja 3 cm por minuto cuando el agua tiene un metro de profundidad?

31. El segmento que la tangente a la rama positiva de la hipérbola $xy = 4$ determina sobre el eje de las x aumenta 3 unidades por segundo. Sea la ordenada en el origen OB. Hallar la velocidad de B después de 5 segundos del instante en que la tangente pasaba por el origen.

Sol. $-\frac{16}{75}$ de unidad por segundo.

32. Un punto P se mueve a lo largo de la parábola $y^2 = x$ de manera que su abscisa aumenta de una manera uniforme k unidades por segundo. La proyección de P sobre el eje de las x es M. ¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo OMP cuando P está en el punto de abscisa $x = a$?

Sol. $\frac{3}{4}k\sqrt{a}$ unidades por segundo.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Considérense los paralelepípedos cuyas bases son los rectángulos inscritos en el área limitada por la parábola $y^2 = 16x$ y su lado recto (cuerda trazada por el foco, perpendicularmente al eje de simetría), de manera que un lado del rectángulo esté sobre el lado recto de la parábola; las alturas de los paralelepípedos son siempre iguales a la longitud del lado paralelo al eje de las x. Hallar el volumen del mayor paralelepípedo.

Sol. $\frac{4\,096}{125}\sqrt{5} = 73{,}27$.

2. Una elipse, simétrica con respecto a los ejes coordenados, pasa por el punto fijo (h, k). Hallar la ecuación de la elipse de área mínima.

Sol. $k^2x^2 + h^2y^2 = 2\,h^2k^2$.

3. La curva $x^3 - 3\,xy + y^3 = 0$ tiene en el primer cuadrante un bucle simétrico con respecto a la recta $y = x$. Un triángulo isósceles inscrito en el bucle tiene su base en la recta $x + y = a$ y su vértice en el origen. Hallar el valor de a correspondiente al triángulo de área máxima.

Sol. $\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{13}) = 2{,}303$.

4. P es un punto de la curva $y = 7 - x^2$, en el primer cuadrante. Por P se traza la tangente a la curva, y sean A y B los puntos en que corta a los ejes coordenados. Hallar la posición de P para que AB sea mínimo.

Sol. Ordenada $= \frac{49}{8}$.

4. El costo de construcción de un edificio destinado a oficinas es de pesos 50 000 para el primer piso, \$ 52 500 para el segundo, \$ 55 000 para el tercero, y así sucesivamente. Otros gastos (terreno, planos, cimentación, etc.) son de \$ 350 000. La renta anual neta es \$ 5 000 para cada piso. ¿Cuántos pisos darán el más alto tipo de interés de la inversión? *Sol.* 17

6. Para cierto artículo, el aumento en el número de kilos consumidos es proporcional a la disminución de la contribución sobre cada kilogramo. Si el consumo es m Kg cuando no hay contribución y n Kg cuando la contribución es c pesos por kilogramo, hállese la contribución que debe imponerse sobre cada kilogramo para obtener el máximo ingreso.

7. Una cuerda BC de la parábola $y = kx^2$ y las tangentes AB y AC en los dos extremos de la cuerda, forman un triángulo ABC. Si BC se mantiene perpendicular al eje de la parábola y se acerca al vértice con una rapidez de 2 unidades por segundo, ¿con qué rapidez varía el área del triángulo cuando la cuerda BC dista del vértice 4 unidades?

8. Un tanque cilíndrico vertical tiene en su base un agujero de 3 cm de radio. El radio del tanque es de 30 cm. El agua se escurre del tanque con la velocidad dada por la fórmula $v^2 = 2\,gh$, siendo h la profundidad del agua y g la aceleración de la gravedad. ¿Cuál es la rapidez de variación de la velocidad?

Sol. Disminuye a razón de $\frac{1}{100}\,g$ cm por segundo por segundo.

9. Una lámpara dista 10 m de una pared, y está colgada a una altura de 3 m respecto al eje de un sendero perpendicular a la pared. Un hombre de 1,775 m de altura anda por el sendero hacia la pared al paso de un metro por segundo. Cuando dista de la pared 3 m, ¿qué tan rápidamente sube la sombra de su cabeza por la pared? *Sol.* 25 cm por segundo.

CAPITULO VI

DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCION. APLICACIONES

53. Definición de las derivadas sucesivas. Hemos visto que, en general, la derivada de una función de x es también una función de x. Puede ocurrir que esta nueva función sea también derivable; en este caso la derivada de la *primera derivada* se llama la *segunda derivada* de la función primitiva. Análogamente, la derivada de la segunda derivada se llama la *tercera derivada,* y así, sucesivamente, hasta la *enésima derivada*. Así, si

$$y = 3x^4,$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 36x^2,$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 72x. \text{ Etc.}$$

Notación. Los símbolos para las derivadas sucesivas se abrevian ordinariamente como sigue:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}, \text{ etc.}$$

Si $y = f(x)$, las derivadas sucesivas se representan también por la notación

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x); \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f''(x);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f'''(x); \quad \cdots; \quad \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)} = f^{(n)}(x).$$

En el ejemplo anterior, la notación

$$y = 3x^4, \quad y' = 12x^3, \quad y'' = 36x^2, \quad y''' = 72x, \quad y^{\text{IV}} = 72$$

es la más cómoda.

54. Obtención de las derivadas sucesivas en funciones implícitas. Para mostrar el procedimiento, hallaremos $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la ecuación de la hipérbola

$$(1) \qquad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Derivando con respecto a x (Art. 41),

$$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

o sea,

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Derivando otra vez, teniendo en cuenta que y es una función de x, resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2yb^2 - b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{a^4y^2}$$

Reemplazando $\frac{dy}{dx}$ por su valor según (2), tendremos,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\left(\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{a^4y^2} = -\frac{b^2(b^2x^2 - a^2y^2)}{a^4y^3}.$$

Pero, según la ecuación dada, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

PROBLEMAS

Demostrar cada una de las siguientes derivaciones.

1. $y = 3x^4 - 2x^3 + 6x$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 12x.$

2. $s = \sqrt{a + bt}$. $\qquad \frac{d^3s}{dt^3} = \frac{3b^3}{8(a + bt)^{5/2}}.$

3. $y = \frac{a + bx}{a - bx}$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4ab^2}{(a - bx)^3}.$

4. $u = \sqrt{a^2 + v^2}$. $\qquad \dfrac{d^2u}{dv^2} = \dfrac{a^2}{(a^2 + v^2)^{3/2}}$.

5. $y = \dfrac{x^2}{a + x}$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\,a^2}{(a + x)^3}$.

6. $s = \dfrac{t}{\sqrt{2\,t + 1}}$. $\qquad \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{-(t + 2)}{(2\,t + 1)^{5/2}}$.

7. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\,x^2}{1 - x}$. $\qquad f^{\text{IV}}(x) = \dfrac{-\underline{|4}}{(1 - x)^5}$.

8. $y = \dfrac{2}{x + 1}$. $\qquad \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{2(-1)^n\underline{|n}}{(x+1)^{n+1}}$.

9. $x^2 + y^2 = r^2$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{r^2}{y^3}$.

10. $y^2 = 4\,ax$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4\,a^2}{y^3}$.

11. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}$; $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -\dfrac{3\,b^6x}{a^4y^5}$.

12. $ax^2 + 2\,hxy + by^2 = 1$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{h^2 - ab}{(hx + by)^3}$.

13. $x^3 + y^3 = 1$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2\,x}{y^5}$.

14. $x^4 + 2\,x^2y^2 = a^4$. $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2\,y^4 - x^2y^2 - x^4}{x^2y^3}$.

En los problemas 15 a 25, obtener los valores de y' y y'' para los valores dados de las variables.

15. $y = \sqrt{ax} + \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}}$; $x = a$. $\qquad$ *Sol.* $y' = 0$, $y'' = \dfrac{1}{2\,a}$.

16. $y = \sqrt{25 - 3\,x}$; $x = 3$. $\qquad y' = -3/8$, $y'' = -9/256$.

17. $y = x\sqrt{x^2 + 9}$; $x = 4$. $\qquad y' = 41/5$, $y'' = 236/125$.

18. $x^2 - 4\,y^2 = 9$; $x = 5$, $y = 2$. $\qquad y' = 5/8$, $y'' = -9/128$.

19. $x^2 + 4\,xy + y^2 + 3 = 0$; $x = 2$, $y = -1$. $\qquad y' = 0$, $y'' = -1/3$.

20. $y = (3 - x^2)^4$; $x = 1$.

21. $y = \sqrt{1 + 2\,x}$; $x = 4$.

22. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4}$; $x = 2$.

23. $y = x\sqrt{3\,x - 2}$; $x = 2$.

24. $y^2 + 2\,xy = 16$; $x = 3$, $y = 2$.

25. $x^3 - xy^2 + y^3 = 8$; $x = 2$, $y = 2$.

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ en cada uno de los ejercicios siguientes:

26. $y = x^3 - \frac{3}{x}$.

27. $y = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

28. $y = \sqrt[3]{2 - 3x}$.

29. $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

30. $y^2 - 4xy = 16$.

31. $x^3 - 3axy + y^3 = b^3$.

55. Sentido de la concavidad de una curva. Si el punto $P(x, y)$ describe una curva, la pendiente de la tangente en P varía. Cuando la tangente queda debajo de la curva (fig. 37), el arco es cóncavo hacia arriba; si la tangente queda arriba de la curva (fig. 38), el arco es cóncavo hacia abajo. En la figura 37 la pendiente de la tangente aumenta cuando P describe el arco AP'. Luego $f'(x)$ es una función creciente de x. Por otra parte, en la figura 38, cuando P describe el

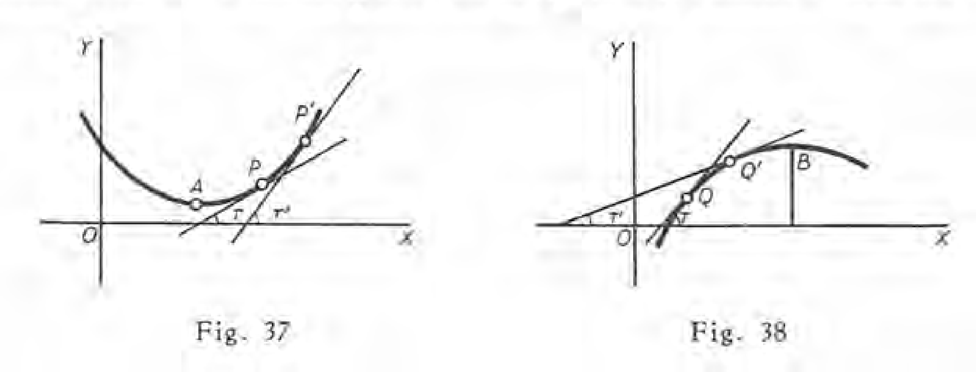


Fig. 37 Fig. 38

arco QB la pendiente disminuye, y $f'(x)$ es una función decreciente. Por tanto, en el primer caso $f''(x)$ es positiva y en el segundo caso es negativa. De aquí el siguiente criterio para determinar el sentido de la concavidad de una curva en un punto:

La gráfica de $y = f(x)$ *es cóncava hacia arriba si la segunda derivada de* y *con respecto a* x *es positiva; es cóncava hacia abajo si esta derivada es negativa.*

56. Segundo método para determinar máximos y mínimos. En el punto A, de la figura 37, el arco es cóncavo hacia arriba y la ordenada tiene un valor mínimo. En este caso, $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es positiva. En el punto B de la figura 38, se tiene $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ negativa.

Las condiciones suficientes para máximos y mínimos de $f(x)$ correspondientes a valores críticos de la variable son, pues, las siguientes:

$f(x)$ es un máximo si $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es negativa.

$f(x)$ es un mínimo si $f'(x) = 0$ y $f''(x)$ es positiva.

La **regla guía** para aplicar este criterio es la siguiente:

PRIMER PASO. *Hallar la primera derivada de la función.*

SEGUNDO PASO. *Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación; las raíces reales son los valores críticos de la variable.*

TERCER PASO. *Hallar la segunda derivada.*

CUARTO PASO. *Sustituir en la segunda derivada, en lugar de la variable, cada uno de los valores críticos obtenidos. Si el resultado es negativo, la función tiene un máximo para este valor crítico; si el resultado es positivo, la función tiene un mínimo.*

Cuando $f''(x) = 0$, o bien no existe, dicho procedimiento no es aplicable, aunque todavía puede existir un máximo o un mínimo; en este caso se aplica el primer método, dado en el Artículo 47, que es el fundamental. Ordinariamente el segundo método es aplicable; y cuando la obtención de la segunda derivada no es demasiado largo, este método es, por lo general, el más conveniente.

EJEMPLO 1. Apliquemos esta regla para obtener los máximos y mínimos de la función

$$M = x^2 + \frac{432}{x}$$

que estudiamos en el Artículo 44.

Solución. $f(x) = x^2 + \frac{432}{x}$.

Primer paso. $f'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$.

Segundo paso. $2x - \frac{432}{x^2} = 0$.

$x = 6$, valor crítico.

Tercer paso. $f''(x) = 2 + \frac{864}{x^3}$.

Cuarto paso. $f''(6) = +$.

Luego $f(6) = 108$, valor mínimo.

EJEMPLO 2. Calcular los máximos y mínimos de la función $x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, utilizando el segundo método.

Solución. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Primer paso. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

Segundo paso. $3x^2 - 6x - 9 = 0$;

luego los valores críticos son $x = -1$ y 3.

Tercer paso. $f''(x) = 6x - 6$.

Cuarto paso. $f''(-1) = -12$.

De donde $f(-1) = 10$ = ordenada de A = máximo.

$f''(3) = +12$. $\therefore$ $f(3) = -22$ = ordenada de B = mínimo.

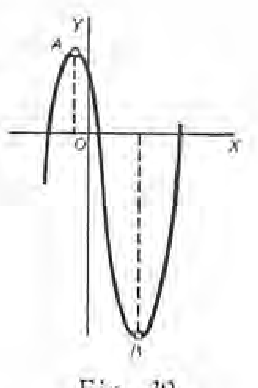


Fig. 39

PROBLEMAS

Calcular los máximos y mínimos de cada una de las funciones siguientes:

1. $x^3 + 3x^2 - 2$. *Sol.* Máx. $= 2$ para $x = -2$. Mín. $= -2$ para $x = 0$.

2. $x^3 - 3x + 4$. Máx. $= 6$ para $x = -1$. Mín. $= 2$ para $x = 1$.

3. $2x^3 - 3ax^2 + a^3$. $(a > 0)$ Máx. $= a^3$ para $x = 0$. Mín. $= 0$ para $x = a$.

4. $2 + 12x + 3x^2 - 2x^3$. Máx. $= 22$ para $x = 2$. Mín. $= -5$ para $x = -1$.

5. $3x - 2x^2 - \dfrac{4x^3}{3}$. Máx. $= \frac{5}{6}$ para $x = \frac{1}{2}$. Mín. $= -\frac{9}{2}$ para $x = -\frac{3}{2}$.

6. $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$. Máx. $= 2$ para $x = 0$. Mín. $= -3$ para $x = -1$. Mín. $= -30$ para $x = 2$.

7. $x^4 - 4x^2 + 4$. Máx. $= 4$ para $x = 0$. Mín. $= 0$ para $x = \pm\sqrt{2}$.

8. $\dfrac{ax}{x^2 + a^2}$. Máx. $= \frac{1}{2}$ para $x = a$. Mín. $= -\frac{1}{2}$ para $x = -a$.

9. $x^3 + 9x^2 + 27x + 9$.

10. $12x + 9x^2 - 4x^3$.

11. $x^2(x - 4)^2$.

12. $x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$.

13. $x^2 - \dfrac{a^4}{x^2}$.

14. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada, abierta por arriba. Calcular el volumen de la mayor caja que se puede obtener de 1 200 cm² de material. *Sol.* 4000 cm³.

15. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada, abierto por arriba. Debe tener 125 m³ de capacidad. Si el costo de las caras laterales es de 2 pesos por m², y el del fondo es de 4 pesos por m², ¿cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo? *Sol.* Un cubo de 5 m de lado.

16. Un prado rectangular de un jardín ha de tener 72 m² de área. Debe rodearse de un paseo de un metro de ancho en los lados y 2 m de ancho en las extremidades. Si el área total del prado y del paseo es mínima, ¿cuáles son las dimensiones del prado? *Sol.* 12 metros por 6 metros.

17. Se desea cercar un terreno rectangular de área dada, uno de cuyos lados coincide con la orilla de un río. Si no se necesita cerca del lado del río, demuéstrese que se necesitará la mínima cantidad de materiales cuando el largo del terreno sea dos veces el ancho.

18. Se quiere construir una artesa de una larga pieza rectangular de hojalata, doblando los dos bordes hacia arriba de manera que la sección transversal sea rectangular. Si el ancho de la pieza es de 36 cm, ¿cuál debe ser la profundidad de la artesa para que conduzca la mayor cantidad de agua? *Sol.* 9 cm.

19. Una ventana en forma de un rectángulo coronado de un triángulo equilátero tiene 5 m de perímetro. Calcular sus dimensiones para que deje pasar la cantidad máxima de luz.

Sol. El rectángulo debe tener 1,17 m de ancho y 74 cm de alto.

20. Una esfera sólida pesa p Kg. ¿Cuál es el peso del mayor cilindro circular recto que puede cortarse de la esfera?

Sol. $\frac{p}{\sqrt{3}}$ Kg.

21. El lado (altura oblicua) de un cono circular recto es una constante dada a. Calcular la altura correspondiente al cono de volumen máximo.

Sol. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

22. Una aceitera tiene la forma de un cilindro coronado de un cono con altura igual a $\frac{2}{3}$ del diámetro. Demostrar que para una capacidad dada, se necesita la mínima cantidad de material si la altura del cilindro es igual a la altura del cono.

23. Dada la parábola $y^2 = 8x$ y el punto $P(6, 0)$ en el eje, calcular las coordenadas de los puntos de la parábola más cercanos a P.

Sol. $(2, \pm 4)$.

24. La base de un triángulo isósceles dado mide 20 cm y su altura mide 8 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del mayor paralelogramo inscrito con un ángulo $= \text{arc tg } \frac{4}{5}$, y con un lado en la base del triángulo?

Sol. 10 cm por 5 cm.

25. Un minero desea abrir un túnel desde un punto A hasta un punto B situado 80 m más bajo que A y 240 m al Este de él. Debajo del nivel de A es roca; arriba de este nivel es tierra blanda. Si el costo de la construcción del túnel es 30 pesos por metro lineal en tierra y 78 pesos en roca, hállese el costo del túnel. *Sol.* 12 960 pesos.

26. Según una ordenanza, el área del papel de un cartel no debe ser mayor de 2,25 m². Se desea que las márgenes sean de 15 cm arriba y abajo y de 10 cm a la derecha y a la izquierda. ¿Qué dimensiones darán la máxima área impresa?

Sol. 1,837 m por 1,225 m.

27. Una corriente eléctrica fluye por una bobina de radio r y ejerce una fuerza F sobre un pequeño imán. El eje del imán está en una línea que pasa por el centro de la bobina y perpendicular al plano de ésta. La fuerza viene dada por la fórmula $F = \frac{x}{(r^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$, siendo x la distancia desde el centro de la bobina hasta el imán. Demostrar que F es máxima para $x = \frac{1}{2}r$.

57. Puntos de inflexión. Un *punto de inflexión* en una curva es el que separa arcos que tienen su concavidad en sentidos opuestos (véase el Art. 55).

En la figura 40, B es un punto de inflexión. Cuando el punto que describe una curva pasa por un punto de inflexión, la segunda derivada cambiará de signo en ese punto, y si es continua debe anularse. Luego, necesariamente, se verifica la siguiente igualdad:

(1) **En puntos de inflexión, $f''(x) = 0$.**

Resolviendo la ecuación que resulta de (1), se obtienen las abscisas de los puntos de inflexión. Para determinar el sentido de la concavidad cerca de un punto de inflexión, basta calcular $f''(x)$ para un valor de x un poco menor que la abscisa en ese punto y después para un valor un poco mayor que ella.

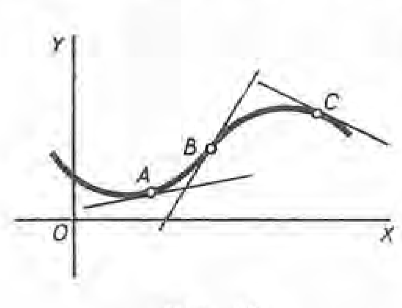


Fig. 40

Si $f''(x)$ cambia de signo, tenemos un punto de inflexión, y los signos que obtenemos determinan si en la vecindad del punto la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

El lector debe observar que cerca de un punto donde la curva es cóncava hacia arriba (como en A) la curva está arriba de la tangente, y en un punto donde la curva es cóncava hacia abajo (como en C) la curva está debajo de la tangente. En un punto de inflexión (como en B), es evidente que la tangente atraviesa la curva.

A continuación damos una regla para hallar los puntos de inflexión de la curva cuya ecuación es $y = f(x)$. La regla comprende también instrucciones para examinar el sentido de la concavidad.

PRIMER PASO. *Se halla* $f''(x)$.

SEGUNDO PASO. *Se iguala a cero* $f''(x)$, *se resuelve la ecuación resultante y se consideran las raíces reales de la ecuación.*

TERCER PASO. *Se calcula* $f''(x)$, *primero para valores de* x *un poco menores y después un poco mayores, que cada una de las raíces obtenidas en el segundo paso. Si* $f''(x)$ *cambia de signo, tenemos un punto de inflexión.*

Cuando $f''(x)$ *es positivo, la curva es cóncava hacia arriba* $\overset{+}{\smile}$.*

Cuando $f''(x)$ *es negativo, la curva es cóncava hacia abajo* $\underset{-}{\frown}$.*

* Una manera de recordar fácilmente esta regla es tener presente que una vasija que tiene la forma de la curva cóncava hacia arriba retendrá (+) agua, y que una cóncava hacia abajo derramará (−) agua.

A veces conviene descomponer $f''(x)$ en factores antes del tercer paso

Se supone que $f'(x)$ y $f''(x)$ son continuas. La resolución del problema 2 que damos a continuación enseña cómo se discute un caso donde $f'(x)$ y $f''(x)$ son infinitas.

PROBLEMAS

Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de las siguientes curvas:

1. $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

Solución. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1.$

Primer paso. $f''(x) = 36x^2 - 24x.$

Segundo paso. $36x^2 - 24x = 0.$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3}$ y $x = 0$ son las raíces.

Tercer paso. $f''(x) = 36x(x - \frac{2}{3}).$

Cuando $x < 0$, $f''(x) = +.$

Cuando $\frac{2}{3} > x > 0$, $f''(x) = -.$

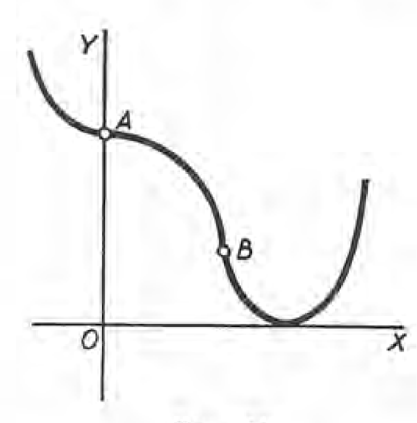


Fig. 41

Luego la curva es cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = 0$ (A en la figura 41) y cóncava hacia abajo a la derecha de ese punto.

Cuando $0 < x < \frac{2}{3}$, $f''(x) = -.$

Cuando $x > \frac{2}{3}$, $f''(x) = +.$

Luego la curva es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = \frac{2}{3}$ (B en la figura 41) y cóncava hacia arriba a la derecha de ese punto.

Por tanto, los puntos $A(0, 1)$ y $B(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ son puntos de inflexión.

Evidentemente la curva es cóncava hacia abajo entre $A(0, 1)$ y $B(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$, y cóncava hacia arriba en todos sus puntos situados a la izquierda de A y a la derecha de B.

2. Hallar los puntos de inflexión y el sentido de la concavidad de la curva

$$(y-2)^3 = (x-4).$$

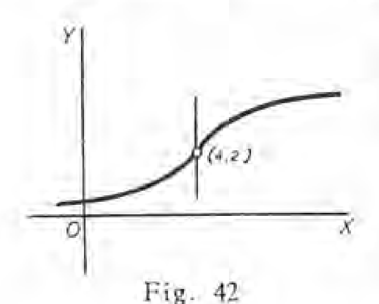


Fig. 42

Solución. $y = 2 + (x-4)^{1/3}.$

Primer paso. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3}(x-4)^{-2/3}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9}(x-4)^{-5/3}.$$

Segundo paso.

Cuando $x = 4$, tanto la primera derivada como la segunda se vuelven infinitas.

Tercer paso. Cuando $x < 4$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = +$.

Cuando $x > 4$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -$.

Luego, podemos concluir que la tangente en (4, 2) es perpendicular al eje de las x; que a la izquierda de (4, 2) la curva es cóncava hacia arriba, y que a la derecha de (4, 2) es cóncava hacia abajo. Por tanto, (4, 2) es un punto de inflexión.

3. $y = x^2$. *Sol.* Cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

4. $y = 5 - 2x - x^2$. Cóncava hacia abajo en todos sus puntos.

5. $y = x^3$. Cóncava hacia abajo a la izquierda y cóncava hacia arriba a la derecha de (0, 0).

6. $y = x^4$. Cóncava hacia arriba en todos sus puntos.

7. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$. Cóncava hacia abajo a la izquierda y cóncava hacia arriba a la derecha de $x = \frac{1}{2}$.

8. $y = 24x^2 - x^4$. 9. $y = x + \dfrac{1}{x}$. 10. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

58. Método para construcción de curvas dadas por su ecuación. El método elemental de construir una curva cuya ecuación se da en coordenadas rectangulares, método al que el estudiante está ya acostumbrado, consiste en despejar de la ecuación una de las variables, y (o x), dar valores arbitrarios a x (o y), calcular los valores correspondientes de y (o x), señalar en el papel los puntos respectivos, y trazar por ellos una curva suave; el resultado será una aproximación a la curva deseada. Ese procedimiento es en todo caso muy laborioso; y cuando la ecuación de la curva es de grado superior al segundo, puede ser que no sea posible despejar de la ecuación el valor de y o de x. Ordinariamente, todo lo que se desea es tener una idea

de la forma general de una curva, y el Cálculo diferencial nos suministra métodos para poder determinar la forma de una curva con muy poco cálculo numérico.

La primera derivada nos da la pendiente de la curva en cualquier punto; la segunda derivada determina los intervalos dentro de los cuales la curva es cóncava hacia arriba o hacia abajo, y los puntos de inflexión que separan estos intervalos; los puntos donde hay máximo son los puntos altos de la curva, y los puntos donde hay mínimo son los puntos bajos. Como guía en su trabajo puede el estudiante seguir la regla siguiente:

Regla para construcción de curvas, empleando coordenadas rectangulares.

PRIMER PASO. *Se halla la primera derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante al objeto de hallar las abscisas de los puntos máximos y mínimos.*

SEGUNDO PASO. *Se halla la segunda derivada; se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante a fin de hallar las abscisas de los puntos de inflexión.*

TERCER PASO. *Se calculan las ordenadas de los puntos cuyas abscisas se hallaron en los dos primeros pasos. Se determinan tantos otros puntos como se necesiten para tener una noción suficientemente clara de la curva. Se construye una tabla tal como la que damos en el problema que se resuelve a continuación.*

CUARTO PASO. *Se señalan en un papel los puntos que se han determinado, y se bosqueja la curva de manera de hacerla corresponder con los resultados de la tabla.*

Si el cálculo da valores grandes para las ordenadas, es mejor reducir la escala en el eje de las y de manera que la forma general de la curva se muestre dentro de los límites del papel. Debe emplearse papel cuadriculado. Los resultados deben arreglarse en forma de tabla, como se hace en los problemas resueltos. En esa tabla los valores de x deben ordenarse de modo que sean *algebraicamente crecientes*.

PROBLEMAS

Construir las siguientes curvas, empleando la regla anterior. Hallar también las ecuaciones de la tangente y la normal en cada punto de inflexión.

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$

Solución. Siguiendo la regla dada en la página anterior, tendremos:

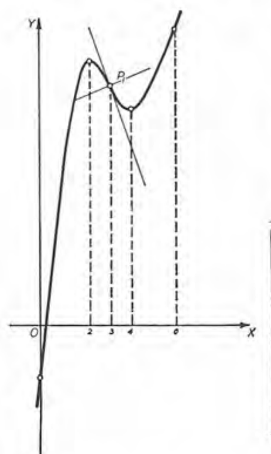


Fig. 43

Primer paso. $y' = 3x^2 - 18x + 24$,

$$3x^2 - 18x + 24 = 0,$$

$$x = 2,\ 4.$$

Segundo paso. $y'' = 6x - 18$,

$$6x - 18 = 0.$$

Tercer paso. $x = 3$.

x	y	y'	y''	Observaciones	Sentido de la concavidad
0	-7	+	$-$		hacia abajo
2	13	0	$-$	máx.	
3	11	$-$	0	pt. de infl.	
4	9	0	+	mín.	hacia arriba
6	29	+	+		

Cuarto paso. Marcando los puntos y bosquejando la curva, obtenemos la figura 43.

Para hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva en el punto de inflexión $P_1(3,\ 11)$, aplicaremos las fórmulas (1) y (2) del Artículo 43. Se obtiene $3x + y = 20$ para la tangente y $3y - x = 30$ para la normal.

2. $3y = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$.

Sol. Máx. $(-1,\ \frac{16}{3})$; mín. $(3,\ -\frac{16}{3})$; punto de inflexión, $(1,\ 0)$; tangente, $4x + y - 4 = 0$; normal, $x - 4y - 1 = 0$.

3. $6y = 12 - 24x - 15x^2 - 2x^3$.

Sol. Máx. $(-1,\ \frac{23}{6})$; mín. $(-4,\ -\frac{2}{3})$; punto de inflexión, $(-\frac{5}{2},\ \frac{19}{12})$.

4. $y = x^4 - 8x^2$.

Sol. Máx. $(0,\ 0)$; mín. $(\pm 2,\ -16)$; puntos de inflexión $(\pm\frac{2}{3}\sqrt{3},\ -\frac{80}{9})$.

5. $y = 5x - x^5$.

Sol. Máx. $(1,\ 4)$; mín. $(-1,\ -4)$; punto de inflexión, $(0,\ 0)$.

6. $y = \dfrac{6x}{x^2 + 3}$.

Sol. Máx. $(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$; mín. $(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$; puntos de inflexión $(-3,\ -\frac{3}{2})$, $(0,\ 0)$, $(3,\ \frac{3}{2})$.

7. $y = x^3 + 6x^2$.

8. $y = 4 + 3x - x^3$.

9. $3y = 4x^3 - 18x^2 + 15x$.

10. $y = (x - a)^3 + b$.

11. $12\,y = (x-1)^4 - 24\,(x-1)^2$.

12. $y = x^2(9 - x^2)$.

13. $y = 2\,x^5 - 5\,x^2$.

14. $y = 3\,x^5 - 5\,x^3$.

15. $y = x^5 - 5\,x^4$.

16. $y = x\,(x^2 - 4)^2$.

17. $ay = x^2 + \frac{a^4}{x^2}$.

18. $ay = x^2 + \frac{2\,a^3}{x}$.

19. $a^2y = x^3 + \frac{a^4}{x}$.

20. $a^2y = x^3 + \frac{a^5}{x^2}$.

21. $y = \frac{8\,a^3}{x^2 + 4\,a^2}$.

22. $y = \frac{x}{(x+a)^2}$.

23. $x^2y = (x^2+1)^2$.

24. $x^3y + 16\,y - x^3 = 0$.

59. Aceleración en un movimiento rectilíneo. En el Artículo 51 hemos definido la velocidad en un movimiento rectilíneo como la rapidez de variación de la distancia con respecto al tiempo. Ahora definimos la *aceleración* como *la rapidez de variación de la velocidad con respecto al tiempo*. Es decir, por definición,

$$(A) \qquad \text{Aceleración} = a = \frac{dv}{dt}.$$

De **(C)**, del Artículo 51, obtenemos también, por ser $v = \frac{ds}{dt}$, que

$$(B) \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Según los Artículos 45, 47 y 56, tenemos los siguientes criterios que se aplican a un instante $t = t_0$.

Si $a > 0$, v aumenta (algebraicamente).

Si $a < 0$, v disminuye (algebraicamente).

Si $a > 0$ y $v = 0$, s tiene un valor mínimo.

Si $a < 0$ y $v = 0$, s tiene un valor máximo.

Si $a = 0$ y cambia de signo de $+$ a $-$ (de $-$ a $+$) cuando t pasa por t_0, entonces v tiene un valor máximo (mínimo) cuando $t = t_0$

En un movimiento rectilíneo *uniformemente acelerado*, a es constante. Así, en el caso de un cuerpo que cae libremente bajo la acción de la gravedad, $a = 9{,}8$ m por segundo por segundo. Es decir, según (2) del Artículo 51,

$$s = 4{,}9\,t^2, \quad v = \frac{ds}{dt} = 9{,}8\,t, \quad a = \frac{dv}{dt} = 9{,}8.$$

PROBLEMAS

1. Se ha averiguado, experimentalmente, que si un cuerpo cae libremente desde el reposo en el vacío, cerca de la superficie de la Tierra, obedece aproximadamente a la ley $s = 4{,}9\ t^2$, siendo s el espacio (la altura) en metros, y t el tiempo en segundos. Calcular la velocidad y la aceleración, *a*) en un instante cualquiera; *b*) al final del primer segundo; *c*) al final del quinto segundo.

Solución. (1) $s = 4{,}9\ t^2$.

a) Derivando, $\frac{ds}{dt} = 9{,}8\ t,$

o sea, según (C) del Art. 51, (2) $v = 9{,}8\ t$ m por segundo.

Derivando ota vez, $\frac{dv}{dt} = 9{,}8,$

o sea, por (A) del artículo anterior, (3) $a = 9{,}8$ m por (seg.)^2,

lo que nos dice que la aceleración de un cuerpo que cae es constante; en otros términos, la velocidad aumenta 9,8 m por segundo en cada segundo que cae.

b) Para hallar v y a al final del primer segundo, bastará sustituir $t = 1$ en (2) y (3).

Tendremos:

$$v = 9{,}8 \text{ m por segundo}, \quad a = 9{,}8 \text{ m por (seg.)}^2.$$

c) Para hallar v y a al final del quinto segundo, sustituiremos $t = 5$ en (2) y (3).

Entonces, $v = 49$ m por segundo, $a = 9{,}8$ m por (seg.)^2.

Dadas las siguientes ecuaciones de movimientos rectilíneos, calcular el espacio recorrido, la velocidad y la aceleración en el instante indicado.

2. $s = 4\ t^2 - 6\ t;\quad t = 2.$ *Sol.* $s = 4,\quad v = 10,\quad a = 8.$

3. $s = 120\ t - 16\ t^2;\quad t = 4.$ $s = 224,\quad v = -8,\quad a = -32.$

4. $x = 32\ t - 8\ t^2;\quad t = 2.$ $x = 32,\quad v = 0,\quad a = -16.$

5. $y = 6\ t^2 - 2\ t^3;\quad t = 1.$ $y = 4,\quad v = 6,\quad a = 0.$

6. $s = \frac{t}{t+1};\quad t = 2.$ $s = \frac{2}{3},\quad v = \frac{1}{9},\quad a = -\frac{2}{27}.$

7. $x = 16\ t^2 - 20\ t + 4;\quad t = 2.$

8. $y = 100 - 4\ t - 8\ t^2;\quad t = 3.$

9. $s = \sqrt{5\ t} + \frac{10}{\sqrt{5\ t}};\quad t = 5.$

10. $s = \sqrt[3]{3\ t + 2};\quad t = 2.$

En los siguientes problemas, calcular la aceleración en el instante indicado.

11. $v = 80 - 32\ t;\quad t = 0.$ *Sol.* $-32.$

12. $v = 4\ t^2 - 10\ t;\quad t = 2.$ 6.

13. $v = \dfrac{2}{t+1};\quad t = 1.$

Dadas las siguientes ecuaciones de movimientos rectilíneos, calcular el espacio recorrido y la aceleración en el instante en que la velocidad se anula por primera vez.

14. $s = 16\ t^2 - 64\ t + 64.$ *Sol.* $s = 0,\quad a = 32.$

15. $s = 120\ t - 16\ t^2.$

16. $s = 3\ c^2 t - t^3.$

17. $s = 5\ t + \dfrac{20}{t+1}.$

18. Una pelota que se lanza directamente hacia arriba se mueve según la ley

$$s = 25\ t - 5\ t^2,$$

si s se mide en metros y t en segundos.

Hallar: *a*) su posición y velocidad después de dos segundos y después de tres segundos; *b*) hasta qué altura ascenderá; *c*) a qué distancia se moverá en el cuarto segundo.

19. Si la ecuación de un movimiento rectilíneo es $s = \sqrt{t+1}$, demuéstrese que la aceleración es negativa y proporcional al cubo de la velocidad.

20. La altura (s m) alcanzada en t segundos por un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad de v_1 m por segundo, está dada por la fórmula $s = v_1 t - \frac{1}{2} g t^2$. Obtener una fórmula para la mayor altura que el cuerpo alcanza.

21. En el problema anterior, supóngase $v_1 = 50$, $g = 10$. Calcular: *a*) la velocidad al final de cuatro segundos y al final de seis segundos; *b*) la distancia recorrida durante el cuarto segundo y durante el sexto.

22. Un coche hace un recorrido en 10 minutos, moviéndose según la ley $s = 100\ t^2 - \frac{t^4}{2}$, midiendo t en minutos y s en metros. *a*) ¿Qué distancia recorre el coche? *b*) ¿Cuál es su velocidad máxima? *c*) ¿Qué distancia ha recorrido el coche cuando alcanza su velocidad máxima?

Sol. *a*) 5 000 m; *b*) 770 m por minuto; *c*) 2 778 m

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Construir la curva $(4 - 2\ x + x^2)\ y = 2\ x - x^2$, y hallar las ecuaciones de la tangente y la normal en cada punto de inflexión.

Sol. Máx. $(1, \frac{1}{3})$. Punto de inflexión $(0, 0)$: tangente, $x - 2\ y = 0$; normal, $2\ x + y = 0$. Punto de inflexión $(2, 0)$: tangente, $x + 2\ y - 2 = 0$; normal, $2\ x - y - 4 = 0$.

2. Cierta curva (la tractriz) es tal que la longitud de cada tangente desde su punto de contacto $P(x, y)$ hasta su intersección A con el eje de las x es la constante $c\,(AP = c)$. Demostrar:

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\pm y}{\sqrt{c^2 - y^2}}; \qquad\qquad b)\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{c^2 y}{(c^2 - y^2)^2}.$$

3. Determinar el valor de k de manera que las normales en los puntos de inflexión de la curva $y = k(x^2 - 3)^2$ pasen por el origen.

Sol. $k = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

CAPITULO VII

DERIVACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES. APLICACIONES

Ahora consideraremos funciones como

$$\operatorname{sen} 2x, \quad 3^x, \quad \log(1+x^2),$$

que se llaman *funciones trascendentes* para distinguirlas de las funciones algebraicas que hemos estudiado hasta aquí.

60. Fórmulas de derivación; lista segunda. Las siguientes fórmulas, que se agrupan aquí para referencia cómoda, se demostrarán en este capítulo. Estas y las dadas en el Artículo 29 abarcan todas las fórmulas para derivadas que se emplearán en este libro.

X $$\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}. \qquad (\ln v = \log_e v)$$

X a $$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}.$$

XI $$\frac{d}{dx}(a^v) = a^v \ln a \frac{dv}{dx}.$$

XI a $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}$$

XII $$\frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln u \cdot u^v \frac{dv}{dx}.$$

XIII $$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) = \cos v \frac{dv}{dx}.$$

XIV $$\frac{d}{dx}(\cos v) = -\operatorname{sen} v \frac{dv}{dx}.$$

XV $$\frac{d}{dx}(\text{tg } v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}.$$

XVI $$\frac{d}{dx}(\text{ctg } v) = -\csc^2 v \frac{dv}{dx}.$$

XVII $$\frac{d}{dx}(\sec v) = \sec v \text{ tg } v \frac{dv}{dx}.$$

XVIII $$\frac{d}{dx}(\csc v) = -\csc v \text{ ctg } v \frac{dv}{dx}.$$

XIX $$\frac{d}{dv}\text{vers } v = \text{sen } v \frac{dv}{dx}.$$

XX $$\frac{d}{dx}(\text{arc sen } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

XXI $$\frac{d}{dx}(\text{arc cos } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

XXII $$\frac{d}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

XXIII $$\frac{d}{dx}(\text{arc ctg } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

XXIV $$\frac{dv}{dx}(\text{arc sec } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

XXV $$\frac{d}{dx}(\text{arc csc } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

XXVI $$\frac{d}{dx}(\text{arc vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v-v^2}}.$$

61. El número *e*. Logaritmos naturales. Uno de los límites más importantes es

(1) $$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2{,}71828\ldots.$$

Este límite se representa por e. Demostrar rigurosamente que tal límite e existe, queda fuera del propósito de este libro. Por ahora nos contentaremos con trazar el lugar geométrico de la ecuación

$$(2) \qquad y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

y hacer ver, por la gráfica, que cuando $x \to 0$ la función $(1 + x)^{\frac{1}{x}} (= y)$ toma valores en la vecindad de 2,718... y que $e = 2{,}718\ldots$, aproximadamente.

Por la tabla adjunta vemos que cuando $x \to 0$ por la izquierda, y disminuye y tiende hacia e como límite, y cuando $x \to 0$ por la derecha, y aumenta y tiende igualmente hacia e como límite.

x	y	x	y
10	1,2710		
5	1,4310		
2	1,7320		
1	2,0000		
0,5	2,2500	− 0,5	4,0000
0,1	2,5937	− 0,1	2,8680
0,01	2,7048	− 0,01	2,7320
0,001	2,7169	− 0,001	2,7195

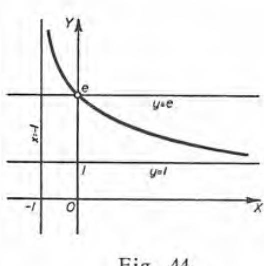


Fig. 44

La igualdad (1) la usaremos en el Artículo 63.

Cuando $x \to +\infty$, y tiende hacia 1 como límite, y cuando $x \to -1$ por la derecha, y aumenta sin límite. Las rectas $y = 1$ y $x = -1$ son asíntotas (fig. 44).

En el Capítulo XX daremos un método para calcular el valor de e con un número cualquiera de cifras decimales.

Los *logaritmos naturales* o *neperianos* son los que tienen por base el número e. Estos logaritmos desempeñan en las Matemáticas un papel muy importante. Para distinguir los logaritmos naturales de los vulgares, cuando la base no se enuncia explícitamente, emplearemos la siguiente notación:

Logaritmo natural de v (base e) = $\ln v$.
Logaritmo vulgar de v (base 10) = $\log v$.

Por definición, el logaritmo natural de un número N es el exponente x en la ecuación

$$(3) \qquad e^x = N; \text{ es decir, } x = \ln N.$$

Si $x = 0$, $N = 1$ y $\ln 1 = 0$. Si $x = 1$, $N = e$ y $\ln e = 1$.
Si $x \to -\infty$, entonces $N \to 0$, y escribimos $\ln 0 = -\infty$.

El estudiante está acostumbrado al uso de tablas de logaritmos vulgares, donde la base es 10. El **logaritmo vulgar** de un número N es el exponente y en la ecuación

(4) $$10^y = N, \text{ o sea, } y = \log N.$$

Hallemos la relación entre $\ln N$ y $\log N$.

En (3) tomemos logaritmos de base 10 en ambos miembros. Entonces, según (2) del Artículo 1, tendremos:

(5) $$x \log e = \log N.$$

Despejando x y teniendo en cuenta que según (3) es igual a $\ln N$, obtenemos la relación deseada,

(A) $$\ln N = \frac{\log N}{\log e}.$$

Es decir, *el logaritmo natural de un número cualquiera se obtiene dividiendo su logaritmo vulgar por log* e.

La ecuación (A) puede escribirse

(6) $$\log N = \log e \cdot \ln N.$$

Por tanto, *el logaritmo vulgar de un número se obtiene multiplicando su logaritmo natural por log* e. Este multiplicador se llama el **módulo** ($= M$) de los logaritmos vulgares.

Según las tablas, $\log e = 0{,}4343$ y $\frac{1}{\log e} = 2{,}303$.

La ecuación (A) puede ahora escribirse

(7) $$\ln N = 2{,}303 \log N.$$

Conviene tener a mano unas tablas de logaritmos naturales.

62. Funciones exponenciales y logarítmicas. La función de x que se define por la ecuación

(1) $$y = e^x \qquad (e = 2{,}718\ldots)$$

se llama *función exponencial*. Su gráfica es la de la figura 45. La función es creciente para todos los valores de x, como vamos a ver más adelante, y es continua en todos sus puntos.

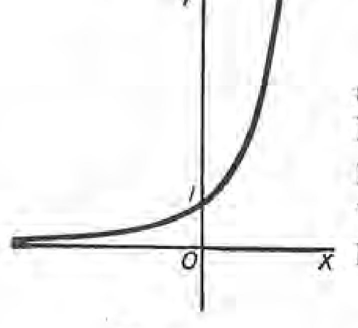


Fig. 45

De (1) tenemos, por definición,

(2) $$x = \ln y.$$

Las funciones e^x y $\ln y$ son funciones inversas (Art. 39). Permutando x y y en (2) tenemos

(3) $$y = \ln x,$$

en la que y se llama *función logarítmica* de x. Su gráfica es la de la figura 46. La función no está definida para valores negativos de x ni para $x = 0$. Es una función creciente para todos los valores de $x > 0$, y es continua en todas sus partes. Es decir (Art. 17), para cualquier valor a de x mayor que cero

(4) $$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a.$$

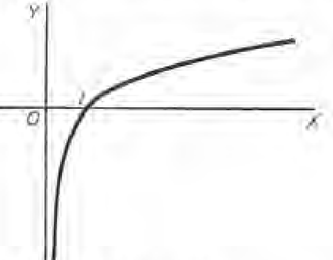


Fig. 46

Cuando $x \to 0$, según hemos dicho, $y \to -\infty$. El eje de las y es una asíntota de la curva.

Las funciones a^x y $\log_a x$ $(a > 0)$ tienen las mismas propiedades que e^x y $\ln x$, y sus gráficas son semejantes a las curvas representadas en las figuras 45 y 46.

63. Derivación de la función logarítmica.

Sea $$y = \ln v. \qquad (v > 0)$$

Derivando según la regla general (Art. 27), considerando v como la variable independiente, tenemos

PRIMER PASO. $$y + \Delta y = \ln (v + \Delta v).$$

SEGUNDO PASO. $$\Delta y = \ln (v + \Delta v) - \ln v$$
$$= \ln \left(\frac{v + \Delta v}{v} \right) = \ln \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right).$$

Según (2), Art. 1

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{\Delta v} \ln \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right).$$

Según vimos en el Artículo 16, no podemos hallar el límite del segundo miembro tal como está, puesto que el denominador Δv tiende a cero. Pero podemos transformar la expresión como sigue:

$$\frac{\Delta y}{\Delta v} = \frac{1}{v} \cdot \frac{v}{\Delta v} \ln \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right)$$

$\left[\text{Multiplicando por } \frac{v}{v} \right]$

$$= \frac{1}{v} \ln \left(1 + \frac{\Delta v}{v} \right)^{\frac{v}{\Delta v}}. \qquad \text{Según (2), Art. 1}$$

La expresión que sigue a ln tiene la forma del segundo miembro de la igualdad (2) del Artículo 61, con $x = \frac{\Delta v}{v}$.

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v} \ln e = \frac{1}{v}$$

$\left[\text{Cuando } \Delta v \to 0, \frac{\Delta v}{v} \to 0. \text{ Luego } \lim_{\Delta v \to 0}\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^{\frac{v}{\Delta v}} = e, \text{ según (1) del Art. 61. Empleando (4) del Art. 62, tenemos el resultado.}\right]$

Puesto que v es una función de x y se desea la derivada de $\ln v$ con respecto a x, debemos emplear la fórmula (A) del Artículo 38 para derivar *una función de función;* a saber,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dv}$ según el resultado del cuarto paso, obtenemos

X $$\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v} = \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}.$$

La derivada del logaritmo natural de una función es igual a la derivada de la función dividida por la función (o a la derivada de la función multiplicada por su recíproca).

Puesto que $\log v = \log e \ln v$, tenemos inmediatamente, según IV del Artículo 29,

X *a* $$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{\log e}{v}\frac{dv}{dx}.$$

64. Derivación de la función exponencial.

Sea $$y = a^v. \qquad (a > 0)$$

Tomando logaritmos de base e en ambos miembros, obtenemos

$$\ln y = v \ln a,$$

o sea, $$v = \frac{\ln y}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y.$$

Derivando con respecto a y según la fórmula **X**, resulta:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{y}.$$

De **(C)**, del Artículo 39, que trata de las *funciones inversas*, obtenemos

$$\frac{dy}{dv} = \ln a \cdot y,$$

o sea,

(1) $$\frac{dy}{dv} = \ln a \cdot a^v.$$

Puesto que v es una función de x y queremos hallar la derivada de a^v con respecto a x, emplearemos la fórmula **(A)** del Artículo 38. Así obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

XI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(a^v) = \ln a \cdot a^v \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Cuando $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, y **XI** se convierte en

XI *a* $$\frac{d}{dx}(e^v) = e^v \frac{dv}{dx}.$$

La derivada de una constante elevada a un exponente variable es igual al producto del logaritmo natural de la constante por la constante elevada al exponente variable y por la derivada del exponente.

65. Derivación de la función exponencial general. Demostración de la regla de potencias.

Sea $$y = u^v. \qquad (u > 0)$$

Tomando logaritmos de base e en ambos miembros,

$$\ln y = v \ln u,$$

o sea, $$y = e^{v \ln u}. \qquad \text{Según (3), Art. 61}$$

Derivando según la fórmula **XI *a***,

$$\frac{dy}{dx} = e^{v \ln u} \frac{d}{dx}(v \ln u)$$

$$= e^{v \ln u}\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right) \quad \text{según } \mathbf{V} \text{ y } \mathbf{X}$$

$$= u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}\right)$$

De donde,

$$\textbf{XII} \qquad \frac{d}{dx}(u^v) = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + \ln\, u \cdot u^v \frac{dv}{dx}.$$

La derivada de una función con un exponente variable es igual a la suma de los dos resultados que se obtienen derivando en primer lugar según **VI**, *considerando el exponente como constante, y después derivando según* **XI**, *considerando la función como constante.*

Sea $v = n$, una constante cualquiera; entonces **XII** se reduce a

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Así queda demostrado que la regla de potencias **VI** es cierta para un valor cualquiera de la constante n.

EJEMPLO 1. Derivar $y = \ln\,(x^2 + a)$.

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + a)}{x^2 + a} \qquad \text{según X}$$

$$[v = x^2 + a.]$$

$$= \frac{2x}{x^2 + a}.$$

EJEMPLO 2. Derivar $y = \log \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Solución. Según (2), pág. 3, podemos escribir

$$y = \log 2x - \log\,(1 + x^2).$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{2x}\frac{d}{dx}2x - \frac{\log e}{1 + x^2}\frac{d}{dx}(1 + x^2) \qquad \text{según III y X } a$$

$$= \log e\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{1 + x^2}\right) = \log e\,\frac{1 - x^2}{x(1 + x^2)}.$$

EJEMPLO 3. Derivar $y = a^{3x^2}$.

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = \ln a \cdot a^{3x^2}\frac{d}{dx}(3x^2) \qquad \text{según XI}$$

$$= 6x \ln a \quad a^{3x^2}.$$

EJEMPLO 4. Derivar $y = be^{c^2 + x^2}$.

Solución.

$$\frac{dy}{dx} = b\frac{d}{dx}(e^{c^2 + x^2}) \qquad \text{según IV}$$

$$= be^{c^2 + x^2}\frac{d}{dx}(c^2 + x^2) \qquad \text{según XI } a$$

$$= 2bxe^{c^2 + x^2}.$$

EJEMPLO 5. Derivar $y = x^{e^x}$.

Solución. $$\frac{dy}{dx} = e^x x^{e^x - 1} \frac{d}{dx}(x) + x^{e^x} \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \qquad \text{según XII}$$
$$= e^x x^{e^x-1} + x^{e^x} \ln x \cdot e^x$$
$$= e^x x^{e^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right).$$

66. Derivación logarítmica. A veces, en la derivación de las funciones logarítmicas, en vez de aplicar inmediatamente **X** y **X** *a* es posible simplificar el trabajo, empleando una de las fórmulas de (2) del Artículo 1. Siempre que esto sea posible es conveniente emplear esas fórmulas.

EJEMPLO 1. Derivar $y = \ln \sqrt{1 - x^2}$.

Solución. Empleando (2), Art. 1, podemos escribir esta expresión sin radicales como sigue:
$$y = \tfrac{1}{2} \ln (1 - x^2).$$

Entonces $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} \qquad \text{según X}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{1 - x^2} = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

EJEMPLO 2. Derivar $y = \ln \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$.

Solución. Según (2), Art. 1, tendremos:
$$y = \tfrac{1}{2} [\ln (1 + x^2) - \ln (1 - x^2)].$$

Entonces $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{1 + x^2} - \frac{\frac{d}{dx}(1 - x^2)}{1 - x^2} \right] \qquad \text{según III y X}$$
$$= \frac{x}{1 + x^2} + \frac{x}{1 - x^2} = \frac{2x}{1 - x^4}.$$

Para derivar una función exponencial, especialmente cuando se trata de una variable con un exponente variable, lo mejor es, en primer lugar, tomar el logaritmo natural de la función y después derivar. Así, el ejemplo 5 del Artículo 65 se resuelve con mayor elegancia como sigue:

EJEMPLO 3. Derivar $y = x^{e^x}$.

Solución. Tomando logaritmos naturales de ambos miembros,
$$\ln y = e^x \ln x. \qquad \text{Según (2), Art. 1}$$

Derivando ambos miembros con respecto a x, resulta

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = e^x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^x) \qquad \text{según X y V}$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot e^x, \qquad \text{según X y XI } a$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot y\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$$

$$= e^x x^{e^x}\left(\frac{1}{x} + \ln x\right).$$

EJEMPLO 4. Derivar $y = (4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}$.

Solución. Tomando logaritmos naturales de ambos miembros,

$$\ln y = \left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right) \ln (4x^2 - 7).$$

Derivando ambos miembros con respecto a x, resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right)\frac{8x}{4x^2 - 7} + \ln (4x^2 - 7) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = x(4x^2 - 7)^{2+\sqrt{x^2-5}}\left[\frac{8\left(2 + \sqrt{x^2 - 5}\right)}{4x^2 - 7} + \frac{\ln (4x^2 - 7)}{\sqrt{x^2 - 5}}\right]$$

En el caso de una función que consta de varios factores, a veces conviene tomar logaritmos naturales y, antes de derivar, simplificar según (2), Artículo 1. Así:

EJEMPLO 5. Derivar $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$

Solución. Tomando logaritmos naturales de ambos miembros,

$$\ln y = \tfrac{1}{2}\left[\ln (x-1) + \ln (x-2) - \ln (x-3) - \ln (x-4)\right].$$

Derivando ambos miembros con respecto a x,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$

$$= -\frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)},$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2 - 10x + 11}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}(x-3)^{\frac{3}{2}}(x-4)^{\frac{3}{2}}}.$$

PROBLEMAS

Derivar cada una de las siguientes funciones.

1. $y = \ln (ax + b)$. *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a}{ax + b}$.

2. $y = \ln (ax^2 + b)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,ax}{ax^2 + b}$.

3. $y = \ln (ax + b)^2$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,a}{ax + b}$.

4. $y = \ln ax^n$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{n}{x}$.

5. $y = \ln x^3$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{x}$.

6. $y = \ln^3 x\ [= (\ln x)^3]$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3\,\ln^2 x}{x}$.

7. $y = \ln (2\,x^3 - 3\,x^2 + 4)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6\,x(x-1)}{2\,x^3 - 3\,x^2 + 4}$.

8. $y = \log \dfrac{2}{x}$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\log e}{x}$.

9. $y = \ln \dfrac{x^2}{1 + x^2}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x(1+x^2)}$.

10. $y = \ln \sqrt{9 - 2\,x^2}$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2\,x}{9 - 2\,x^2}$.

11. $y = \ln \left(ax\sqrt{a + x}\right)$. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,a + 3\,x}{2\,x(a + x)}$.

12. $f(x) = x \ln x$. $f'(x) = 1 + \ln x$.

13. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

14. $s = \ln \sqrt{\dfrac{a + bt}{a - bt}}$. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{ab}{a^2 - b^2t^2}$.

15. $f(x) = x^2 \ln x^2$. $f'(x) = 2\,x(1 + 2\ln x)$.

16. $y = e^{nx}$. $\dfrac{dy}{dx} = ne^{nx}$.

17. $y = 10^{nx}$. $\dfrac{dy}{dx} = n\;10^{nx} \ln 10$.

18. $y = e^{x^2}$. $\dfrac{dy}{dx} = 2\,xe^{x^2}$.

19. $y = \dfrac{2}{e^x}$. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{e^x}$.

20. $s = e^{\sqrt{t}}$. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$.

21. $z = b^{2y}$ *Sol.* $\dfrac{dz}{dy} = 2\,b^{2y} \ln v.$

22. $u = se^s.$ $\dfrac{du}{ds} = e^s(s+1).$

23. $v = \dfrac{e^u}{u}.$ $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{e^u(u-1)}{u^2}.$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

25. $y = \ln(x^2e^x).$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} + 1.$

26. $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,e^x}{(e^x+1)^2}.$

27. $y = x^2e^{-x}.$ $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x}(2\,x - x^2).$

28. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$

29. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.$

30. $s = \dfrac{\ln t^2}{t^2}.$ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{2 - 4\ln t}{t^3}.$

31. $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}.$ $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}}.$

SUGESTION. En primer lugar hacer racional el denominador.

32. $y = x^x.$ *Sol.* $y' = x^x(1 + \ln x).$

33. $y = x^{\sqrt{x}}.$ $y' = \dfrac{x^{\sqrt{x}}\,(2+\ln x)}{2\sqrt{x}}.$

34. $s = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t.$ $\dfrac{ds}{dt} = \left(\dfrac{a}{t}\right)^t\left(\ln\dfrac{a}{t} - 1\right).$

35. $y = \dfrac{x\sqrt[3]{3\,x+a}}{\sqrt{2\,x+b}}.$ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3\,x+a} - \dfrac{1}{2\,x+b}\right].$

36. $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x\sqrt{4-x^2}}.$ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{x}{4+x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{4-x^2}\right].$

37. $y = x^n(a+bx)^m.$ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{n}{x} + \dfrac{mb}{a+bx}\right].$

En los problemas 38 a 47 hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$ para el valor dado de x.

38. $y = \ln (x^2 + 2)$; $x = 4$. *Sol.* $y' = \frac{4}{9}$.

39. $y = \log (4x - 3)$; $x = 2$. $y' = 0{,}3474$.

40. $y = x \ln \sqrt{x + 3}$; $x = 6$. $y' = 1{,}4319$.

41. $y = xe^{-2x}$; $x = \frac{1}{2}$. $y' = 0$.

42. $y = \frac{\ln x^2}{x}$; $x = 4$. $y' = -0{,}0483$.

43. $y = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x + 1}$; $x = 1$.

44. $y = \log \sqrt{25 - 4x}$; $x = 5$.

45. $y = 10^{\sqrt{x}}$; $x = 4$.

46. $y = \left(\frac{3}{x}\right)^x$; $x = 3$.

47. $y = \frac{x^3\sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt[3]{20 - 3x}}$; $x = 4$.

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para cada una de las siguientes funciones:

48. $y = \ln cx$.

49. $y = e^{ax}$.

50. $y = x \ln x$.

51. $y = e^{x^2}$.

52. $y = \ln \frac{x - a}{x + a}$.

53. $y = \frac{e^x}{x^2}$.

Derivar cada una de las siguientes funciones:

54. $\ln \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

55. $\frac{\ln \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

56. $\log \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{x + a}}$.

57. $\ln \frac{t}{\sqrt{2t + 3}}$.

58. $e^{\sqrt{x}} \ln \sqrt{x}$.

54. $10^t \log t$.

60. $(ae)^{nx}$.

61. $2^s s^2$.

62. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\sqrt{x}}$

67. Función sen x. La gráfica de

(1) $$y = \text{sen } x$$

es la representada en la figura 47. Todo valor de x se supone dado en radianes (Art. 2).

Así, para $x = 1$, $y = \text{sen (1 radián)} = \text{sen } 57^\circ 18' = 0{,}841$. La función sen x está definida y es continua para todos los valores de x.

Es importante notar que sen x es una *función periódica* cuyo período es 2π. En efecto,

$$\text{sen}\,(x + 2\pi) = \text{sen}\,x.$$

Es decir, cuando el valor de x se aumenta en un período, el valor de y se repite.

La periodicidad de la función tiene la siguiente interpretación en la gráfica de la figura 47: *La porción de curva para valores de* x *desde*

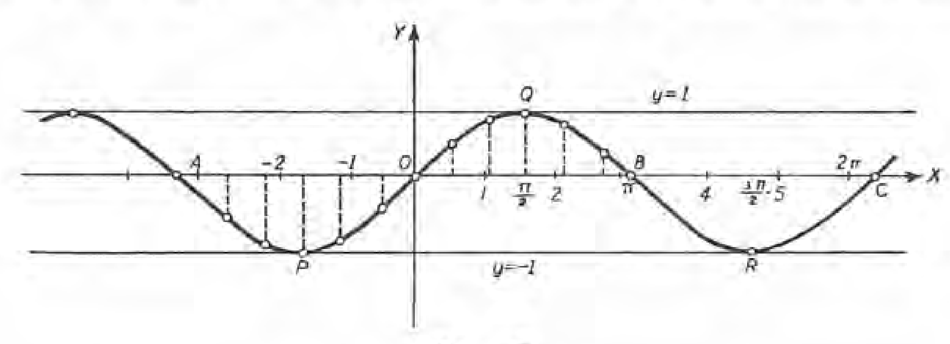


Fig. 47

0 *hasta* 2π *(arco* OQBRC *en la figura) puede desplazarse paralelamente a* OX, *hacia la derecha o hacia la izquierda, una distancia igual a un múltiplo cualquiera del período* 2π, *y en su nueva posición será una parte del lugar geométrico.*

68. **Límite de $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ cuando $x \to 0$.** Antes de derivar sen x (Artículo 69) es necesario demostrar que

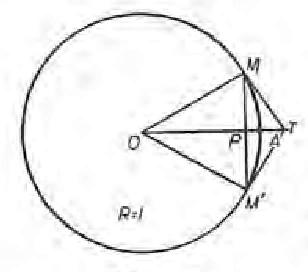


Fig. 48

$$(B) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1.$$

Este límite no se puede hallar por la regla del Artículo 16. Para su cálculo utilizaremos propiedades estudiadas en Geometría y Trigonometría.

Sea O (fig. 48) el centro de un círculo de radio unidad. Sea x = el ángulo AOM medido en radianes. Puesto que el radio es la unidad, el arco $AM = x$.

Tomemos el arco AM' = arco AM, y tracemos MT y $M'T$ tangentes a la circunferencia en M y M', respectivamente. Por Geometría,

$$MM' < \text{arc}\,MAM' < MT + M'T.$$

O sea, por Trigonometría,

$$2\,\text{sen}\,x < 2\,x < 2\,\text{tg}\,x.$$

Dividiendo todos los miembros por $2 \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Reemplazando cada término por su recíproco e invirtiendo los signos de desigualdad, tenemos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x.$$

Ahora bien: cuando x es pequeño, el valor de $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ queda comprendido entre 1 y $\cos x$. Y como cuando $x \to 0$, el límite de $\cos x$ es igual a $\cos 0 = 1$, puesto que $\cos x$ es continua para $x = 0$ (véase el Art. 17), resulta demostrada la igualdad (*B*).

Es interesante observar el comportamiento de esa función por su gráfica, el lugar geométrico de la ecuación

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

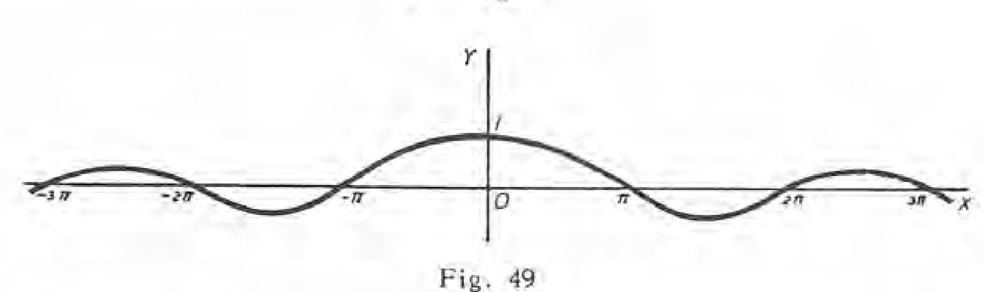


Fig. 49

La función no está definida para $x = 0$. Sin embargo, si le asignamos el valor 1 para $x = 0$, entonces la función está definida y es continua para todos los valores de x (véase el Art. 17).

69. Derivada de sen *v*. Sea

$$y = \operatorname{sen} v.$$

Según la regla general (Art. 27), considerando v como la variable independiente, tenemos

PRIMER PASO. $\qquad y + \Delta y = \operatorname{sen}(v + \Delta v).$

SEGUNDO PASO. $\qquad \Delta y = \operatorname{sen}(v + \Delta v) - \operatorname{sen} v.$

Para poder calcular el límite en el cuarto paso debemos transformar el segundo miembro. Con este fin empleamos la fórmula de (6) del Artículo 2,

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A - B),$$

haciendo $\qquad A = v + \Delta v, \quad B = v.$

Entonces

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=v+\tfrac{1}{2}\Delta v,\quad \tfrac{1}{2}(A-B)=\tfrac{1}{2}\Delta v.$$

Sustituyendo,

$$\operatorname{sen}(v+\Delta v)-\operatorname{sen} v=2\cos(v+\tfrac{1}{2}\Delta v)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\Delta v.$$

Luego $$\Delta y=2\cos\left(v+\frac{\Delta v}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\Delta v}{2}.$$

TERCER PASO. $$\frac{\Delta y}{\Delta v}=\cos\left(v+\frac{\Delta v}{2}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}.$$

CUARTO PASO. $$\frac{dy}{dv}=\cos v.$$

[Puesto que: $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\Delta v}{2}}{\frac{\Delta v}{2}}\right)=1$, según el Art. 68, y $\lim\limits_{\Delta v\to 0}\cos\left(v+\dfrac{\Delta v}{2}\right)=\cos v$.]

Sustituyendo en **(A)** del Artículo 38 este valor de $\frac{dy}{dv}$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=\cos v\frac{dv}{dx}.$$

$$\textbf{XIII}\qquad \therefore\ \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v)=\cos v\frac{dv}{dx}.$$

Se deja ahora al estudiante el enunciado de las reglas correspondientes.

70. Otras funciones trigonométricas. La función $\cos x$ está definida y es continua para cualquier valor de x. Es periódica, y su período es 2π. La gráfica de

$$y=\cos x$$

se obtiene de la figura 47, correspondiente a sen x, tomando como eje de las y la recta $x=\tfrac{1}{2}\pi$.

Por la gráfica de

$$y=\operatorname{tg} x,$$

representada en la figura 50, se ve que la función tg x es discontinua para un número infinito de valores de la variable independiente x;

a saber, cuando $x = (n + \frac{1}{2})\pi$, siendo n un número entero cualquiera positivo o negativo.

En realidad, cuando $x \to \frac{1}{2}\pi$, tg x se vuelve infinita. Pero de la relación tg $(\pi + x) =$ tg x vemos que la función tiene el período π, y los valores $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ difieren de $\frac{1}{2}\pi$ en un múltiplo de período.

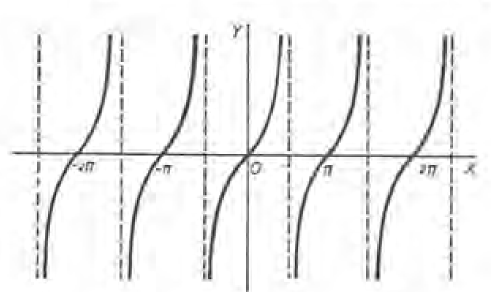


Fig. 50

La función ctg x tiene el período π. Está definida y es continua para todos los valores de x con excepción de $x = n\pi$, siendo n cualquier número entero como antes. Para estos valores ctg x se vuelve infinita.

Por último, sec x y csc x son periódicas, cada una con el período 2π. La primera es discontinua solamente cuando $x = (n + \frac{1}{2})\pi$, y la segunda solamente cuando $x = n\pi$. Los valores de x para los que estas funciones se vuelven infinitas determinan en las gráficas asíntotas verticales.

71. Derivada de cos v. Sea

$$y = \cos v.$$

Según **(3)** del Artículo 2, podemos escribir

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

Derivando según la fórmula **XIII**,

$$\frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\left(-\frac{dv}{dx}\right)$$

$$= -\operatorname{sen} v\,\frac{dv}{dx}.$$

$\left[\text{Puesto que } \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \operatorname{sen} v, \text{ según (3), Art. 2.}\right]$

XIV $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\cos v) = -\operatorname{sen} v\,\frac{dv}{dx}.$$

72. Demostración de las fórmulas XV a XIX. Estas fórmulas se establecen fácilmente si expresamos la función de que se trata en términos de otras funciones cuyas derivadas se han hallado.

Demostración de XV. Sea

$$y = \operatorname{tg} v.$$

Según (2), Artículo 2, podemos escribir

$$y = \frac{\operatorname{sen} v}{\cos v}.$$

Derivando según la fórmula **VII,**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos v \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} v) - \operatorname{sen} v \frac{d}{dx}(\cos v)}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\cos^2 v \frac{dv}{dx} + \operatorname{sen}^2 v \frac{dv}{dx}}{\cos^2 v}$$

$$= \frac{\frac{dv}{dx}}{\cos^2 v} = \sec^2 v \frac{dv}{dx}. \quad \text{Según (2), Art. 2}$$

$$\text{XV} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} v) = \sec^2 v \frac{dv}{dx}.$$

A fin de demostrar las fórmulas **XVI** a **XIX,** derívese la forma que se da a continuación para cada una de las funciones que siguen.

XVI. $\operatorname{ctg} v = \frac{1}{\operatorname{tg} v}$. **XVII.** $\sec v = \frac{1}{\cos v}$. **XVIII.** $\csc v = \frac{1}{\operatorname{sen} v}$.

XIX. seno verso v = vers $v = 1 - \cos v$.

Los desarrollos se dejan como ejercicios.

73. Observaciones. Para establecer las fórmulas **I** a **XIX** hemos tenido que aplicar la regla general (Art. 27), solamente para las siguientes funciones:

$$\text{III} \qquad \frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}. \quad \text{Suma algebraica.}$$

$$\text{V} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}. \qquad \text{Producto.}$$

VII $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$ Cociente.

VIII $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}.$$ Función de función.

IX $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$ Funciones inversas.

X $$\frac{d}{dx}(\ln v)=\frac{\frac{dv}{dx}}{v}.$$ Logaritmo.

XIII $$\frac{d}{dx}(\sin v)=\cos v\frac{dv}{dx}.$$ Seno.

No sólo dependen de éstas todas las otras fórmulas que se han deducido, sino que todas las que vamos a deducir dependen también de ellas. Por esto vemos que el establecimiento de las fórmulas fundamentales de derivación envuelve solamente el cálculo de dos límites de alguna dificultad, a saber,

$$\lim_{v\to 0}\frac{\text{sen } v}{v}=1$$ según el Art. 68

y $$\lim_{v\to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}}=e.$$ Según el Art. 61

PROBLEMAS

Derivar las siguientes funciones:

1. $y=\text{sen } ax^2$.

Solución. $$\frac{dy}{dx}=\cos ax^2\frac{d}{dx}(ax^2)$$ según XIII

$$[v=ax^2.]$$

$$=2\,ax\cos ax^2.$$

2. $y=\text{tg}\sqrt{1-x}$.

Solución. $$\frac{dy}{dx}=\sec^2\sqrt{1-x}\,\frac{d}{dx}(1-x)^{½}$$ según XV

$$[v=\sqrt{1-x}.]$$

$$=\sec^2\sqrt{1-x}\cdot ½(1-x)^{-½}(-1)$$

$$=-\frac{\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. $y = \cos^3 x.$

Solución. Esta función puede escribirse en la forma

$$y = (\cos x)^3.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\cos x)^2 \frac{d}{dx}(\cos x) \qquad \text{según VI}$$

$$[v = \cos x \text{ y } n = 3.]$$

$$= 3 \cos^2 x(-\operatorname{sen} x) \qquad \text{según XIV}$$

$$= -3 \operatorname{sen} x \cos^2 x.$$

4. $y = \operatorname{sen} nx \operatorname{sen}^n x.$

Solución. $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} nx \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)^n + \operatorname{sen}^n x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} nx) \qquad \text{según V}$$

$$[u = \operatorname{sen} nx \text{ y } v = \operatorname{sen}^n x.]$$

$$= \operatorname{sen} nx \cdot n(\operatorname{sen} x)^{n-1} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$+ \operatorname{sen}^n x \cos nx \frac{d}{dx}(nx) \qquad \text{según VI y XIII}$$

$$= n \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + n \operatorname{sen}^n x \cos nx$$

$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x(\operatorname{sen} nx \cos x + \cos nx \operatorname{sen} x)$$

$$= n \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen}(n+1)x.$$

5. $y = \operatorname{sen} ax.$ *Sol.* $y' = a \cos ax.$

6. $y = 3 \cos 2x.$ $y' = -6 \operatorname{sen} 2x.$

7. $s = \operatorname{tg} 3t.$ $s' = 3 \sec^2 3t.$

8. $u = 2 \operatorname{ctg} \dfrac{v}{2}.$ $\dfrac{du}{dv} = -\csc^2 \dfrac{v}{2}.$

9. $y = \sec 4x.$ $y' = 4 \sec 4x \operatorname{tg} 4x.$

10. $\rho = a \csc b\theta.$ $\rho' = -ab \csc b\theta \operatorname{ctg} b\theta$

11. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$ $y' = \operatorname{sen} x \cos x.$

12. $s = \sqrt{\cos 2t}.$ $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{-\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}.$

13. $\rho = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 3\theta}.$ $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \dfrac{\sec^2 3\theta}{(\operatorname{tg} 3\theta)^{\frac{2}{3}}}.$

14. $y = \dfrac{4}{\sqrt{\sec x}}.$ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec x}}.$

15. $y = x \cos x.$ $y' = \cos x - x \operatorname{sen} x.$

16. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta.$ $f'(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta.$

17. $\rho = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$. $\qquad \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\theta^2}$.

18. $y = \operatorname{sen} 2x \cos x$. $\qquad y' = 2 \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$.

19. $y = \ln \operatorname{sen} ax$. $\qquad y' = a \operatorname{ctg} ax$.

20. $y = \ln \sqrt{\cos 2x}$. $\qquad y' = -\operatorname{tg} 2x$.

21. $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$. $\qquad y' = e^{ax}(a \operatorname{sen} bx + b \cos bx)$.

22. $s = e^{-t} \cos 2t$. $\qquad s' = -e^{-t}(2 \operatorname{sen} 2t + \cos 2t)$.

23. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. $\qquad y' = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$.

24. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$. $\qquad y' = \sec x$.

25. $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta + a) \cos(\theta - a)$. $\qquad f'(\theta) = \cos 2\theta$.

26. $f(x) = \operatorname{sen}^2 (\pi - x)$. $\qquad f'(x) = -2 \operatorname{sen}(\pi - x) \cos(\pi - x)$.

27. $\rho = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \theta - \operatorname{tg} \theta + \theta$. $\qquad \rho' = \operatorname{tg}^4 \theta$.

28. $y = x^{\operatorname{sen} x}$. $\qquad \frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{sen} x} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x \right)$.

29. $y = (\cos x)^x$. $\qquad y' = y(\ln \cos x - x \operatorname{tg} x)$.

Hallar la segunda derivada de cada una de las siguientes funciones:

30. $y = \operatorname{sen} kx$. *Sol.* $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 \operatorname{sen} kx$.

31. $\rho = \frac{1}{4} \cos 2\theta$ $\qquad \frac{d^2\rho}{d\theta^2} = -\cos 2\theta$.

32. $u = \operatorname{tg} v$. $\qquad \frac{d^2u}{dv^2} = 2 \sec^2 v \operatorname{tg} v$.

33. $y = x \cos x$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -2 \operatorname{sen} x - x \cos x$.

34. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x - x^2 \operatorname{sen} x}{x^3}$.

35. $s = e^t \cos t$. $\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -2e^t \operatorname{sen} t$.

36. $s = e^{-t} \operatorname{sen} 2t$. $\qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -e^{-t}(3 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t)$.

37. $y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$. $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(a^2 - b^2) \operatorname{sen} bx + 2ab \cos bx]$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ en cada una de las funciones siguientes.

38. $y = \cos(x - y)$. Sol. $\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y) - 1}$.

39. $e^y = \operatorname{sen}(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y)}{e^y - \cos(x+y)}$.

40. $\cos y = \ln(x + y)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 + (x+y)\operatorname{sen} y}$.

En los problemas 41 a 50, hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$ para el valor dado de x (en radianes).

41. $y = x - \cos x$; $x = 1$. Sol. $y' = 1{,}841$.

42. $y = x \operatorname{sen}\frac{x}{2}$; $x = 2$. $y' = 1{,}381$.

43. $y = \ln\cos x$; $x = 0{,}5$. $y' = -0{,}546$.

44. $y = \frac{e^x}{x}$; $x = -0{,}5$. $y' = -3{,}639$.

45. $y = \operatorname{sen} x \cos 2x$; $x = 1$. $y' = -1{,}754$.

46. $y = \ln\sqrt{\operatorname{tg} x}$; $x = \frac{1}{4}\pi$. $y' = 1$.

47. $y = e^x \operatorname{sen} x$; $x = 2$. $y' = 3{,}643$.

48. $y = 10\, e^{-x}\cos\pi x$; $x = 1$. $y' = 3{,}679$.

49. $y = 5\, e^{\frac{x}{2}} \operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}$; $x = 2$. $y' = -21{,}35$.

50. $y = 10\, e^{-\frac{x}{10}} \operatorname{sen} 3x$; $x = 1$. $y' = -27$.

74. Funciones trigonométricas inversas. De la ecuación

$$(1) \qquad y = \operatorname{sen} x$$

se deduce que "x es la medida en radianes de un ángulo cuyo seno es igual a y". Para un ángulo central en un círculo de radio unidad, x es también igual al arco interceptado (véase el Artículo 2); luego la proposición que hemos puesto entre comillas se abrevia así:

$$(2) \qquad x = \operatorname{arc\,sen} y,$$

que se lee "x es igual a un arco cuyo seno es y". Permutando x y y en (2), obtenemos

$$(3) \qquad y = \operatorname{arc\,sen} x,$$

que se llama la *función inversa de seno de* x. Está definida para todo valor de x numéricamente menor que 1 o igual a 1. De (1) y (2) se ve que sen x y arc sen y son funciones inversas (Art. 39).

Muchos autores escriben la ecuación (3) en la forma $y = \text{sen}^{-1} x$, que se lee "el seno inverso de x". Creemos que esa notación no conviene porque $\text{sen}^{-1} x$, así escrito, podría leerse como sen x con el exponente -1.

Consideremos el valor de y que corresponde en (3) a $x = \frac{1}{2}$; tendremos:

$$(4) \qquad y = \text{arc sen } \tfrac{1}{2}.$$

Un valor de y que satisface (4) es $y = \frac{1}{6}\pi$, puesto que sen $\frac{1}{6}\pi =$ sen $30^\circ = \frac{1}{2}$. Un segundo valor es $y = \frac{5}{6}\pi$, puesto que sen $\frac{5}{6}\pi =$ sen $150^\circ = \frac{1}{2}$. Cada una de estas soluciones admite la adición o sustracción de un múltiplo cualquiera de 2π. Luego *el número de valores de* y *que satisfacen* (4) *es infinito*. Por esto se dice que la función arc sen x es "multiforme".

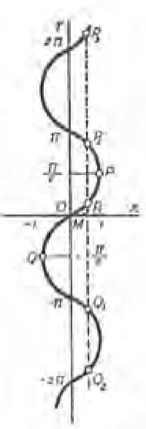


Fig. 51

La gráfica de arc sen x (fig. 51) muestra bien esta propiedad. Cuando $x = OM$, entonces

$$y = MP_1,\ MP_2,\ MP_3,\ \ldots,\ MQ_1,\ MQ_2,\ \ldots.$$

Para la mayor parte de los problemas que se presentan en Cálculo infinitesimal es permisible y aconsejable elegir *uno* de los muchos valores de y. Elegimos el valor entre $-\frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$; es decir, el de *menor valor numérico*. Así, por ejemplo,

$$(5) \qquad \text{arc sen } \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{6}\pi, \quad \text{arc sen } 0 = 0, \quad \text{arc sen } (-1) = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

La función arc sen x es ahora *uniforme*, y si

$$\textbf{(6)} \qquad y = \text{arc sen } x, \text{ entonces } -\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

En la gráfica nos limitamos al arco QOP.

De la misma manera cada una de las funciones trigonométricas inversas puede hacerse uniforme. Así, para arc cos x, si

$$\textbf{(7)} \qquad y = \text{arc cos } x, \text{ entonces } 0 \leqq y \leqq \pi.$$

Por ejemplo, $\quad \text{arc cos } \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi, \quad \text{arc cos } (-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\pi,$
$\text{arc cos } (-1) = \pi.$

De (6) y (7) tenemos ahora la identidad

$$(8) \qquad \text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

En la gráfica de arc cos x (fig. 52) nos limitamos al arco QP_1P.

Fig. 52

Más adelante daremos definiciones que determinan un valor único para cada una de las otras funciones trigonométricas inversas.

75. Derivación de arc sen v. Sea

$$y = \text{arc sen } v\,; \qquad (-\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi)$$

entonces $$v = \text{sen } y.$$

Derivando con respecto a y, según **XIII**,

$$\frac{dv}{dy} = \cos y\,;$$

luego, $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cos y}. \qquad \text{Según } (C) \text{ del Art. 39}$$

Y puesto que v es una función de x, tendremos, según (A) del Artículo 38,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - v^2}$, tomándose el signo positivo del radical, puesto que $\cos y$ es positivo para todos los valores de y entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, ambos inclusive.]

$$\textbf{XX} \qquad \therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc sen } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

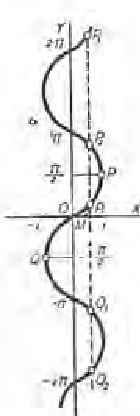


Fig. 51

Si $y = \text{arc sen } x$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. La gráfica es el arco QP de la figura 51. La pendiente es infinita en Q y P, y es la unidad en O. La función es creciente ($y' > 0$) por todo el intervalo desde $x = -1$ hasta $x = 1$.

76. Derivación de arco cos v. Sea

$$y = \text{arc cos } v\,; \qquad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

entonces $$v = \cos y.$$

Derivando con respecto a y según **XIV**,

$$\frac{dv}{dy} = -\text{sen } y\,;$$

luego $$\frac{dy}{dv} = -\frac{1}{\text{sen } y} \qquad \text{Según } (C)\text{, Art. 39}$$

Y puesto que v es una función de x, tendremos, según **(A)** del Artículo 38,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y} \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - v^2}$, tomándose el signo positivo del radical, porque sen y es positivo para todos los valores de y entre 0 y π, ambos inclusive.]

XXI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc cos } v) = -\frac{\dfrac{dv}{dx}}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Si $y = \text{arc cos } x$, entonces $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Cuando x aumenta de -1 a $+1$ (arco PQ de la figura 52), y disminuye de π a 0 $(y' < 0)$.

77. Derivación de arc tg *v*. Sea

(1) $$y = \text{arc tg } v; \text{ entonces}$$

(2) $$v = \operatorname{tg} y.$$

La función (1) se hace uniforme si elegimos el *menor valor numérico* de y; es decir, un valor entre $-\frac{1}{2}\pi$ y $\frac{1}{2}\pi$, correspondiente al arco AB de la figura 53. Asimismo, cuando $v \to -\infty$, $y \to -\frac{1}{2}\pi$; cuando $v \to +\infty$, $y \to \frac{1}{2}\pi$; o sea, simbólicamente,

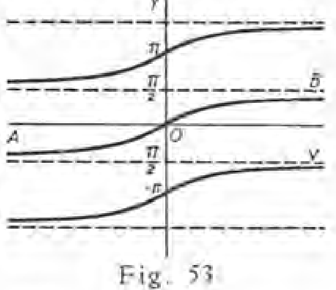


Fig. 53

(3) $$\text{arc tg } (+\infty) = \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\text{arc tg } (-\infty) = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Derivando (2) con respecto a y, según **XV**,

$$\frac{dv}{dy} = \sec^2 y,$$

y $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec^2 y}.$$ Según **(C)** del Art. 39

Puesto que v es una función de x, tendremos, según **(A)** del Artículo 38,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1 + v^2} \frac{dv}{dx}.$$

[$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + v^2$.]

De donde,

$$\text{XXII} \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc tg } v) = \frac{\dfrac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

Si $y = \text{arc tg } x$, entonces $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ y la función es creciente para todo valor de x.

La función $\text{arc tg } \dfrac{1}{x}$ es un buen ejemplo de función discontinua. Limitándonos a una rama de la gráfica de $y = \text{arc tg } \dfrac{1}{x}$, vemos en la figura 54 que cuando x se aproxima a cero por la izquierda, y tiende hacia $-\frac{1}{2}\pi$ como límite, y cuando x se aproxima a cero por la derecha, y tiende hacia $+\frac{1}{2}\pi$ como límite. Luego la función es discontinua cuando $x = 0$ (Art. 17). Su valor para $x = 0$ puede asignarse como nos plazca.

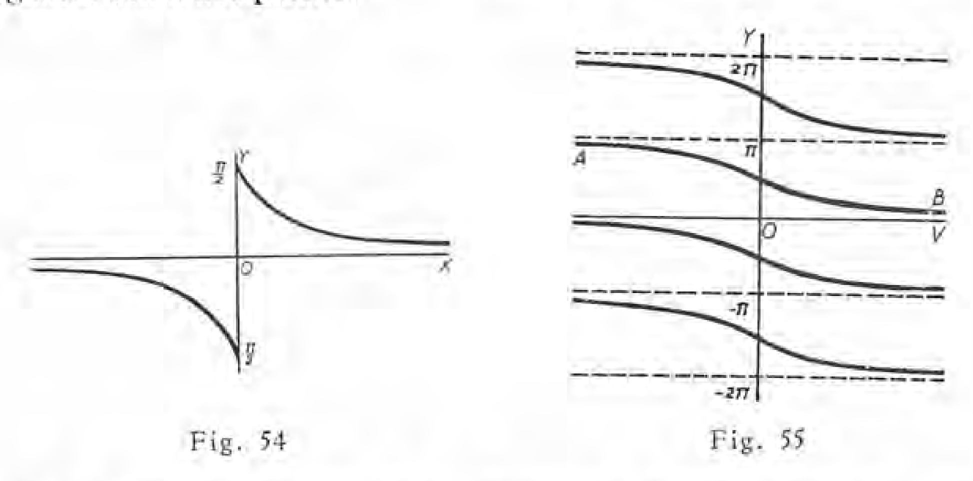


Fig. 54 Fig. 55

78. **Derivación de arc ctg v.** Siguiendo el mismo método, obtenemos

$$\text{XXIII} \qquad \frac{d}{dx}(\text{arc ctg } v) = -\frac{\dfrac{dv}{dx}}{1+v^2}.$$

La función es uniforme si

cuando $\qquad y = \text{arc ctg } v, \quad 0 < y < \pi,$

correspondiendo al arco AB de la figura 55.

Asimismo, si $v \to +\infty$, $y \to 0$; si $v \to -\infty$, $y \to \pi$. Es decir, simbólicamente,

$$\text{arc ctg } (+\infty) = 0; \quad \text{arc ctg } (-\infty) = \pi.$$

79. Derivación de arc sec v y arc csc v. Sea

(1) $$y = \text{arc sec } v.$$

Esta función está definida para todos los valores de v, con excepción de los que están entre -1 y $+1$. A fin de hacer uniforme la función (véase la figura 56),

cuando v es positivo, se toma y entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ (arco AB);
cuando v es negativo, se toma y entre $-\pi$ y $-\frac{1}{2}\pi$ (arco CD).

Asimismo, si $v \to +\infty$, $y \to \frac{1}{2}\pi$;

si $v \to -\infty$, $y \to -\frac{1}{2}\pi$.

De (1) se deduce, $v = \sec y$.

Derivando con respecto a y según **XVII**,

$$\frac{dv}{dy} = \sec y \ \operatorname{tg} y;$$

luego, según (*C*) del Artículo 39,

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\sec y \ \operatorname{tg} y}.$$

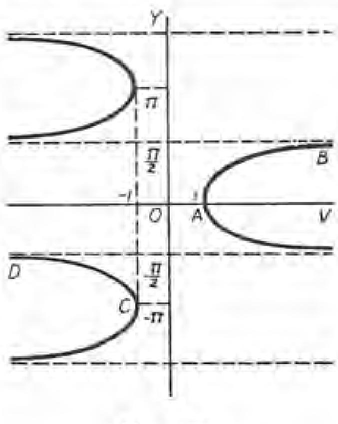


Fig. 56

Puesto que v es una función de x, tendremos, según (*A*) del Art. 38,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \ \operatorname{tg} y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\frac{dv}{dx}.$$

[$\sec y = v$ y $\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{v^2-1}$, tomándose el signo positivo del radical, porque $\operatorname{tg} y$ es positivo para todos los valores de y entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ y entre $-\pi$ y $-\frac{\pi}{2}$.]

XXIV $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc sec } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

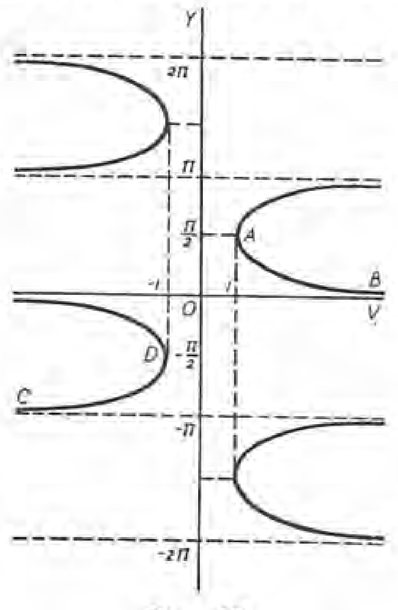


Fig. 57

Derivación de arc csc v. Sea

$$y = \text{arc csc } v;$$

entonces $$v = \csc y.$$

Derivando con respecto a y según **XVIII**, y siguiendo el método anterior, obtenemos

XXV $$\frac{d}{dx}(\text{arc csc } v) = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v\sqrt{v^2-1}}.$$

La función $y = \text{arc csc } v$ está definida para todos los valores de v, con excepción de los que están entre -1 y $+1$, y es multiforme. A fin de hacer uniforme la función (véase la figura 57),

cuando v es positivo, tomaremos y entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ (arco AB);
cuando v es negativo, tomaremos y entre $-\pi$ y $-\frac{1}{2}\pi$ (arco CD).

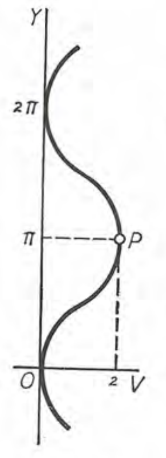


Fig. 58

80. Derivación de arc vers v. Sea

$$y = \text{arc vers } v; \text{ *}$$

entonces $$v = \text{vers } y.$$

Derivando con respecto a y según **XIX,**

$$\frac{dv}{dy} = \text{sen } y;$$

luego $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\text{sen } y}.$$ Según **(C)** del Art. 39

Puesto que v es una función de x, sustituyendo en **(A)** del Art. 38, tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{sen } y} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2v - v^2}} \frac{dv}{dx}.$$

[$\text{sen } y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - (1 - \text{vers } y)^2} = \sqrt{2v - v^2}$, tomándose el signo positivo del radical, porque sen y es positivo para todos los valores de y entre 0 y π inclusive.]

XXVI $$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\text{arc vers } v) = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{2v - v^2}}.$$

PROBLEMAS

Derivar las siguientes funciones:

1. $y = \text{arc tg } ax^2$.

Solución. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(ax^2)}{1 + (ax^2)^2}$$ según XXII

$$[v = ax^2.]$$

$$= \frac{2ax}{1 + a^2x^4}.$$

* Definida solamente para valores de v entre 0 y 2 inclusive, y multiforme. A fin de hacer uniforme la función, y se toma como el menor arco positivo cuyo seno verso es v; es decir, y está entre 0 y π inclusive. Por tanto, nos limitamos al arco OP de la gráfica (fig. 58).

2. $y = \text{arc sen } (3x - 4x^3)$.

Solución. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(3x - 4x^3)}{\sqrt{1 - (3x - 4x^3)^2}}$$ según XX

$$[v = 3x - 4x^3.]$$

$$= \frac{3 - 12x^2}{\sqrt{1 - 9x^2 + 24x^4 - 16x^6}} = \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $y = \text{arc sec } \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solución. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{x^2+1}{x^2-1}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 - 1}}$$ según XXIV

$$\left[v = \frac{x^2+1}{x^2-1}.\right]$$

$$= \frac{\frac{(x^2-1)2x - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2}}{\frac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \frac{2x}{x^2-1}} = -\frac{2}{x^2+1}$$

4. $y = \text{arc cos } \frac{x}{a}$. *Sol.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

5. $y = \text{arc sec } \frac{x}{a}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$.

6. $y = \text{arc ctg } \frac{x}{a}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$.

7. $y = \text{arc sec } \frac{1}{x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

8. $y = \text{arc csc } 2x$. $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$.

9. $y = \text{arc sen } \sqrt{x}$. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

10. $\theta = \text{arc vers } \varrho^2$. $\frac{d\theta}{d\varrho} = \frac{2}{\sqrt{2 - \varrho^2}}$.

11. $y = x \text{ arc sen } 2x$. $\frac{dy}{dx} = \text{arc sen } 2x + \frac{2x}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

12. $y = x^2 \text{ arc cos } x$. $\frac{dy}{dx} = 2x \text{ arc cos } x - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

13. $f(u) = u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \text{ arc sen } \frac{u}{a}.$ *Sol.* $f'(u) = 2\sqrt{a^2 - u^2}.$

14. $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + a \text{ arc sen } \frac{x}{a}.$ $f'(x) = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$

15. $v = a^2 \text{ arc sen } \frac{u}{a} - u\sqrt{a^2 - u^2}.$ $\frac{dv}{du} = \frac{2u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}}.$

16. $v = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \text{arc sen } \frac{u}{a}.$ $\frac{dv}{du} = \frac{u^2}{(a^2 - u^2)^{3/2}}.$

17. $v = \text{arc sen } \frac{u}{a} + \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}.$ $\frac{dv}{du} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2}.$

18. $v = a \text{ arc cos } \left(1 - \frac{u}{a}\right) + \sqrt{2au - u^2}.$ $\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}.$

19. $\phi = \text{arc tg } \frac{a + r}{1 - ar}.$ $\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{1 + r^2}.$

20. $x = r \text{ arc vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$ $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}}.$

21. $y = \frac{1}{3}x^3 \text{ arc tg } x + \frac{1}{6} \ln (x^2 + 1) - \frac{1}{6}x^2.$ $\frac{dy}{dx} = x^2 \text{ arc tg } x.$

En los problemas 22 a 27, hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$ para el valor dado de x.

22. $y = x \text{ arc sen } x;\quad x = \frac{1}{2}.$ *Sol.* $y' = 1,101.$

23. $y = x \text{ arc cos } x;\quad x = -\frac{1}{2}.$ $y' = 2,671.$

24. $y = \frac{\text{arc tg } x}{x};\quad x = 1.$ $y' = -0,285.$

25. $y = \sqrt{x} \text{ arc ctg } \frac{x}{4};\quad x = 4.$ $y' = -0,054.$

26. $y = \frac{\text{arc sec } 2x}{\sqrt{x}};\quad x = 1.$ $y' = 0,053.$

27. $y = x^2 \text{ arc csc } \sqrt{x};\quad x = 2.$ $y' = 2,142.$

Derivar cada una de las siguientes funciones:

28. $\text{arc sen } \sqrt{x}.$

29. $\text{arc tg } \frac{2}{x}.$

30. $x \text{ arc cos } \frac{x}{2}$

31. $\frac{\text{arc ctg } 2x}{x}.$

32. $\text{arc vers } (1 - x).$

33. $\text{arc sec } \sqrt{x}.$

34. $e^x \text{ arc cos } x.$

35. $\ln \text{ arc tg } x.$

36. $\sqrt{\text{arc sen } 2x}.$

37. $\frac{\text{arc cos } \sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$

PROBLEMAS

Bosquejar las siguientes curvas, y hallar la pendiente en cada punto en que la curva corta a los ejes coordenados.

1. $y = \ln x$. *Sol.* En $(1, 0)$, $m = 1$.

2. $y = \log x$. En $(1, 0)$, $m = 0{,}434$.

3. $y = \ln (4 - x)$. En $(3, 0)$, $m = -1$; en $x = 0$, $m = -\frac{1}{4}$.

4. $y = \ln \sqrt{4 - x^2}$.

5. Demostrar que si $y = \frac{1}{2} a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, entonces $y'' = \frac{y}{a^2}$.

Hallar el ángulo de intersección de cada uno de los siguientes pares de curvas:

6. $y = \ln (x + 1)$, $y = \ln (7 - 2x)$. *Sol.* $127° \; 53'$.

7. $y = \ln (x + 3)$, $y = \ln (5 - x^2)$.

8. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$. $109° \; 28'$.

9. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. $53° \; 8'$.

10. $y = \cos x$, $y = \operatorname{sen} 2x$.

Hallar los puntos máximos, mínimos y de inflexión de cada una de las siguientes curvas, y trazar las gráficas.

11. $y = x \ln x$. *Sol.* Mín. $\left(\frac{1}{e}, \; -\frac{1}{e}\right)$.

12. $y = \frac{x}{\ln x}$. Mín. (e, e); punto de inflexión, $(e^2, \; \frac{1}{2} e^2)$.

13. $y = \ln (8x - x^2)$. Máx. $(4, \; \ln 16)$.

14. $y = xe^x$. Mín. $\left(-1, \; -\frac{1}{e}\right)$; punto de inflexión, $\left(-2, \; -\frac{2}{e^2}\right)$.

15. $y = x^2 e^{-x}$.

16. Un cable telegráfico submarino consta de una alma de alambres de cobre, con una envoltura de material no conductor. Si x representa la razón del radio del alma al espesor de la envoltura, se sabe que la velocidad de transmisión varia como $x^2 \ln \frac{1}{x}$. Demuéstrese que la mayor velocidad se alcanza cuando $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

17. ¿Cuál es el valor mínimo de $y = ae^{kx} + be^{-kx}$? *Sol.* $2\sqrt{ab}$.

18. Hallar el punto máximo y los puntos de inflexión de la gráfica de $y = e^{-x^2}$, y trazar la curva.

Sol. Máx. (0, 1); puntos de inflexión, $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

19. Demostrar que si debajo de la curva del problema 18 se inscribe el mayor rectángulo posible, estando un lado del rectángulo en el eje de las x, dos vértices del rectángulo están en los puntos de inflexión de la curva.

Hallar los puntos máximos, mínimos y de inflexión en los intervalos indicados y bosquejar las siguientes curvas.

20. $y = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$; $(0 \text{ a } 2\pi)$.

Sol. Mín. $(\frac{1}{3}\pi, -0{,}3424)$; máx. $(\frac{5}{3}\pi, 3{,}4840)$; puntos de inflexión, $(0, 0)$, $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(2\pi, \pi)$.

21. $y = 2x - \operatorname{tg} x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

Sol. Máx. $(\frac{1}{4}\pi, 0.571)$; mín. $(\frac{3}{4}\pi, 5{,}712)$; puntos de inflexión, $(0, 0)$, $(\pi, 2\pi)$.

22. $y = \operatorname{tg} x - 4x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

Sol. Mín. $(\frac{1}{3}\pi, -2{,}457)$; máx. $(\frac{2}{3}\pi, -10{,}11)$; puntos de inflexión $(0, 0)$, $(\pi, -4\pi)$.

23. $y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$; $(0 \text{ a } 2\pi)$.

Sol. Máx. $(2{,}498, 5)$; mín. $(5{,}640, -5)$; puntos de inflexión $(0{,}927, 0)$, $(4{,}069, 0)$.

24. $y = x + \cos 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

25. $y = \operatorname{sen} \pi x - \cos \pi x$; $(0 \text{ a } 2)$.

26. $y = \frac{1}{2}x + \operatorname{sen} 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

27. $y = x - 2\cos 2x$; $(0 \text{ a } \pi)$.

28. $y = \frac{1}{2}\pi x + \operatorname{sen} \pi x$; $(0 \text{ a } 2)$.

29. Demostrar que el valor máximo de la función $y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

30. Se ha demostrado, teóricamente, que el efecto giratorio del timón de un buque es $k \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$ siendo θ el ángulo que el timón forma con la quilla, y k una constante. ¿Para qué valor de θ es el timón más eficaz? *Sol.* Unos 55°.

31. Una copa cónica tiene de profundidad a y de ángulo generador α. La copa está llena; cuidadosamente se deja caer en ella una esfera de tal tamaño que ocasione el mayor desbordamiento. Demuéstrese que el radio de la esfera es

$$\frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha + \cos 2\alpha}.$$

32. Hallar las dimensiones del cilindro de mayor volumen que pueda inscribirse en una esfera de radio 6 m. (Usar como parámetro el ángulo θ bajo el cual desde el centro de la esfera se ve el radio de la base del cilindro inscrito. Entonces, $r = 6 \operatorname{sen} \theta$, $h = 12 \cos \theta$.)

33. Resolver el problema 32 en el caso que se desee que sea máxima la superficie convexa del cilindro, usando el mismo parámetro.

34. Un cuerpo cuyo peso es W es arrastrado sobre un plano horizontal por una fuerza P, cuya línea de acción forma con el plano un ángulo x. La fórmula

$$P = \frac{m W}{m \operatorname{sen} x + \cos x}$$

da la magnitud de la fuerza, siendo m el coeficiente de rozamiento. Demostrar que la fuerza es mínima cuando $\operatorname{tg} x = m$.

35. Si un proyectil se dispara desde O sobre un plano inclinado que forma en O un ángulo constante α con el horizontal, la fórmula

$$R = \frac{2 v^2 \cos \theta \operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

da el alcance, siendo v y g constantes, θ el ángulo de elevación y R el alcance. Calcular el valor de θ que dará el máximo alcance hacia arriba del plano.

Sol. $\theta = \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \alpha$.

36. Para un tornillo de filete cuadrado cuyo paso es θ y su ángulo de rozamiento ϕ, la fórmula

$$E = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} (\theta + \phi) + f}$$

da el rendimiento E, siendo f una constante. Hallar el valor de θ para un rendimiento máximo, cuando ϕ es un ángulo constante conocido.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Las curvas $y = x \ln x$ y $y = x \ln (1 - x)$ se cortan en el origen y en otro punto A. Hallar el ángulo de intersección en A. *Sol.* 103° 30′.

2. Sobre unos mismos ejes coordenados bosquejar las siguientes curvas, y hallar su ángulo de intersección

$$y = \ln\left(\frac{x^3}{8} - 1\right), \quad y = \ln\left(3x - \frac{x^2}{4} - 1\right) \qquad \textit{Sol.}\ 32° 28'.$$

3. La recta AB es tangente en A a la curva cuya ecuación es $y = e^x + 1$, y corta en B el eje de las x. Hallar las coordenadas de A cuando la longitud de AB es mínima. *Sol.* (0, 2).

CAPITULO VIII

APLICACIONES A LAS ECUACIONES PARAMETRICAS Y POLARES Y AL CALCULO DE LAS RAICES DE UNA ECUACION

81. Ecuaciones paramétricas de una curva. Pendiente. A menudo las coordenadas x y y de un punto de una curva se expresan como funciones de una tercera variable t, llamada *parámetro*, en la forma

$$(1) \qquad \begin{cases} x = f(t), \\ y = \phi(t). \end{cases}$$

Cada valor de t da un valor de x y un valor de y y determina un punto de la curva. Las ecuaciones (1) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva. Si eliminamos t de las ecuaciones (1), obtenemos la *ecuación cartesiana rectangular* de la curva. Así, por ejemplo, las ecuaciones

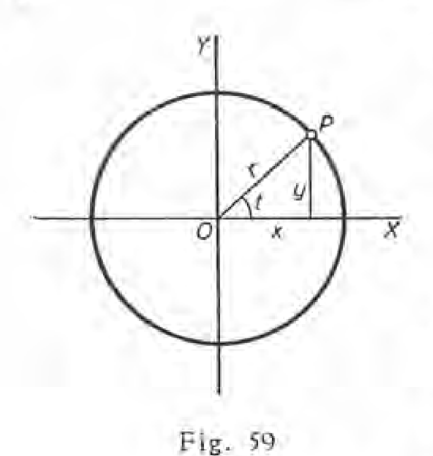


Fig. 59

$$(2) \qquad \begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \operatorname{sen} t, \end{cases}$$

son ecuaciones paramétricas de la circunferencia (fig. 59), siendo t el parámetro. Si eliminamos t, elevando al cuadrado ambos miembros y sumando los resultados, tenemos

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = r^2,$$

que es la ecuación cartesiana rectangular del círculo. Es evidente que si t varía de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ describirá una circunferencia completa.

Puesto que y es, según (1), una función de t, y t es una función (inversa) de x, tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} \qquad \text{según } (A) \text{ del Art. 38}$$

$$=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}; \qquad \text{según } (C) \text{ del Art. 39}$$

es decir,

$$(A) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\phi'(t)}{f'(t)}=\text{pendiente en } P(x, y).$$

Mediante esta fórmula podemos hallar la pendiente de una curva dadas sus ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO 1. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal, y las longitudes de la subtangente y la subnormal a la elipse *

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a\cos\phi, \\ y = b \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

en el punto donde $\phi = 45°$.

Solución. Siendo ϕ el parámetro, $\frac{dx}{d\phi} = -a \operatorname{sen}\phi$, $\frac{dy}{d\phi} = b\cos\phi$.

Sustituyendo en (A), $\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos\phi}{a \operatorname{sen}\phi} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg}\phi$ = pendiente en un punto cualquiera $= m$.

---

* Tracemos (fig. 60) los círculos auxiliares de radios a y b de la elipse. Si por los puntos B y C, en el mismo radio, se trazan BA paralela a OY y DP paralela a OX, esas rectas se cortarán en un punto $P(x, y)$ de la elipse. En efecto:

$$x = OA = OB\cos\phi = a\cos\phi$$

$$\text{y} \quad y = AP = OD = OC \operatorname{sen}\phi = b\operatorname{sen}\phi.$$

o sea, $\frac{x}{a} = \cos\phi$ y $\frac{y}{b} = \operatorname{sen}\phi$.

Ahora, elevando al cuadrado y sumando, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\phi+\operatorname{sen}^2\phi = 1,$$

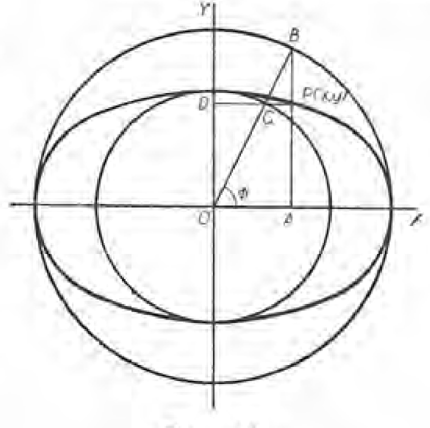


Fig. 60

que es la ecuación rectangular de la elipse. A veces, ϕ se llama ángulo excéntrico del punto P de la elipse.

Sustituyendo $\phi = 45^\circ$ en las ecuaciones dadas (3), obtenemos para coordenadas del punto de contacto, $x_1 = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$, $y_1 = \frac{1}{2} b\sqrt{2}$, y la pendiente m es

$$m_1 = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} 45^\circ = -\frac{b}{a}.$$

Sustituyendo en (1) y (2) del Artículo 43, y reduciendo, obtenemos

$$bx + ay = \sqrt{2}\, ab = \text{ecuación de la tangente},$$

$$\sqrt{2}\,(ax - by) = a^2 - b^2 = \text{ecuación de la normal}.$$

Sustituyendo en (3) y (4) del Artículo 43,

$$\frac{1}{2}\, b\sqrt{2}\left(-\frac{a}{b}\right) = -\frac{1}{2}\, a\sqrt{2} = \text{longitud de la subtangente},$$

$$\frac{1}{2}\, b\sqrt{2}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2\sqrt{2}}{2\,a} = \text{longitud de la subnormal}.$$

EJEMPLO 2. Dadas las ecuaciones paramétricas de la cicloide *

$$(4) \qquad \begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta), \end{cases}$$

(siendo θ el parámetro variable), hallar las longitudes de la subtangente, la subnormal y la normal en el punto (x_1, y_1), donde $\theta = \theta_1$.

Solución. Derivando, $\dfrac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$, $\dfrac{dy}{d\theta} = a \operatorname{sen}\theta$.

---

* Si un círculo rueda, sin resbalar, sobre una recta fija, la línea descrita por un punto de la circunferencia se llama cicloide. Sea a (fig. 61) el radio del círculo rodante, P el punto que traza la curva y M el punto de contacto con la recta fija OX, que se llama base. Si el arco PM es igual en longitud a OM, entonces P tocará en O si el círculo se hace rodar hacia la izquierda. Designando el ángulo PCM por θ, tenemos

$$x = ON = OM - NM = a\theta - a \operatorname{sen}\theta = a(\theta - \operatorname{sen}\theta),$$

$$y = NP = MC - AC = a - a\cos\theta = a(1 - \cos\theta);$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide: el parámetro es el ángulo θ que gira el radio del círculo rodante. $OD = 2\,\pi a$ se llama la base de un arco de cicloide, y el punto V se llama el vértice. Eliminando θ obtenemos la ecuación cartesiana rectangular

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2\,ay - y^2}.$$

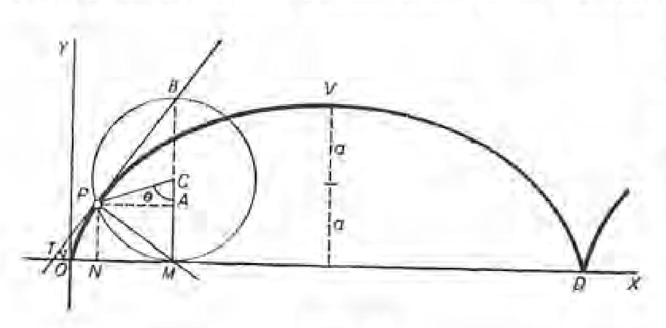


Fig. 61

Sustituyendo en (A) del Artículo 81,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} = m = \text{pendiente en un punto cualquiera.}$$

Cuando $\theta = \theta_1$, $y = y_1 = a(1 - \cos \theta_1)$, $m = m_1 = \dfrac{\operatorname{sen} \theta_1}{1 - \cos \theta_1}$.

Por lo dicho en el Artículo 43, hallamos (véase la figura 61)

$$TN = \text{subtangente} = \frac{a(1 - \cos \theta_1)^2}{\operatorname{sen} \theta_1};\quad NM = \text{subnormal} = a \operatorname{sen} \theta_1.$$

$MP = \text{longitud de la normal} = a\sqrt{2(1 - \cos \theta_1)} = 2\,a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta_1$. Según Art. 2.

En la figura, $PA = a \operatorname{sen} \theta_1$ (si $\theta = \theta_1$) = la subnormal NM, como se ha hallado arriba. Luego la construcción para la normal PM y la tangente PB es como se indica.

Tangentes horizontales y verticales. Según (A) y lo dicho en el Artículo 42, vemos que los valores del parámetro t para los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales se determinan así:

Tangentes horizontales:

se resuelve $\dfrac{dy}{dt} = 0$ con respecto a t.

Tangentes verticales:

se resuelve $\dfrac{dx}{dt} = 0$ con respecto a t.

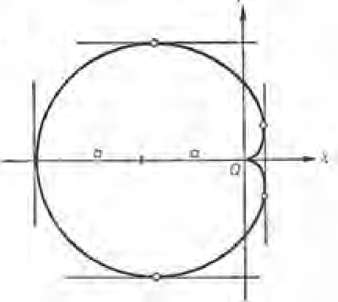


Fig. 62

EJEMPLO 3. Hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales a la cardioide (fig. 62) dada por las ecuaciones:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = a \cos \theta - \tfrac{1}{2} a \cos 2\theta - \tfrac{1}{2} a, \\ y = a \operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{2} a \operatorname{sen} 2\theta. \end{cases}$$

Solución. $\dfrac{dx}{d\theta} = a(-\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta)$; $\dfrac{dy}{d\theta} = a(\cos \theta - \cos 2\theta)$.

Tangentes horizontales. Debe ser $\cos \theta - \cos 2\theta = 0$. Sustituyendo (empleando (5), Art. 2) $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, y, resolviendo, obtenemos $\theta = 0$, $120°$, $240°$.

Tangentes verticales. Debe ser $-\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta = 0$. Sustituyendo (empleando (5), Art. 3) $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$, y, resolviendo, $\theta = 0$, $60°$, $180°$, $300°$.

La raíz común $\theta = 0$ debe rechazarse. En efecto, tanto el numerador como el denominador de (A) se anulan, y la pendiente es indeterminada (véase el Artículo 12). Según (5), $x = y = 0$ cuando $\theta = 0$. El punto O se llama un punto cuspidal.

Sustituyendo en (5) los otros valores, los resultados son:

Tangentes horizontales: puntos de contacto $(-\frac{3}{4}a, \quad \pm \frac{3}{4}a\sqrt{3})$.

Tangentes verticales: puntos de contacto $(\frac{1}{4}a, \ \pm \frac{1}{4}a\sqrt{3})$, $(-2a, 0)$.

Dos tangentes verticales coinciden, formando una ''tangente doble''.

Estos resultados están de acuerdo con la figura.

PROBLEMAS

Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal, y las longitudes de la subtangente y la subnormal, a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado.

		Tangente	*Normal*	*Subt.*	*Subn.*
1.	$x=t^2, \ y=2t+1; \ t=1.$ *Sol.*	$x-y+2=0,$	$x+y-4=0,$	3,	3.
2.	$x=t^3, \ y=3t; \ t=-1.$	$x-y-2=0,$	$x+y+4=0,$	$-3,$	$-3.$
3.	$x=3t, \ y=\frac{2}{t}; \ t=2.$	$x+6y-12=0,$	$6x-y-35=0,$	$-6,$	$-\frac{1}{6}.$
4.	$x=e^t, \ y=3e^{-t}; \ t=0.$	$3x+y-6=0,$	$x-3y+8=0,$	$-1,$	$-9.$

5. $x=\cos 2\theta, \ y=\operatorname{sen}\theta; \ \theta=\frac{1}{6}\pi.$

6. $x=t^2, \ y=2-t; \ t=1.$

7. $3x=t^3, \ 2y=t^2; \ t=2.$

8. $x=6t-t^2, \ y=2t+3; \ t=0.$

9. $x=t^2, \ y=t^3+3t; \ t=1.$

10. $x=\frac{1}{t}, \ y=2t; \ t=-1.$

11. $x=\operatorname{tg}\theta, \ y=\operatorname{ctg}\theta; \ \theta=\frac{1}{4}\pi.$

12. $x=-3e^{-t}, \ y=2e^t; \ t=0.$

13. $x=3\cos\alpha, \ y=5\operatorname{sen}\alpha; \ \alpha=\frac{1}{4}\pi.$

14. $x=\operatorname{sen}2\theta, \ y=\cos\theta; \ \theta=\frac{1}{3}\pi.$

15. $x=\ln(t-2), \ 3y=t; \ t=3.$

En cada uno de los siguientes problemas, construir las curvas y hallar los puntos de contacto de las tangentes horizontales y verticales.

16. $x=3t-t^3, \ y=t+1.$ *Sol.* Tangentes horizontales ninguna: puntos de contacto de tangentes verticales, $(2, 2)$, $(-2, 0)$.

17. $x=3-4\operatorname{sen}\theta, \ y=4+3\cos\theta.$ Tangentes horizontales, $(3, 1)$, $(3, 7)$; tangentes verticales, $(7, 4)$, $(-1, 4)$.

18. $x=t^2-2t, \quad y=t^3-12t.$

19. $x=h+r\cos\theta, \quad y=k+r\operatorname{sen}\theta.$

20. $x=\operatorname{sen}2t, \quad y=\operatorname{sen}t.$

21. $x=\cos^4\theta, \quad y=\operatorname{sen}^4\theta.$

En las siguientes curvas (ver las figuras en el Capítulo XXVI), hallar las longitudes de: *a*) la subtangente; *b*) la subnormal; *c*) la tangente; *d*) la normal, en un punto cualquiera.

22. La evolvente del círculo $\begin{cases} x = a(\cos t + t \operatorname{sen} t), \\ y = a(\operatorname{sen} t - t \cos t). \end{cases}$

Sol. *a*) $y \operatorname{ctg} t$; *b*) $y \operatorname{tg} t$; *c*) $\dfrac{y}{\operatorname{sen} t}$; *d*) $\dfrac{y}{\cos t}$.

23. La hipocicloide (astroide) $\begin{cases} x = 4a \cos^3 t, \\ y = 4a \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

Sol. *a*) $-y \operatorname{ctg} t$; *b*) $-y \operatorname{tg} t$; *c*) $\dfrac{y}{\operatorname{sen} t}$; *d*) $\dfrac{y}{\cos t}$.

24. La circunferencia $\begin{cases} x = r \cos t, \\ y = r \operatorname{sen} t. \end{cases}$

25. La cardioide $\begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$

26. La hoja de Descartes $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}. \end{cases}$

27. La espiral hiperbólica $\begin{cases} x = \dfrac{a}{t} \cos t, \\ y = \dfrac{a}{t} \operatorname{sen} t. \end{cases}$

82. Ecuaciones paramétricas. Segunda derivada. Si empleamos y' como símbolo para la primera derivada de y con respecto a x, entonces **(A)**, del Artículo 81, dará y' como función de t,

(1) $$y' = h(t).$$

Para hallar la segunda derivada y'', empléese otra vez la fórmula **(A)**, reemplazando y por y'. Entonces, tenemos

(B) $$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{f'(t)},$$

si $x = f(t)$ como en (1) del Artículo 81.

EJEMPLO. Hallar y'' para la cicloide (véase el ejemplo 2 del Artículo 81),

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$

Solución. Hemos hallado $y' = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$, y $\dfrac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$.

También, derivando,

$$\frac{dy'}{d\theta} = \frac{(1-\cos\theta)\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2} = \frac{\cos\theta - 1}{(1-\cos\theta)^2} = -\frac{1}{(1-\cos\theta)}.$$

Sustituyendo en (B),

$$y'' = -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}.$$

Nótese que y'' es negativo, y, por tanto, la curva es cóncava hacia abajo, como puede verse en la figura 61.

PROBLEMAS

1. En cada uno de los siguientes ejemplos, hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en función de t.

a) $x = t-1,\quad y = t^2+1.$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = 2t,\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2.$

b) $x = \dfrac{t^2}{2},\quad y = 1-t.$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{t},\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{1}{t^3}.$

c) $x = 2t,\quad y = \dfrac{t^3}{3}.$

d) $x = \dfrac{t^3}{6},\quad y = \dfrac{t^2}{2}.$

e) $x = a\cos t,\quad y = b\operatorname{sen} t.$

f) $x = 2(1-\operatorname{sen} t),\quad y = 4\cos t.$

g) $x = \operatorname{sen} t,\quad y = \operatorname{sen} 2t.$

h) $x = \cos 2t,\quad y = \operatorname{sen} t.$

2. Demostrar que la curva $x = \sec\theta$, $y = \operatorname{tg}\theta$ no tiene ningún punto de inflexión.

3. En cada una de las curvas siguientes construir la gráfica y hallar los puntos máximos, mínimos y de inflexión:

a) $x = 2a\operatorname{ctg}\theta,\quad y = 2a\operatorname{sen}^2\theta.$

Sol. Máx. $(0,\ 2a)$; puntos de inflexión, $\left(\pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3a}{2}\right)$.

b) $x = \operatorname{tg} t,\quad y = \operatorname{sen} t\cos t.$

Sol. Máx. $(1,\ \tfrac{1}{2})$; mín. $(-1,\ -\tfrac{1}{2})$;

puntos de inflexión, $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

83. Movimiento curvilíneo. Velocidad. Si en las ecuaciones paramétricas (1) del Artículo 81, el parámetro t es el tiempo, y las funciones $f(t)$ y $\phi(t)$ son continuas, al variar t de una manera continua el punto $P(x, y)$ describirá una curva llamada trayectoria. Tenemos entonces un *movimiento curvilíneo,* y las ecuaciones

$$(1) \qquad x = f(t),\quad y = \phi(t)$$

se llaman las ecuaciones del movimiento.

La velocidad v del móvil $P(x, y)$ en un instante cualquiera se determina por sus componentes horizontal y vertical.

La componente horizontal v_x es igual a la velocidad, a lo largo de OX, de la proyección M de P, y por esto es la rapidez de variación de x con respecto al tiempo. Luego, según **(C)** del Artículo 51, reemplazando s por x, obtenemos

$$(C) \qquad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

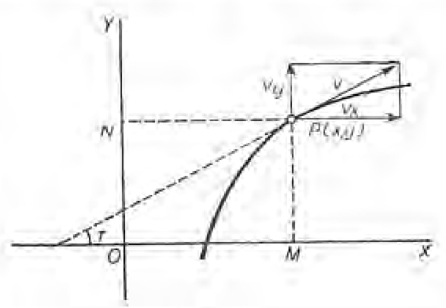


Fig. 63

De la misma manera, la componente vertical v_y, o rapidez de variación de y con respecto al tiempo, es

$$(D) \qquad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Tracemos los vectores v_x y v_y desde P (fig. 63), completemos el rectángulo y tracemos la diagonal desde P. El vector v así obtenido es el vector velocidad buscado. Según la figura, su magnitud y dirección se dan por las fórmulas

$$(E) \qquad v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Comparando estas fórmulas con la **(A)** del Artículo 81, vemos que tg τ es igual a la pendiente de la trayectoria en P. Luego la dirección de v es la misma que la de la tangente en P. A la magnitud del vector velocidad se le llama en inglés *speed*.

84. Movimiento curvilíneo. Aceleraciones componentes. En los tratados de Mecánica analítica, se demuestra que en el movimiento curvilíneo el vector aceleración α no se dirige a lo largo de la tangente como el vector velocidad, sino hacia el lado cóncavo de la trayectoria. Puede descomponerse en una componente tangencial α_t, y una componente normal α_n, siendo

$$\alpha_t = \frac{dv}{dt}; \quad \alpha_n = \frac{v^2}{R}.$$

(R es el radio de curvatura. Véase el Artículo 105.)

La aceleración puede también descomponerse en componentes paralelas a los ejes coordenados. Siguiendo el mismo método que se empleó en el Artículo 83 para las componentes de la velocidad, defi-

nimos las *componentes de la aceleración* paralelas a OX y OY, mediante las fórmulas:

$$(F) \qquad \alpha_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad \alpha_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Asimismo, si se construye un rectángulo con vértice en P y lados α_x y α_y, entonces α es la diagonal trazada por P. Luego

$$(G) \qquad \alpha = \sqrt{(\alpha_x)^2 + (\alpha_y)^2},$$

que da la magnitud (siempre positiva) del vector aceleración en un instante cualquiera.

En el problema 1, que damos a continuación, hacemos uso de las ecuaciones del movimiento de un proyectil, que aclaran muy bien los conceptos expuestos en este artículo y en el anterior.

PROBLEMAS

1. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, las ecuaciones del movimiento de un proyectil son

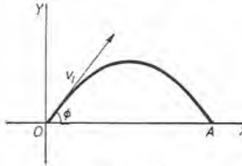


Fig. 64

$$x = v_1 \cos\phi \cdot t, \quad y = v_1 \operatorname{sen}\phi \cdot t - 4{,}9\,t^2;$$

siendo v_1 la velocidad inicial, ϕ el ángulo de tiro y t el tiempo en segundos, midiéndose x y y en metros. Hallar las componentes de la velocidad, las componentes de la aceleración, la velocidad y la aceleración: *a*) en un instante cualquiera; *b*) al final del primer segundo; cuando $v_1 = 100$ m por segundo y $\phi = 30°$. Hallar también: *c*) la dirección del movimiento al final del primer segundo; *d*) la ecuación cartesiana rectangular de la trayectoria.

Solución. Según (*C*) y (*D*),

a) $$v_x = v_1 \cos\phi; \quad v_y = v_1 \operatorname{sen}\phi - 9{,}8\,t.$$

Asimismo, según (*E*),

$$v = \sqrt{v_1^2 - 19{,}6\,tv_1 \operatorname{sen}\phi + 96\,t^2}.$$

Según (*F*) y (*G*),

$$\alpha_x = 0; \quad \alpha_y = -9{,}8; \quad \alpha = 9{,}8, \text{ dirección hacia abajo.}$$

b) Sustituyendo en estos resultados $t = 1$, $v_1 = 100$, $\phi = 30°$, obtenemos

$$v_x = 86{,}6 \text{ m por seg.} \qquad \alpha_x = 0.$$
$$v_y = 40{,}2 \text{ m por seg.} \qquad \alpha_y = -9{,}8 \text{ m por (seg.)}^2.$$
$$v = 95{,}5 \text{ m por seg.} \qquad \alpha = 9{,}8 \text{ m por (seg.)}^2.$$

c) $\tau = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{v_y}{v_x} = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{40{,}2}{86{,}6} = 24°\,54'$ = ángulo que forma la dirección del movimiento con la horizontal.

d) Cuando $v_1 = 100$ y $\phi = 30°$, las ecuaciones del movimiento se convierten en

$$x = 50\, t \sqrt{3}, \quad y = 50\, t - 4{,}9\, t^2.$$

Eliminando t, el resultado es $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{0{,}049}{75}\, x^2$, que representa una parábola.

2. Demostrar que la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil en el problema anterior es

$$y = x \operatorname{tg} \phi - \frac{4{,}9}{v_1^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \phi)\, x^2.$$

3. Si a un proyectil se le da una velocidad inicial de 48 m por segundo en una dirección inclinada 45° con la horizontal, hallar: *a*) las componentes de la velocidad al final del segundo segundo y del cuarto segundo; *b*) la velocidad y la dirección del movimiento en los mismos instantes.

Sol. *a*) Cuando $t = 2$, $v_x = 33{,}9$ m por seg., $v_y = 14{,}3$ m por seg.,
cuando $t = 4$, $v_x = 33{,}9$ m por seg., $v_y = -5{,}4$ m por seg.;
b) cuando $t = 2$, $v = 36{,}8$ m por seg., $\tau = 22°\ 54'$,
cuando $t = 4$, $v = 34{,}4$ m por seg., $\tau = -8°\ 58'$.

4. Con los datos del problema 3, hallar la mayor altura que el proyectil alcanza. Si el proyectil da en el suelo al mismo nivel horizontal del que partió, hallar el tiempo que ha estado en el aire y el ángulo del choque.

5. Un proyectil se lanza contra un muro vertical a la distancia de 150 m, con la velocidad inicial de 50 m por segundo. Demostrar que no puede dar en el muro en un punto más alto que 83,5 m arriba del eje de las x. ¿Cuál es ϕ para esta altura? *Sol.* $\phi = 59°\ 33'$.

6. Un punto, referido a coordenadas rectangulares, se mueve de manera que

$$x = a \cos t + b \quad \text{y} \quad y = a \operatorname{sen} t + c:$$

demostrar que la magnitud de su velocidad es constante.

7. La trayectoria de un punto móvil es la sinusoide

$$\begin{cases} x = at, \\ y = b \operatorname{sen} at; \end{cases}$$

demostrar: *a*) que la componente x de la velocidad es constante; *b*) que la aceleración del punto en un instante cualquiera es proporcional a su distancia al eje de las x.

8. Dadas las ecuaciones de movimiento $x = t^2$, $y = (t-1)^2$. *a*) Hallar la ecuación de la trayectoria en coordenadas rectangulares. *b*) Trazar la trayectoria, con los vectores correspondientes a la velocidad y la aceleración para $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$, $t = 2$. *c*) ¿Para qué valor del tiempo es la magnitud de la velocidad mínima? *d*) ¿Dónde está el punto cuando la magnitud de la velocidad es de 10 m por segundo?

Sol. *a*) Parábola, $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} = 1$; *c*) $t = \frac{1}{2}$; *d*) (16,9).

9. En un movimiento circular uniforme, es decir, cuando la magnitud de la velocidad es constante, demostrar que la aceleración en un punto cualquiera P es constante en magnitud y está dirigida hacia el centro del círculo, a lo largo del radio que pasa por P.

10. Las ecuaciones de un movimiento curvilíneo son $x=2\cos 2t$, $y=3\cos t$. *a*) Demostrar que el móvil oscila en un arco de la parábola $4y^2-9x-18=0$. Trazar la trayectoria. *b*) Trazar los vectores de la aceleración en los puntos donde $v=0$. *c*) Trazar el vector velocidad en el punto donde la magnitud de la velocidad es máxima.

Dadas las siguientes ecuaciones de movimiento curvilíneo, hallar en el instante dado v_x, v_y, v; α_x, α_y, α; la posición del punto (coordenadas); la dirección del movimiento. Hallar también la ecuación de la trayectoria en coordenadas rectangulares.

11. $x=t^2,\ y=2t;\quad t=2.$

12. $x=2t,\ y=t^3;\quad t=1.$

13. $x=t^3,\ y=t^2;\quad t=2.$

14. $x=3t,\ y=t^2-3;\quad t=3.$

15. $x=2-t,\ y=1+t^2;\quad t=0.$

16. $x=a\cos t,\ y=a\operatorname{sen} t;\quad t=\frac{3}{4}\pi.$

17. $x=4\operatorname{sen} t,\ y=2\cos t;\quad t=\frac{1}{2}\pi.$

18. $x=\operatorname{sen} 2t,\ y=2\cos t;\quad t=\frac{1}{2}\pi.$

19. $x=2\operatorname{sen} t,\ y=\cos 2t;\quad t=\frac{1}{2}\pi.$

20. $x=\operatorname{tg} t,\ y=\operatorname{ctg} t;\quad t=\frac{1}{4}\pi.$

85. Coordenadas polares. Angulo que forman el radio vector y la tangente. Sea la ecuación de una curva en coordenadas polares ϱ, θ

$$(1)\qquad \varrho=f(\theta).$$

Vamos a demostrar la siguiente proposición:

Teorema. *Si* ψ *es el ángulo que forman el radio vector* OP *y la tangente a la curva en* P, *entonces*

$$(H)\qquad \operatorname{tg}\psi=\frac{\varrho}{\varrho'}$$

siendo

$$\varrho'=\frac{d\varrho}{d\theta}.$$

Demostración. Consideremos la secante AB (fig. 65) que pasa por P y un punto $Q(\varrho + \Delta\varrho\,,\ \theta + \Delta\theta)$ de la curva y cerca de P. Tracemos PR perpendicular a OQ.

Entonces (véase la figura 65) $OQ = \varrho + \Delta\varrho$; ángulo $POQ = \Delta\theta$, $PR = \varrho \operatorname{sen} \Delta\theta$ y $OR = \varrho \cos \Delta\theta$. También,

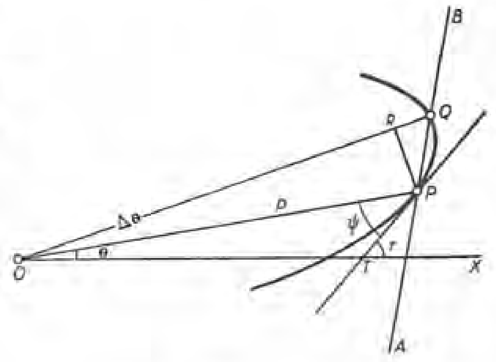
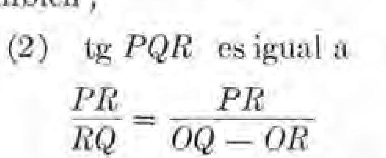


Fig. 65

(2) $\operatorname{tg} PQR$ es igual a



$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PR}{OQ - OR}$$

$$= \frac{\varrho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\varrho + \Delta\varrho - \varrho \cos \Delta\theta}$$

Sea ψ el ángulo que forman el radio vector OP y la tangente PT. Si ahora $\Delta\theta$ tiende a cero, entonces

a) el punto Q tiende a P;

b) la secante AB girará alrededor de P y tenderá a la tangente PT como posición límite;

c) el ángulo PQR tenderá a ψ como límite.

Luego

(3) $$\operatorname{tg} \psi = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\varrho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\varrho + \Delta\varrho - \varrho \cos \Delta\theta}$$

A fin de transformar esta fracción para poder aplicar los teoremas del Artículo 16, procedemos como sigue:

$$\frac{\varrho \operatorname{sen} \Delta\theta}{\varrho(1 - \cos \Delta\theta) + \Delta\varrho} = \frac{\varrho \operatorname{sen} \Delta\theta}{2\,\varrho \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\varrho}$$

[Puesto que según (5), Art. 2, $\varrho - \varrho \cos \Delta\theta = \varrho(1 - \cos \Delta\theta) = 2\,\varrho \operatorname{sen}^2 \frac{\Delta\theta}{2}$.]

$$= \frac{\varrho \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \Delta\theta}{\Delta\theta}}{\varrho \operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} + \dfrac{\Delta\varrho}{\Delta\theta}}$$

[Dividiendo numerador y denominador por $\Delta\theta$, y descomponiendo en factores el primer término del denominador.]

Cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$, entonces, según el Artículo 68,

$$\text{lím}\,\frac{\text{sen}\,\Delta\theta}{\Delta\theta} = 1\,, \quad \text{y} \quad \text{lím}\,\frac{\text{sen}\,\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1\,.$$

También,
$$\text{lím sen}\,\frac{\Delta\theta}{2} = 0\,, \quad \text{lím}\,\frac{\Delta\varrho}{\Delta\theta} = \frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho'.$$

Luego, los límites del numerador y del denominador son, respectivamente, ϱ y ϱ'. Así queda demostrada la fórmula **(*H*)**.

Para hallar la pendiente (tg τ en la figura), tomaremos ejes rectangulares OX, OY, como de costumbre. Entonces para $P\ (x, y)$ tenemos

$$(4) \qquad x = \varrho \cos\theta\,, \quad y = \varrho\ \text{sen}\,\theta\,.$$

Empleando (1), estas ecuaciones se convierten en las ecuaciones paramétricas de la curva, siendo θ el parámetro. La pendiente se halla aplicando la fórmula **(*A*)**. Así, de (4),

$$\frac{dx}{d\theta} = \varrho' \cos\theta - \varrho\ \text{sen}\,\theta\,, \quad \frac{dy}{d\theta} = \varrho'\ \text{sen}\,\theta + \varrho\cos\theta\,.$$

$$(I) \quad \textbf{Pendiente de la tangente} = \text{tg}\,\tau = \frac{\varrho'\ \text{sen}\,\theta + \varrho\cos\theta}{\varrho'\cos\theta - \varrho\ \text{sen}\,\theta}.$$

La fórmula (*I*) se verifica fácilmente utilizando la figura 65. En efecto, en el triángulo OPT se tiene: $\tau = \theta + \psi$. Entonces,

$$\text{tg}\,\tau = \text{tg}\,(\theta + \psi) = \frac{\text{tg}\,\theta + \text{tg}\,\psi}{1 - \text{tg}\,\theta\ \text{tg}\,\psi}.$$

Sustituyendo $\text{tg}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$, $\text{tg}\,\psi = \frac{\varrho}{\varrho'}$ y reduciendo, tenemos (*I*).

EJEMPLO 1. Hallar tg ψ y la pendiente para la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$.

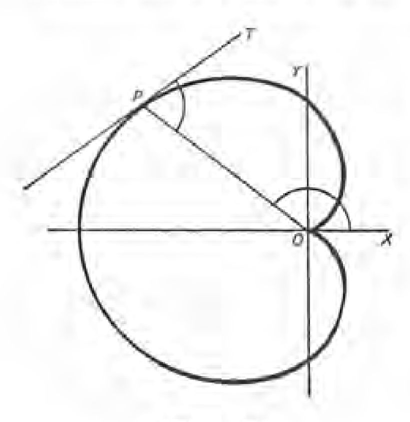


Fig. 66

Solución. $\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho' = a\ \text{sen}\,\theta$. Sustituyendo en (*H*) e (*I*),

$$\text{tg}\,\psi = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\ \text{sen}\,\theta} = \frac{2\,a\ \text{sen}^2\,\frac{1}{2}\theta}{2\,a\ \text{sen}\,\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}$$
$$= \text{tg}\,\tfrac{1}{2}\theta. \qquad [(5),\ \text{Art. 2.}]$$

$$\text{tg}\,\tau = \frac{a\ \text{sen}^2\,\theta + a(1-\cos\theta)\cos\theta}{a\ \text{sen}\,\theta\cos\theta - a(1-\cos\theta)\ \text{sen}\,\theta}$$
$$= \frac{\cos\theta - \cos 2\theta}{\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,\theta}$$
$$= \text{tg}\,\tfrac{3}{2}\theta. \qquad [(5),\ (6),\ \text{Art. 2.}]$$

En P (fig. 66) se tiene: ψ = ángulo $OPT = \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}$ ángulo XOP. Si la tangente PT se prolonga hasta que corte el eje OX, formando con él el ángulo τ, tenemos: ángulo $XOP = 180° -$ ángulo $OPT + \tau$.

Luego, $\tau = \frac{3}{2}\theta - 180°$, y $\text{tg}\,\tau = \text{tg}\,\frac{3}{2}\theta$, como antes [(3), Art. 2].

NOTA. La fórmula (H) se ha establecido para la figura 65. En cada problema, las relaciones entre los ángulos ψ, τ y θ deben determinarse examinando los signos de sus funciones trigonométricas y trazando una figura.

Para hallar el ángulo de intersección de dos curvas, C y C' (figura 67), cuyas ecuaciones son dadas en coordenadas polares, podemos proceder como sigue:

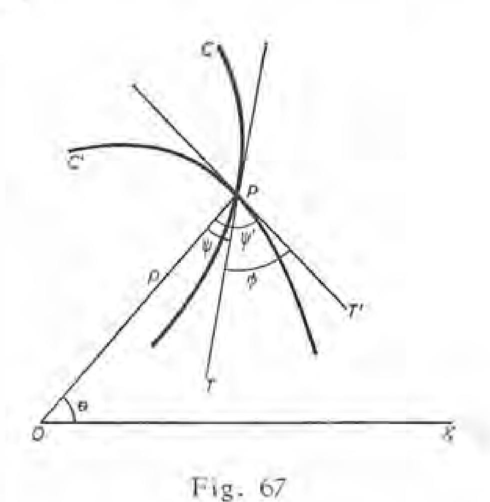


Fig. 67

Angulo TPT' = ángulo OPT' — ángulo OPT,

o sea, $\phi = \psi' - \psi$. Luego,

$$(J) \qquad \text{tg}\,\phi = \frac{\text{tg}\,\psi' - \text{tg}\,\psi}{1 + \text{tg}\,\psi'\,\text{tg}\,\psi},$$

calculándose $\text{tg}\,\psi'$ y $\text{tg}\,\psi$ según (H) de las ecuaciones de las curvas, y hallándose sus valores para el punto de intersección.

EJEMPLO 2. Hallar el ángulo de intersección de las curvas (Cap. XXVI)

$$\rho = a \text{ sen } 2\theta, \quad \rho = a \cos 2\theta.$$

Solución. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos, en el punto de intersección,

$$\text{tg}\,2\theta = 1, \quad 2\theta = 45°, \quad \theta = 22\tfrac{1}{2}°.$$

De la primera curva, empleando (H),

$$\text{tg}\,\psi' = \tfrac{1}{2}\,\text{tg}\,2\theta = \tfrac{1}{2}, \quad \text{para } \theta = 22\tfrac{1}{2}°.$$

De la segunda curva,

$$\text{tg}\,\psi = -\tfrac{1}{2}\,\text{ctg}\,2\theta = -\tfrac{1}{2}, \quad \text{para } \theta = 22\tfrac{1}{2}°.$$

Sustituyendo en (J),

$$\text{tg}\,\phi = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{4}{3}. \quad \therefore \quad \phi = \text{arc tg}\,\tfrac{4}{3}.$$

86. Longitudes de la subtangente y la subnormal en coordenadas polares. Tracemos por el origen la perpendicular NT al radio vector del punto P de la curva (fig. 68). Si PT es la tangente y PN la normal a la curva en P, entonces, por definición,

$$OT = \text{longitud de la subtangente},$$

y $$ON = \text{longitud de la subnormal},$$

de la curva en P.

En el triángulo OPT, $\operatorname{tg} \psi = \frac{OT}{\varrho}$. Luego,

(1) $OT = \varrho \operatorname{tg} \psi = \varrho^2 \frac{d\theta}{d\varrho}$ = **longitud de la subtangente en coordenadas polares.** *

En el triángulo OPN, $\operatorname{tg} \psi = \frac{\varrho}{ON}$. Luego,

(2) $ON = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{d\varrho}{d\theta}$ = **longitud de la subnormal en coordenadas polares.**

La *longitud de la tangente* ($= PT$) y la *longitud de la normal* ($= PN$) pueden deducirse de la figura, observando que cada una es la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

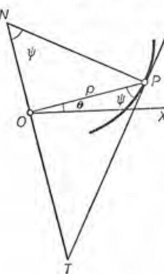


Fig. 68

EJEMPLO. Hallar las longitudes de la subtangente y de la subnormal de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$ (véase la figura en el Capítulo XXVI).

Solución. Derivando la ecuación de la curva, considerando ϱ como función implícita de θ, tenemos:

$$2\varrho \frac{d\varrho}{d\theta} = -2a^2 \operatorname{sen} 2\theta, \quad \text{o} \quad \frac{d\varrho}{d\theta} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\varrho}.$$

Sustituyendo en (1) y (2), resulta:

$$\text{Longitud de la subtangente} = -\frac{\varrho^3}{a^2 \operatorname{sen} 2\theta},$$

$$\text{Longitud de la subnormal} = -\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\varrho}.$$

---

* Cuando θ aumenta con ϱ, $\frac{d\theta}{d\varrho}$ es positiva y ψ es un ángulo agudo, como en la figura 68. Entonces la subtangente OT es positiva y se mide hacia la derecha de un observador que desde O mire en la dirección OP. Cuando $\frac{d\theta}{d\varrho}$ es negativa, la subtangente es negativa y se mide hacia la izquierda del observador.

Si deseamos expresar los resultados en función de θ, bastará hallar ϱ en función de θ de la ecuación dada, y sustituir. Así, en el ejemplo,

$$\varrho = \pm a\sqrt{\cos 2\theta};$$

luego, longitud de la subtangente $= \pm a \operatorname{ctg} 2\theta \sqrt{\cos 2\theta}$.

PROBLEMAS

1. En el círculo $\varrho = a \operatorname{sen} \theta$, hallar ψ y τ en función de θ.

Sol. $\psi = \theta$, $\tau = 2\theta$.

2. En la parábola $\varrho = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$, demostrar que $\tau + \psi = \pi$.

3. Demostrar que en la espiral logarítmica $\varrho = e^{a\theta}$ el ángulo ψ es constante. Puesto que la tangente forma un ángulo constante con el radio vector, esta curva se llama también espiral equiangular. (Véase la figura en el Capítulo XXVI.)

4. Demostrar que en la espiral de Arquimedes $\varrho = a\theta$ es $\operatorname{tg} \psi = \theta$. Hallar los valores de ψ cuando $\theta = 2\pi$ y 4π. (Véase la figura en el Capítulo XXVI.)

Sol. $\psi = 80^\circ 57'$ y $85^\circ 27'$.

Hallar las pendientes de las siguientes curvas en los puntos indicados.

5. $\varrho = a(1 - \cos\theta)$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. *Sol.* -1.

6. $\varrho = a \sec^2 \theta$; $\varrho = 2a$. 3.

7. $\varrho = a \operatorname{sen} 4\theta$; origen. $0, 1, \infty, -1$.

8. $\varrho^2 = a^2 \operatorname{sen} 4\theta$; origen. $0, 1, \infty, -1$.

9. $\varrho = a \operatorname{sen} 3\theta$; origen. $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

10. $\varrho = a \cos 3\theta$; origen.

11. $\varrho = a \cos 2\theta$; origen.

12. $\varrho = a \operatorname{sen} 2\theta$; $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

13. $\varrho = a \operatorname{sen} 3\theta$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

14. $\varrho = a\theta$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

15. $\varrho\theta = a$; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

16. $\varrho = e^{\theta}$; $\theta = 0$.

Hallar el ángulo de intersección de los siguientes pares de curvas:

17. $\varrho \cos\theta = 2a$, $\varrho = 5a \operatorname{sen}\theta$. *Sol.* arc tg $\frac{3}{4}$.

18. $\varrho = a \operatorname{sen}\theta$, $\varrho = a \operatorname{sen} 2\theta$.

Sol. En el origen, 0°; en otros dos puntos, arc tg $3\sqrt{3}$.

Hallar el ángulo de intersección de los siguientes pares de curvas:

19. $\varrho \operatorname{sen} \theta = 2a$, $\varrho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$. *Sol.* 45°.

20. $\varrho = 4 \cos \theta$, $\varrho = 4(1 - \cos \theta)$. 60°.

21. $\varrho = 6 \cos \theta$, $\varrho = 2(1 + \cos \theta)$. 30°.

22. $\varrho = \operatorname{sen} \theta$, $\varrho = \cos 2\theta$. 0° y $\operatorname{arc\,tg} \frac{3\sqrt{3}}{5}$.

23. $\varrho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 4$, $\varrho^2 = 16 \operatorname{sen} 2\theta$. 60°.

24. $\varrho = a(1 + \cos \theta)$, $\varrho = b(1 - \cos \theta)$.

25. $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$, $\varrho = \cos 2\theta + 1$.

26. $\varrho^2 \operatorname{sen} 2\theta = 8$, $\varrho = 2 \sec \theta$.

Demostrar que los siguientes pares de curvas se cortan en ángulo recto.

27. $\varrho = 2 \operatorname{sen} \theta$, $\varrho = 2 \cos \theta$.

28. $\varrho = a\theta$, $\varrho\theta = a$.

29. $\varrho = a(1 + \cos \theta)$, $\varrho = a(1 - \cos \theta)$.

30. $\varrho^2 \operatorname{sen} 2\theta = a^2$, $\varrho^2 \cos 2\theta = b^2$.

31. $\varrho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$, $\varrho = b \csc^2 \frac{\theta}{2}$.

32. Hallar las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal de la espiral de Arquimedes $\varrho = a\theta$.

Sol. Subtangente $= \frac{\varrho^2}{a}$, tangente $= \frac{\varrho}{a}\sqrt{a^2 + \varrho^2}$,
subnormal $= a$, normal $= \sqrt{a^2 + \varrho^2}$.

El lector debe notar el hecho de que la subnormal es constante.

33. Hallar las longitudes de la subtangente, subnormal, tangente y normal en la espiral logarítmica $\varrho = a^\theta$.

Sol. Subtangente $= \frac{\varrho}{\ln a}$, tangente $= \varrho\sqrt{1 + \frac{1}{\ln^2 a}}$,
subnormal $= \varrho \ln a$, normal $= \varrho\sqrt{1 + \ln^2 a}$.

34. Demostrar que la espiral hiperbólica $\varrho\theta = a$ tiene subtangente constante. (Véase la figura en el Capítulo XXVI.)

87. Raíces reales de las ecuaciones. Métodos gráficos. Un valor de x que satisface la ecuación

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

se llama una *raíz* de la ecuación (o una *raíz* de $f(x)$). Una raíz de (1) puede ser un número real o un número complejo. A continua-

ción vamos a exponer métodos para determinar, aproximadamente, las raíces reales.

Situación y número de las raíces.

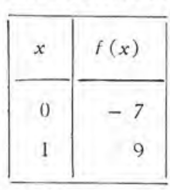
Primer método. Si la gráfica de $f(x)$, es decir, el lugar geométrico de

(2) $$y = f(x),$$

se construye conforme a la regla dada en el Artículo 58, *las abscisas de los puntos de intersección con el eje de las* x *son las raíces reales.* Por tanto, sabemos inmediatamente por la figura el número de raíces y sus valores aproximados.

Ejemplo. Localizar todas las raíces reales de

(3) $$x^3 - 9x^2 + 24x - 7 = 0.$$



x	$f(x)$
0	-7
1	9

Solución. La gráfica, según vimos en el Artículo 58, es la figura 69. Corta el eje de las x entre 0 y 1. Luego hay una raíz real entre estos valores, y no hay otras raíces reales.

La tabla da los valores de $f(0)$ y $f(1)$, mostrando un cambio de signo.

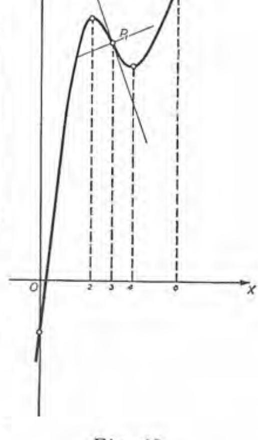


Fig. 69

Puede ser que la tabla de valores x y y que se emplee en la construcción de la gráfica dé la situación exacta de una raíz: a saber, en el caso en que sea $y = 0$ para algún valor de x. Si no, los valores de y para dos valores sucesivos $x = a$, $x = b$ pueden tener signos opuestos. En este caso, los puntos correspondientes $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ están de lados contrarios del eje de las x, y la gráfica de (2), uniendo esos puntos, cortará este eje. Es decir, una raíz x_0 estará entre a y b.

x	y
a	$f(a)$
x_0	$f(x_0) = 0$
b	$f(b)$

Un enunciado exacto del principio aquí implicado es éste:

Si una función continua f(x) *cambia de signo en un intervalo* $a < x < b$ *y su derivada no cambia de signo, entonces la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene una raíz real, y sólo una, entre* a *y* b.

El *hallar por tanteos la situación de una raíz* depende de este principio. Si a y b no están muy alejados uno de otro, es posible obtener una aproximación adicional por *interpolación*. El método consiste en

determinar la abscisa en el origen de la cuerda PQ. Es decir, la porción de la gráfica que une P y Q se reemplaza por la cuerda correspondiente, como una primera aproximación.

EJEMPLO (CONTINUACION). Por medio de un sencillo cálculo puede verse que la raíz comprendida entre 0 y 1 está entre 0,3 y 0,4. Véase la tabla adjunta. Sea esa raíz $0,3+z$. Entonces, por interpolación proporcional,

$$\frac{z}{0,1} = \frac{0,583}{1,807}, \quad z = 0,032.$$

x	$f(x)=y$
0,4	1,224
0,3 + z (raíz)	0
0,3	−0,583
Dif. 0,1	1,807

Luego $x = 0,332$ es una segunda aproximación. Esta es la abscisa en el origen de la recta (figura 70) que une los puntos $Q(0,4,\ 1,224)$ y $P(0,3,\ -0,583)$ correspondiente a la gráfica de (3). En la figura, $MP = -0,583$, $NQ = 1,224$, dibujadas a escala. Las abscisas de M y N son 0,3 y 0,4, respectivamente. Además $MC = z$, y los lados homólogos de los triángulos semejantes MPC y PQR dan la proporción anterior.

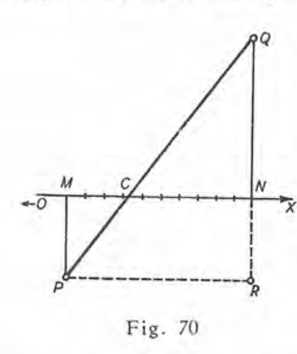


Fig. 70

Para una ecuación algebraica, como (3), el método de Horner es el más conveniente para calcular una raíz numérica con cualquiera grado de exactitud deseado (véase la explicación en algún libro de Algebra superior).

88. Segundo método para localizar las raíces reales. El método del Artículo 58 es conveniente para construir rápidamente la gráfica de $f(x)$. Por esa gráfica se determinan la situación y el número de las raíces. Sin embargo, en muchos casos se llega más pronto al mismo resultado trazando ciertas curvas que se cortan. El siguiente ejemplo hace ver cómo se procede.

EJEMPLO. Determinar el número de raíces reales (x en radianes) de la ecuación

$$(1) \qquad \operatorname{ctg} x - x = 0.$$

y localizar la más pequeña de las raíces.

Solución. Pasando x al segundo miembro, resulta:

$$(2) \qquad \operatorname{ctg} x = x.$$

$y = \operatorname{ctg} x$		
x (grados)	x (radianes)	y
0	0	∞
10	0,175	5,67
20	0,349	2,75
30	0,524	1,73
40	0,698	1,19
45	0,785	1,000
50	0,873	0,839
60	1,047	0,577
70	1,222	0,364
80	1,396	0,176
90	1,571	0

Si trazamos las curvas (fig. 71)

(3) $y = \text{ctg } x \quad \text{y} \quad y = x$

en los mismos ejes, *las abscisas de los puntos de intersección serán raíces de* (1). En efecto, es evidente que eliminando y de (3) se tiene la ecuación (1), de la que han de obtenerse los valores de x para los puntos de intersección.

En la construcción, es bueno medir esmeradamente en OX ambas escalas (grados y radianes).

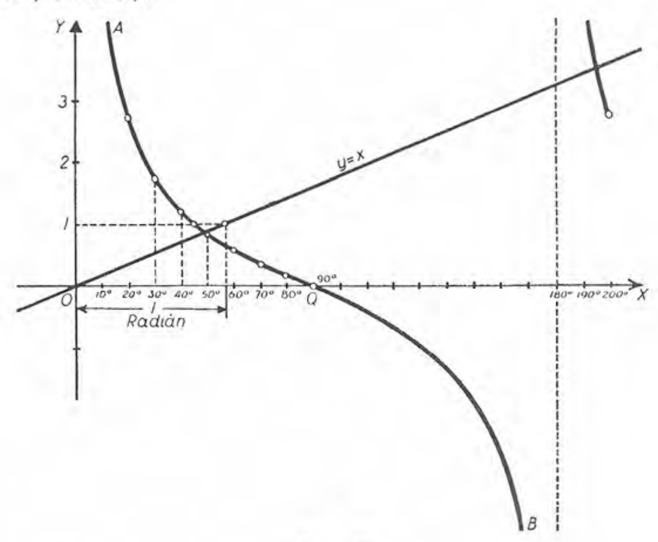


Fig. 71

Número de soluciones. La curva $y = \text{ctg } x$ consta de un número infinito de ramas congruentes con la AQB de la figura 71 (véase el Art. 70). Es evidente que la recta $y = x$ cortará cada rama. Luego la ecuación (1) tiene un número infinito de soluciones.

x (grados)	x (radianes)	ctg x	ctg $x - x$
50	0,873	0,839	$-0,034$
	raíz		
49	0,855	0,869	$+0,014$
Dif.	0,018		$-0,048$

Empleando tablas de cotangentes naturales y de equivalentes en radianes para grados, podemos localizar más exactamente la menor de las raíces, como se ve en la tabla. Por interpolación hallamos $x = 0,860$.

El segundo método puede, pues, describirse así:

Se trasponen ciertos términos de $f(x) = 0$ *de manera que se convierta en una ecuación de la forma*

(4) $f_1(x) = f_2(x)$.

Se construyen las curvas

(5) $$y = f_1(x)\,, \quad y = f_2(x)$$

en los mismos ejes, eligiendo escalas convenientes (no es necesario que las escalas para ambos ejes sean las mismas).

El número de puntos de intersección de estas curvas es igual al número de raíces reales de $f(x) = 0$, *y las abscisas de estos puntos son las raíces.*

Los términos de $f(x) = 0$, que se trasponen para obtener la ecuación (4), pueden a menudo elegirse de manera que de las curvas (5) una o ambas sean curvas conocidas.

Así, por ejemplo, para determinar las raíces reales de la ecuación

$$x^3 + 4x - 5 = 0,$$

la escribiremos en la forma

$$x^3 = 5 - 4x.$$

De esta manera las curvas (5) son, en este caso, las curvas conocidas

$$y = x^3, \quad y = 5 - 4x,$$

una *parábola cúbica* y una línea recta.

Como segundo ejemplo, consideremos la ecuación

$$2 \operatorname{sen} 2x + 1 - x^2 = 0.$$

La escribiremos en la forma

$$\operatorname{sen} 2x = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1).$$

En este caso, las curvas (5) son la conocida curva

$$y = \operatorname{sen} 2x,$$

y la parábola

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1).$$

89. Método de Newton. Una vez localizada una raíz, el método de Newton suministra un procedimiento muy cómodo para calcular su valor aproximado.

Las figuras 72 y 73 muestran dos puntos

$$P(a, f(a)), \quad Q(b, f(b))$$

de la gráfica de $f(x)$, situados en lados contrarios del eje de las x. Sea PT la tangente en P (fig. 72). Evidentemente, la abscisa a'

del punto T de intersección de la tangente con el eje de las x, es un valor aproximado del punto de intersección del eje de las x con la gráfica, y, por lo tanto, de la raíz correspondiente de $f(x) = 0$. El método de Newton determina la abscisa del punto T.

Hallamos esa abscisa a' así: las coordenadas de P son

$$x_1 = a, \quad y_1 = f(a).$$

La pendiente de la tangente PT es $m_1 = f'(a)$. Luego, según **(1)** del Artículo 43, la ecuación de PT es

$$(1) \qquad y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

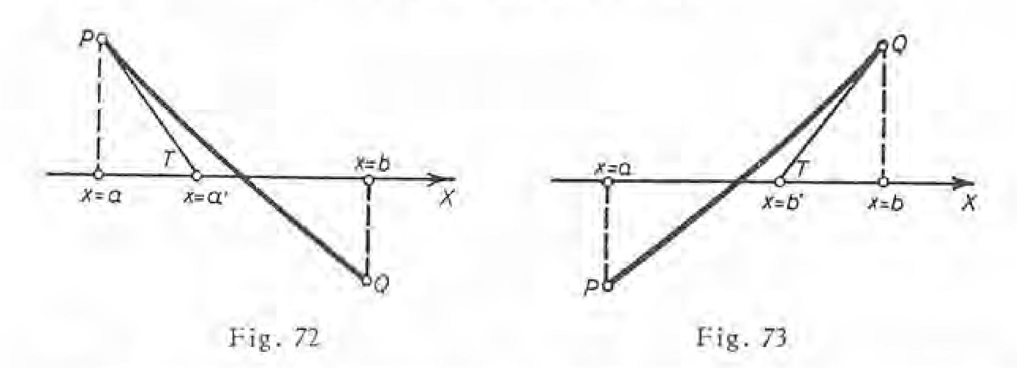


Fig. 72 Fig. 73

Haciendo $y = 0$ y despejando el valor de x $(= a')$, obtenemos la *fórmula de aproximación* de Newton,

$$(K) \qquad a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Hallado a' por **(K)**, podemos reemplazar a por a' en el primer miembro y obtener

$$a'' = a' - \frac{f(a')}{f'(a')}$$

como segunda aproximación. Se podría continuar el procedimiento, y obtener una serie de valores a, a', a'', a''', ..., que se aproximan a la raíz exacta.

También se puede trazar la tangente en Q (fig. 73). Entonces, reemplazando a en **(K)** por b, obtenemos b', b'', b''', ..., que también se aproximan a la raíz exacta.

EJEMPLO. Hallar la menor de las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} x - x = 0,$$

por el método de Newton.

Solución. En este caso, $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$,

$$f'(x) = -\csc^2 x - 1 = -2 - \operatorname{ctg}^2 x.$$

Según el ejemplo del Artículo 88, tomamos $a = 0{,}855$. Entonces, según la tabla del Art. 88,

$$f(a) = 0{,}014,$$

Además, $$f'(a) = -2 - (0{,}869)^2 = -2{,}76.$$

Entonces, según (K), $a' = 0{,}855 + \frac{0{,}014}{2{,}76} = 0{,}860.$

Si en (K) empleamos $b = 0{,}873$, se obtiene:

$$b' = 0{,}873 - \frac{0{,}034}{2{,}704} = 0{,}861.$$

Por interpolación hemos hallado $x = 0{,}860$. Los resultados obtenidos son exactos con tres cifras decimales.

De las figuras 72 y 73 observamos que la curva corta al eje de las x entre la tangente PT y la cuerda PQ. *Luego la raíz está entre el valor hallado por el método de Newton y el hallado por interpolación.* Pero esta proposición está sujeta a la condición que $f''(x) = 0$ no tenga ninguna raíz entre a y b; es decir, *que no haya punto de inflexión en el arco* PQ.

PROBLEMAS

Determinar gráficamente el número y la situación aproximada de las raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones. Calcular cada raíz con dos decimales.

1. $x^3 + 2x - 8 = 0.$ *Sol.* 1,67.
2. $x^3 - 4x + 2 = 0.$ $-2{,}21$, 0,54, 1,67.
3. $x^3 - 8x - 5 = 0.$ $-2{,}44$, $-0{,}66$, 3,10.
4. $x^3 - 3x - 1 = 0.$ $-1{,}53$, $-0{,}35$, 1,88.
5. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0.$ $-0{,}88$, 1,35, 2,53.
6. $x^3 + 3x^2 - 10 = 0.$ 1,49.
7. $x^3 - 3x^2 - 4x + 7 = 0.$ $-1{,}71$, 1,14, 3,57.
8. $x^3 + 2x^2 - 5x - 8 = 0.$ $-2{,}76$, $-1{,}36$, 2,12.
9. $2x^3 - 14x^2 + 2x + 5 = 0.$ $-0{,}51$, 0,71, 6,80.
10. $x^4 + 8x - 12 = 0.$ $-2{,}36$, 1,22.
11. $x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 20x + 9 = 0.$ $-2{,}16$, $-0{,}41$, 2,41, 4,16.
12. $x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 20x - 23 = 0.$ $-4{,}60$, 2,60.

Determinar gráficamente el número de raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones. Calcular la menor raíz (excluyendo el cero) por interpolación y por la fórmula de Newton.

13. $\cos x + x = 0$. *Sol.* Una raíz; $x = -0{,}739$.

14. $\operatorname{tg} x - x = 0$. Infinito número de raíces.

15. $\cos 2x - x = 0$. Una raíz; $x = 0{,}515$.

16. $3 \operatorname{sen} x - x = 0$. Tres raíces; $x = 2{,}279$.

17. $2 \operatorname{sen} x - x^2 = 0$. Dos raíces; $x = 1{,}404$.

18. $\cos x - 2x^2 = 0$. Dos raíces; $x = 0{,}635$.

19. $\operatorname{ctg} x + x^2 = 0$. Infinito número de raíces; $x = 3{,}032$.

20. $2 \operatorname{sen} 2x - x = 0$. Tres raíces; $x = 1{,}237$.

21. $\operatorname{sen} x + x - 1 = 0$. Una raíz; $x = 0{,}511$.

22. $\cos x + x - 1 = 0$. Una raíz; $x = 0$.

23. $e^{-x} - \cos x = 0$. Infinito número de raíces; $x = 1{,}29$.

24. $\operatorname{tg} x - \log x = 0$. Infinito número de raíces; $x = 3{,}65$.

25. $e^x + x - 3 = 0$. Una raíz; $x = 0{,}792$.

26. $\operatorname{sen} 3x - \cos 2x = 0$. Infinito número de raíces; $x = 0{,}314$.

27. $2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x - \cos 2x = 0$. Infinito número de raíces; $x = 0{,}517$.

28. $\operatorname{tg} x - 2e^x = 0$. Infinito número de raíces; $x = 1{,}44$.

29. El radio interior (r) y el radio exterior (R) en pulgadas del árbol hueco de un motor de un buque de vapor, que transmite H caballos de fuerza a la velocidad de N revoluciones por minuto, satisfacen la relación

$$R^4 - r^4 = \frac{33\,HR}{N\pi^2}.$$

Si $H = 2\,500$, $N = 160$ y $r = 6$, calcular R.

30. Un proyectil tiene la forma de un cilindro con una extremidad hemisférica, siendo su diámetro d cm y su volumen V cm³. El cilindro tiene h cm de largo. Demostrar que $d^3 + 3hd^2 = \frac{12\,V}{\pi}$. Si $h = 20$ y $V = 800$, calcular d.

Sol. $d = 6{,}77$.

31. La cantidad de agua (Q pies cúbicos por segundo) que corre sobre un vertedero de B pies de ancho, viene dada por la fórmula de Francis.

$$Q = 3{,}3\,(B - 0{,}2\,H)\,H^{3/2},$$

siendo H la altura del agua sobre la cresta del vertedero. Dados $Q = 12{,}5$ y $B = 3$, hallar H. (Despejar de la fórmula el factor $H^{3/2}$ y después construir las curvas.)

Sol $H = 1{,}23$.

32. Si V m³ es el volumen de 1 Kg de vapor recalentado a la temperatura $T°$ bajo la presión de P Kg por centímetro cuadrado,

$$V = 0{,}005088\,\frac{T + 273}{P} - \frac{0{,}1925}{P^{3/4}}.$$

Dados $V = 0{,}175$ y $T = 215°$, hallar P.

33. La cuerda c (fig. 74) de un arco s en un círculo de radio r, viene dada, aproximadamente, por la fórmula

$$c = s - \frac{s^3}{24\,r^2}.$$

Si $r = 4$ m y $c = 5{,}60$ m, hallar s. *Sol.* $s = 6{,}23$ m.

34. El área u (fig. 74) de un segmento circular cuyo arco s subtiende el ángulo central x (en radianes) es $u = \frac{1}{2}\,r^2(x - \operatorname{sen} x)$. Hallar el valor de x si $r = 8$ cm y $u = 64$ cm². *Sol.* $x = 2{,}554$ radianes.

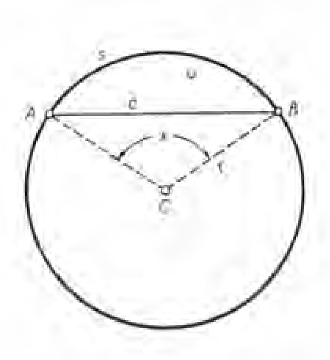


Fig. 74

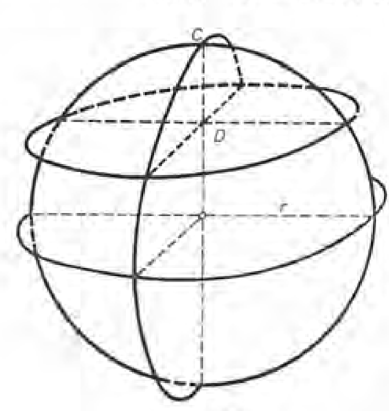


Fig. 75

35. El volumen V (fig. 75) de un segmento esférico de una base, de altura $CD = h$, es

$$V = \pi(rh^2 - \tfrac{1}{3}h^3).$$

Hallar h si $r = 4$ m y $V = 150$ m³. *Sol.* $h = 4{,}32$ m.

36. El volumen V de una cáscara esférica de radio R y espesor t es

$$V = 4\,\pi t\,(R^2 - Rt + \tfrac{1}{3}t^2).$$

Demostrar esta fórmula. Si $R = 4$ dm y V es la mitad del volumen de una esfera maciza de igual radio, hallar t. *Sol.* $t = 0{,}827$ dm.

37. Una esfera maciza de madera de peso específico S y diámetro d se hunde en el agua a una profundidad h. Siendo $x = \dfrac{h}{d}$, demostrar que $2\,x^3 - 3x^2 + S = 0$. (Véase el problema 35.). Hállese x para una bola de arce en la que $S = 0{,}786$. *Sol.* 0,702.

38. Hallar el menor valor positivo de θ para el que las curvas $\rho = \cos\theta$ y $\rho = e^{-\theta}$ se cortan. Hallar el ángulo de intersección en ese punto.
Sol. $\theta = 1{,}29$ radianes; 29°.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Hallar el ángulo de intersección de las curvas $\rho = 2 \cos \theta$ y $\rho = e^{\theta}$ en el punto de intersección más alejado del origen.

Sol. Punto de intersección, $\theta = 0.54$ radianes; $75^\circ 56'$.

2. Demostrar que la curva $\rho = a \operatorname{sen}^4 \frac{1}{4} \theta$ se corta a sí misma en ángulo recto.

3. Sea OP un radio vector cualquiera de la cardioide $\rho = a(1 + \cos \theta)$. Del centro C del círculo $\rho = a \cos \theta$ se traza CQ, un radio del círculo, paralelo a OP y en el mismo sentido. Demostrar que PQ es normal a la cardioide.

4. Se circunscribe a la cardioide $\rho = a(1 - \cos \theta)$ un cuadrado; una diagonal del cuadrado está en el eje polar. Demostrar que su área es $\frac{27}{16}(2 + \sqrt{3})a^2$.

5. La trayectoria de una partícula es la elipse $\rho = \dfrac{ep}{1 - e \cos \theta}$. El punto material se mueve de tal manera que el radio vector ρ describe áreas iguales en tiempos iguales. Hallar la razón de las velocidades del punto en las extremidades del eje mayor.

Sol. $\dfrac{1 - e}{1 + e}$.

CAPITULO IX

DIFERENCIALES

90. Introducción. Hasta ahora hemos representado la derivada de $y = f(x)$ por la notación

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) .$$

Hemos insistido particularmente en señalar que el símbolo

$$\frac{dy}{dx}$$

no debía considerarse como una fracción ordinaria, con dy como numerador y dx como denominador, sino solamente como un símbolo que representa el límite del cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

cuando Δx tiende a cero.

Hay muchos problemas, sin embargo, en los que es importante dar interpretaciones a dx y dy separadamente. Esto se presenta, especialmente, en las aplicaciones del Cálculo integral. En los artículos que siguen se explica el nuevo significado de estos símbolos.

91. Definiciones. Si $f'(x)$ es la derivada de $f(x)$ para un valor particular de x, y Δx es un incremento de x, arbitrariamente elegido, la diferencial de $f(x)$, que se representa por el símbolo $df(x)$, se define por la igualdad

$$(A) \qquad df(x) = f'(x)\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x.$$

Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$ y (A) se reduce a

$$dx = \Delta x.$$

Así, cuando x es la variable independiente, la diferencial de $x (= dx)$ es idéntica a Δx. Por tanto, si $y = f(x)$, (A) puede, en general, escribirse en la forma

$$(B) \qquad dy = f'(x)\,dx\ ^* = \frac{dy}{dx}\,dx.$$

La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente.

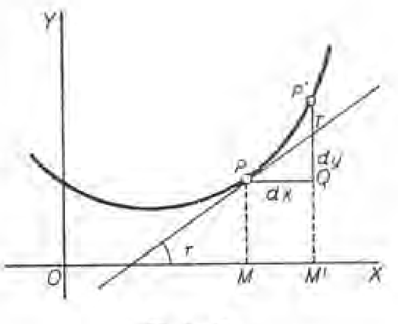
Veamos una interpretación geométrica de lo que esto significa.

Construyamos la curva $y = f(x)$ (figura 76).

Sea $f'(x)$ el valor de la derivada en P.

Tomemos $dx = PQ$. Entonces,

$$dy = f'(x)\,dx = \operatorname{tg}\tau \cdot PQ$$
$$= \frac{QT}{PQ} \cdot PQ = QT.$$



Fgi. 76

Luego dy, *o sea,* df (x), *es el incremento* (= QT) *de la ordenada de la tangente, correspondiente a* dx.

Esto da la siguiente interpretación de la derivada como fracción:

Si se representa por dx *un incremento arbitrariamente elegido de la variable independiente* x *para un punto* P (x, y) *en la curva* y = f (x), *entonces en la derivada*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg}\tau,$$

dy *representa el incremento correspondiente de la ordenada de la tangente en* P.

El lector debe advertir especialmente que la diferencial $(= dy)$ y el incremento $(= \Delta y)$ no son, en general, iguales. En efecto, en la figura 76, $dy = QT$, pero $\Delta y = QP'$.

92. La diferencial como aproximación del incremento. Por el Artículo 91 es claro que Δy $(= QP'$ en la figura) y dy $(= QT)$ son aproximadamente iguales cuando dx $(= PQ)$ es pequeño. Cuando

---

* A causa de la posición que en esta expresión ocupa la derivada $f'(x)$, a veces se llama a la derivada *coeficiente diferencial*.

solamente se desea un *valor aproximado* del incremento de una función, es más fácil, la mayor parte de las veces, calcular el valor de la diferencial correspondiente y emplear este valor.

EJEMPLO 1. Hallar un valor aproximado del volumen de una cáscara esférica de 200 mm de diámetro exterior y 1 mm de espesor.

Solución. El volumen V de una esfera de diámetro x es

(1) $$V = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Evidentemente, el volumen exacto de la cáscara es la diferencia ΔV entre los volúmenes de dos esferas macizas de diámetros 200 mm y 198 mm, respectivamente. Pero como se pide solamente un valor aproximado de ΔV, hallaremos dV. De (1) y (B),

$$dV = \frac{1}{2}\pi x^2\, dx, \quad \text{puesto que} \quad \frac{dV}{dx} = \frac{1}{2}\pi x^2.$$

Sustituyendo $x = 200$, $dx = -2$, obtenemos $dV = 125\,600$ mm^3, aproximadamente, no teniendo en cuenta el signo cuyo significado es, tan sólo, el de exponer que V disminuye al aumentar x. El valor exacto es $\Delta V = 124\,400$ mm^3. Adviértase que la aproximación es aceptable porque dx es *relativamente pequeño*, es decir, es pequeño en comparación con x ($= 200$); si no, el método sería inaceptable.

EJEMPLO 2. Calcular un valor aproximado de tg 46°, empleando diferenciales, dados tg 45° = 1, sec 45° = $\sqrt{2}$, 1° = 0,01745 radianes.

Solución. Sea $y = \operatorname{tg} x$. Entonces, según (B),

(1) $$dy = \sec^2 x\, dx.$$

Al pasar x a $x + dx$, y pasa, aproximadamente, a $y + dy$. Sustituyamos en (1), $x = \frac{1}{4}\pi$ (45°) y $dx = 0{,}0175$. Se obtiene $dy = 0{,}0350$, y como que $y = \operatorname{tg} 45° = 1$, resulta $y + dy = 1{,}0350 = \operatorname{tg} 46°$, aproximadamente. (Tablas de cuatro decimales dan tg 46° = 1,0355.)

93. Errores pequeños. Una segunda aplicación de las diferenciales es la de determinar la influencia que tienen pequeños errores en los datos en el cálculo de magnitudes.

EJEMPLO 1. Se mide el diámetro de un círculo, y se halla que es 5,2 cm con un error máximo de 0,05 cm. Hallar un valor aproximado del máximo error que puede cometerse al calcular el área del círculo por la fórmula

(1) $$A = \tfrac{1}{4}\pi x^2. \qquad (x = \text{diámetro})$$

Solución. Evidentemente, el error máximo exacto con que se obtiene A será la alteración (ΔA) de su valor, hallado según (1), cuando x cambia de 5,2 cm a 5,25 cm. Un valor aproximado del error en el área es el valor correspondiente de dA. Por tanto,

$$dA = \tfrac{1}{2}\pi x\, dx = \tfrac{1}{2}\pi \times 5{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}41 \text{ cm}^2.$$

Errores relativos y error expresado en tanto por ciento. Si du es el error de u, la razón

(2) $$\frac{du}{u} = \text{error relativo};$$

(3) $$100\,\frac{du}{u} = \text{error expresado en tanto por ciento}.$$

El error relativo puede hallarse directamente por derivación logarítmica (Art. 66).

EJEMPLO 2. Hallar el error relativo y el error expresado en tanto por ciento en el ejemplo anterior.

Solución. Tomando en (1) logaritmos naturales,

$$\ln A = \ln \frac{1}{4}\pi + 2 \ln x.$$

Derivando, $$\frac{1}{A}\,\frac{dA}{dx} = \frac{2}{x}, \quad \text{y} \quad \frac{dA}{A} = \frac{2\,dx}{x}.$$

Sustituyendo, $x = 5{,}2$, $dx = 0{,}05$, hallamos:

Error relativo de $A = 0{,}0192$; error expresado en tanto por ciento $= 1^{92}\!/_{100}\,\%$.

Los errores de cálculo que se consideran aquí son los ocasionados por errores pequeños en los datos que suministran la base para el cálculo. Estos pueden provenir de inexactitud de medición o de otras causas.

PROBLEMAS

1. Si A es el área de un cuadrado de lado x, hallar dA. Construir una figura que muestre el cuadrado, dA y ΔA. *Sol.* $dA = 2\,x\,dx$.

2. Hallar una fórmula aproximada del área de una corona circular de radio r y anchura dr. ¿Cuál es la fórmula exacta?

Sol. $dA = 2\,\pi r\,dr$; $\Delta A = \pi(2\,r + \Delta r)\,\Delta r$.

3. ¿Cuál es un valor aproximado del error que puede cometerse al calcular el volumen y el área de un cubo de arista 6 cm, si se comete un error de 0,02 cm al medir la arista? *Sol.* Volumen, $\pm\,2{,}16\,\text{cm}^3$; área, $\pm\,1{,}44\,\text{cm}^2$.

4. Las fórmulas para el área y el volumen de una esfera son

$$S = 4\,\pi r^2 \quad \text{y} \quad V = \tfrac{4}{3}\,\pi r^3.$$

Si al medir el radio se obtiene 3 m, *a*) ¿cuáles son los errores máximos aproximados de S y V si las medidas son seguras hasta 0,01 m? *b*) ¿cuál es en cada caso el error máximo expresado en tanto por ciento?

Sol. *a*) S, $0{,}24\,\pi\,\text{m}^2$; V, $0{,}36\,\pi\,\text{m}^3$; *b*) S, $\tfrac{2}{3}\,\%$; V, $1\,\%$.

5. Demostrar por medio de diferenciales que, aproximadamente,

$$\frac{1}{x+dx}=\frac{1}{x}-\frac{dx}{x^2}.$$

6. Hallar una fórmula aproximada para el volumen de una cáscara cilíndrica delgada de extremidades abiertas si el radio es r, la altura l y el espesor e.
Sol. $2\pi rle$.

7. Se ha de construir una caja en forma de cubo, de 1 dm³ de capacidad. ¿Con qué exactitud debe construirse la arista interior para que el error en el volumen no sea mayor de 3 cm³ de más o de menos? *Sol.* Error, $\leqq$ 0,01 cm.

8. Si $y=x^{2/3}$ y el error posible en la medición de x es 0,9 cuando $x=27$, ¿cuál es el error posible del valor de y? Empléese este resultado para obtener valores aproximados de $(27{,}9)^{2/3}$ y $(26{,}1)^{2/3}$. *Sol.* 0,2; 9,2; 8,8.

Usando diferenciales, hallar un valor aproximado de cada una de las siguientes expresiones:

9. $\sqrt{66}$. 11. $\sqrt[3]{120}$. 13. $1/96$. 15. $\sqrt[5]{35}$.

10. $\sqrt{98}$. 12. $\sqrt[3]{1010}$. 14. $\dfrac{1}{\sqrt{51}}$. 16. $\sqrt[4]{15}$.

17. Si $\ln 10 = 2{,}303$, obtener un valor aproximado de $\ln 10{,}2$ por medio de diferenciales. *Sol.* 2,323.

18. Si $e^2 = 7{,}39$, obtener un valor aproximado de $e^{2,1}$ por medio de diferenciales. *Sol.* 8,13.

19. Dados sen 60° = 0,86603, cos 60° = 0,5 y 1° = 0,01745 radianes, calcular, empleando diferenciales, los valores de cada una de las siguientes funciones, con cuatro decimales: *a*) sen 62°; *b*) cos 61°; *c*) sen 59°; *d*) cos 58°.
Sol. *a*) 0,8835; *b*) 0,4849; *c*) 0,8573; *d*) 0,5302.

20. El tiempo de una oscilación de un péndulo se da por la fórmula

$$t^2=\frac{\pi^2 l}{g},$$

midiéndose la longitud del péndulo l, en metros, t en segundos, y siendo $g=9{,}8$. Hallar: *a*) la longitud de un péndulo que oscila una vez por segundo: *b*) la alteración en t si el péndulo en (*a*) se alarga 3 mm; *c*) cuánto se adelantaría o atrasaría en un día un reloj con ese error.
Sol. *a*) 0,993 m; *b*) 0,00152 segs.; *c*) − 2 minutos 10 segundos.

21. ¿Con cuánta exactitud debe medirse el diámetro de un círculo para que el area resulte con un error menor del uno por ciento? *Sol.* Error, $\leqq$ ½ %.

22. Demostrar que si se comete un error al medir el diámetro de una esfera, el error relativo del volumen de la esfera es tres veces el error relativo del radio.

23. Demostrar que el error relativo de la enésima potencia de un número es n veces el error relativo del número.

24. Demostrar que el error relativo de la raíz enésima de un numero es $\frac{1}{n}$ del error relativo del número.

25. Cuando un bloque cúbico de cierto metal se calienta, cada arista aumenta $\frac{1}{10}$ por ciento por grado de elevación de temperatura. Demostrar que la superficie aumenta $\frac{2}{10}$ por ciento por grado, y que el volumen aumenta $\frac{3}{10}$ por ciento por grado.

94. Fórmulas para hallar las diferenciales de funciones. Puesto que la diferencial de una función es el producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, se sigue inmediatamente que las fórmulas para hallar las diferenciales son las mismas que las dadas en los Artículos 29 y 60 para obtener las derivadas, con sólo multiplicar cada una de ellas por dx.

En consecuencia, las fórmulas para diferenciación son:

I $\qquad d(c) = 0.$

II $\qquad d(x) = dx.$

III $\qquad d(u + v - w) = du + dv - dw.$

IV $\qquad d(cv) = c\,dv.$

V $\qquad d(uv) = u\,dv + v\,du.$

VI $\qquad d(v^n) = nv^{n-1}\,dv.$

VI *a* $\qquad d(x^n) = nx^{n-1}\,dx.$

VII $\qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$

VII *a* $\qquad d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{du}{c}.$

X $\qquad d(\ln v) = \frac{dv}{v}.$

XI $\qquad d(a^v) = a^v \ln a\,dv.$

XI *a* $\qquad d(e^v) = e^v\,dv.$

XII $\qquad d(u^v) = vu^{v-1}\,du + \ln u \cdot u^v\,dv.$

XIII $\qquad d(\text{sen } v) = \cos v\,dv.$

XIV $\qquad d(\cos v) = -\text{sen } v\,dv.$

XV $\qquad d(\text{tg } v) = \sec^2 v\,dv.$ Etc.

XX $\qquad d(\text{arc sen } v) = \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}}.$ Etc.

Para hallar diferenciales, lo más fácil es hallar la derivada, y multiplicar el resultado por dx.

La operación de hallar diferenciales se llama *diferenciación*.

EJEMPLO 1. Hallar la diferencial de

$$y = \frac{x+3}{x^2+3}.$$

Solución. $dy = d\left(\frac{x+3}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)\,d(x+3) - (x+3)\,d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$

$$= \frac{(x^2+3)\,dx - (x+3)\,2x\,dx}{(x^2+3)^2} = \frac{(3-6x-x^2)\,dx}{(x^2+3)^2}.$$

EJEMPLO 2. Hallar dy de la expresión

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Solución. $2\,b^2\,x\,dx - 2\,a^2y\,dy = 0.$

$$\therefore\quad dy = \frac{b^2x}{a^2y}\,dx.$$

EJEMPLO 3. Hallar $d\rho$ de

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\,\theta.$$

Solución. $2\,\rho\,d\rho = -\,a^2 \operatorname{sen} 2\,\theta \cdot 2\,d\theta.$

$$\therefore\quad d\rho = -\,\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\,\theta}{\rho}\,d\theta.$$

EJEMPLO 4. Hallar $d\,[\operatorname{arc\,sen}\,(3\,t - 4\,t^3)\,]$.

Solución. $d\,[\operatorname{arc\,sen}\,(3\,t - 4\,t^3)\,] = \frac{d\,(3\,t - 4\,t^3)}{\sqrt{1 - (3\,t - 4\,t^3)^2}} = \frac{3\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

PROBLEMAS

Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

1. $y = x^3 - 3\,x.$ *Sol.* $dy = 3\,(x^2-1)\,dx.$
2. $y = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}.$ $dy = \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}\right)dx.$
3. $y = \sqrt{ax+b}.$ $dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax+b}}.$
4. $y = x\sqrt{a^2-x^2}.$ $dy = \frac{(a^2 - 2\,x^2)\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$
5. $s = ae^{bt}.$ $ds = abe^{bt}\,dt.$
6. $u = \ln cv.$ $du = \frac{dv}{v}.$

7. $\varrho = \operatorname{sen} a\theta.$ *Sol.* $d\varrho = a \cos a\theta \, d\theta.$

8. $y = \ln \operatorname{sen} x.$ $dy = \operatorname{ctg} x \, dx.$

9. $\varrho = \theta \cos \theta.$ $d\varrho = (\cos \theta - \theta \operatorname{sen} \theta) d\theta.$

10. $s = e^t \cos \pi t.$ $ds = e^t (\cos \pi t - \pi \operatorname{sen} \pi t) dt.$

Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

11. $y = \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{a}{x}}.$

12. $u = \sqrt{e^v + 1}.$

13. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

14. $y = \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$

15. $\varrho = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$

16. $s = e^{-at} \operatorname{sen} bt.$

17. $\varrho = \sqrt{\operatorname{ctg} \theta}.$

18. $y = \ln \sqrt[3]{\frac{6x - 5}{4 - 3x}}.$

19. Si $x^2 + y^2 = a^2$, demostrar que $dy = -\frac{x\,dx}{y}.$

Hallar dy en funcion de x, y y dx de cada una de las siguientes ecuaciones:

20. $2x^2 + 3xy + 4y^2 = 20.$ *Sol.* $dy = -\frac{(4x + 3y)\,dx}{3x + 8y}.$

21. $x^3 + 6xy^2 + 2y^3 = 10.$

22. $x + 4\sqrt{xy} + 2y = a.$

23. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$

25. $x - y = e^{x+y}.$

26. $\operatorname{sen}(x - y) = \cos(x + y).$

27. La medición de los catetos de un triángulo rectángulo da 14,5 m y 21,4 m. El error máximo de cada medición es $\pm$ 0,1 m. Hallar el error máximo, en grados, que se puede cometer al calcular el ángulo opuesto al cateto menor por la fórmula que da la tangente de ese ángulo.

95. Diferencial del arco en coordenadas cartesianas rectangulares. Sea s la longitud del arco AP medida desde un punto fijo A de la curva. Representemos el incremento de s (= arco PQ) por Δs. La siguiente demostración depende del supuesto que (Art. 99) al tender Q a P,

$$\text{lím}\left(\frac{\text{cuerda } PQ}{\text{arco } PQ}\right) = 1.$$

De la figura 77,

(1) $(\text{Cuerda } PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$

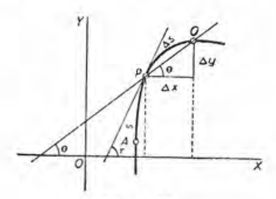


Fig. 77

Multipliquemos y dividamos el primer miembro por $(\Delta s)^2$, y dividamos ambos miembros por $(\Delta x)^2$.

Obtenemos:

$$(2) \qquad \left(\frac{\text{Cuerda } PQ}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Si ahora hacemos que Q tienda a confundirse con P como posición límite, tendremos que $\Delta x \to 0$ y la igualdad anterior se transforma en

$$(3) \qquad \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Multiplicando ambos miembros por dx^2, obtenemos el resultado

$$(C) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

También, extrayendo en (3) la raíz cuadrada y multiplicando ambos miembros por dx,

$$(D) \qquad ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

De **(*C*)** es igualmente fácil demostrar que

$$(E) \qquad ds = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy.$$

Todas estas formas son útiles.

De **(*D*)**, puesto que

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \tau = \sec^2 \tau,$$

obtenemos $ds = \sec \tau \, dx$, suponiendo el ángulo τ agudo. De aquí es fácil demostrar que

$$(F) \qquad \frac{dx}{ds} = \cos \tau, \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \tau.$$

$$\left[\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg} \tau \cos \tau = \operatorname{sen} \tau.\right]$$

Para ulteriores referencias, añadimos las fórmulas (haciendo $y' = \frac{dy}{dx}$).

$$(G) \qquad \cos \tau = \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \operatorname{sen} \tau = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si el ángulo τ es obtuso ($y' < 0$), debe ponerse el signo menos ante los denominadores en **(*G*)** y ante $\cos \tau$ en **(*F*)**.

En la figura 78, $PQ = \Delta x = dx$, PT es tangente en P y τ es agudo. El ángulo PQT es un ángulo recto.

Luego, $$QT = \operatorname{tg} \tau \, dx = dy.$$ Según el Art. 91

Por consiguiente, $$PT = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds.$$ Según (C)

La figura ayudará a retener en la memoria las relaciones dadas.

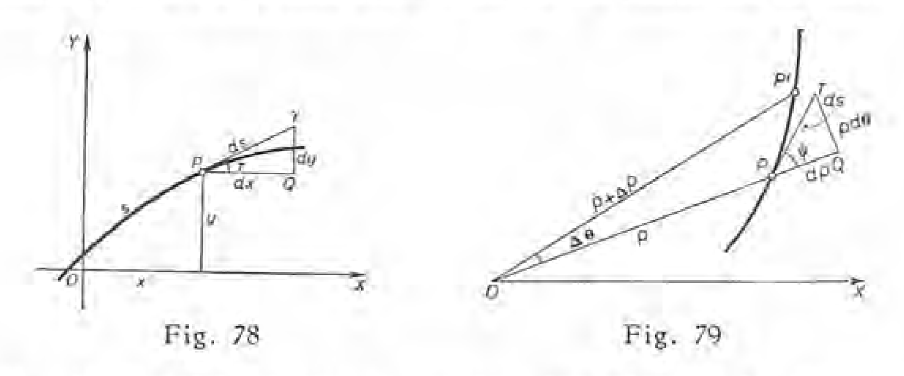


Fig. 78 Fig. 79

96. Diferencial del arco en coordenadas polares. De las relaciones

(1) $$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

entre las coordenadas cartesianas rectangulares y las polares de un punto, obtenemos, según V, XIII y XIV del Artículo 94,

(2) $$dx = \cos \theta \, d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta \, d\theta, \quad dy = \operatorname{sen} \theta \, d\rho + \rho \cos \theta \, d\theta.$$

Sustituyendo en (C) del Artículo 95, reduciendo y extrayendo la raíz cuadrada, obtenemos el resultado

(H) $$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2}.$$

Esto puede escribirse

(I) $$ds = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta.$$

La figura 79 se ha trazado de manera que el ángulo ψ que forman el radio vector OP y la tangente PT sea agudo (Art. 85). Además, ρ, $\Delta\theta$ y $\Delta\rho$ $(= OP' - OP)$ son positivos. Tómese ρ como variable independiente. Entonces $\Delta\rho = d\rho$. En el triángulo rectángulo PQT, tomemos $PQ = d\rho$. Entonces $QT = \operatorname{tg} \psi \, d\rho$.

Pero $$\operatorname{tg} \psi = \rho \frac{d\theta}{d\rho}.$$ Según (H), Art. 85

Luego $$QT = \rho \frac{d\theta}{d\rho} d\rho = \rho \, d\theta;$$ según (B)

por tanto, $$PT = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 \, d\theta^2} = ds.$$ Según (H)

EJEMPLO 1. Hallar la diferencial del arco del círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

Solución. Derivando, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Para hallar ds en función de x sustituímos en (D), lo que da

$$ds = \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{r^2}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Para hallar ds en función de y sustituímos en (E), lo que da

$$ds = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \left(\frac{r^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy = \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

EJEMPLO 2. Hallar la diferencial del arco de la cicloide

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta),$$

en función de θ y $d\theta$. (Véase el ejemplo 2 del Art. 81.)

Solución. Diferenciando,

$$dx = a(1 - \cos \theta)\, d\theta, \quad dy = a \operatorname{sen} \theta\, d\theta.$$

Sustituyendo en (C),

$$ds^2 = a^2(1 - \cos \theta)^2\, d\theta^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta^2 = 2\,a^2(1 - \cos \theta)\; d\theta^2.$$

Según (5), del Artículo 2, $1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta$. Luego,

$$ds = 2\,a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \theta\; d\theta.$$

EJEMPLO 3. Hallar la diferencial del arco de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos \theta)$ en función de θ.

Solución. Derivando, $\frac{d\varrho}{d\theta} = a \operatorname{sen} \theta$.

Sustituyendo en (I), se obtiene

$$ds = [a^2(1 - \cos \theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^{\frac{1}{2}}\, d\theta = a(2 - 2\cos \theta)^{\frac{1}{2}}\, d\theta$$

$$= a\left(4 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2\,a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

PROBLEMAS

En cada una de las siguientes curvas, hallar ds en función de x y dx.

1. $2\,y = x^2$. *Sol.* $ds = \sqrt{1 + x^2}\; dx$.

2. $y^2 = 2\,px$. $ds = \sqrt{\frac{2\,x + p}{2\,x}}\, dx$.

3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. $ds = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\; dx$.

4. $6\,xy = x^4 + 3$. $ds = \frac{(x^4 + 1)\,dx}{2\,x^2}$.

5. $y = \ln \sec x$. $ds = \sec x\; dx$.

Hallar ds en función de x y dx en cada una de las siguientes curvas:

6. $a^2y = x^3$.

7. $ay^2 = x^3$.

8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

9. $2\,y = e^x + e^{-x}$.

10. $y = \operatorname{sen} x$.

11. $y = \cos^2 x$.

En cada una de las siguientes curvas, hallar ds en función de y y dy.

12. $y^2 = 2\,px$. *Sol.* $ds = \dfrac{\sqrt{y^2 + p^2}\,dy}{p}$.

13. $ay^2 = x^3$. $ds = \dfrac{\sqrt{9\,y^{2/3} + 4\,a^{2/3}}\,dy}{3\,y^{1/3}}$.

14. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. $ds = \sqrt[3]{\dfrac{a}{y}}\,dy$.

15. $a^2y = x^3$.

16. $y^2 - 2\,x - 3\,y = 0$.

17. $2\,xy^2 - y^2 - 4 = 0$.

En cada una de las siguientes curvas, hallar ds, sen τ y cos τ en función de t y dt.

18. $x = 2\,t + 3, \quad y = t^2 - 2$.

19. $x = 3\,t^2, \quad y = 2\,t^3$.

20. $x = a \operatorname{sen} t, \quad y = a \cos t$.

21. $x = 4 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t$.

En cada una de las siguientes curvas, hallar ds en función de θ y $d\theta$.

22. $\rho = a \cos \theta$. *Sol.* $ds = a\,d\theta$.

23. $\rho = 5 \cos \theta + 12 \operatorname{sen} \theta$. $ds = 13\,d\theta$.

24. $\rho = 1 - \operatorname{sen} \theta$. $ds = \sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} \theta}\,d\theta$.

25. $\rho = 3 \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \theta$.

26. $\rho = 1 + \cos \theta$.

27. $\rho = \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$.

28. $\rho = 2 - \cos \theta$.

29. $\rho = 2 + 3 \operatorname{sen} \theta$.

30. $\rho = a \cos n\theta$.

31. $\rho = 4 \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

32. $\rho = \dfrac{4}{1 + \cos \theta}$.

33. $\rho = \dfrac{4}{3 - \cos \theta}$.

34. $\rho = \dfrac{4}{1 - 3 \cos \theta}$.

97. La velocidad como rapidez de variación de la longitud del arco con respecto al tiempo. En la discusión del movimiento curvilíneo en el Artículo 83, la magnitud de la velocidad v se dió por **(E)**,

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2. \tag{1}$$

Según **(C)** y **(D)** del Artículo 83,

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo en (1), empleando diferenciales y la igualdad (*C*) del Artículo 95, el resultado es

$$(2) \qquad v^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada, tomando el signo positivo, tenemos

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Por tanto, *en el movimiento curvilíneo la magnitud de la velocidad del punto móvil es la rapidez de variación de la longitud del arco de la* distancia *trayectoria con respecto al tiempo*.

Este enunciado debe compararse con la definición dada de velocidad, en el movimiento rectilíneo, como la rapidez de variación de la distancia con respecto al tiempo (Art. 51).

98. Las diferenciales como infinitésimos. Muchas veces, en las Matemáticas aplicadas, las diferenciales se tratan como infinitésimos (Art. 20), es decir, como variables que tienden hacia cero. Por otra parte, frecuentemente se establecen relaciones entre infinitésimos en las que éstos se reemplazan por diferenciales. El ''principio de reemplazo'' sobre equivalencia de infinitésimos y diferenciales es muy útil.

Si x es la variable independiente, hemos visto que $\Delta x = dx$; siendo así, Δx *puede reemplazarse por* dx *en cualquiera ecuación*. Si $\Delta x \to 0$, entonces $dx \to 0$ también. Al contrario, Δy y dy no son iguales en general. Pero cuando x tiene un valor fijo y Δx $(= dx)$ es un infinitésimo, Δy también lo es, y asimismo dy, según (*B*) del Artículo 91. Además, es fácil demostrar la relación

$$(1) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Demostración. Puesto que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

podemos escribir
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + i, \text{ si } \lim_{\Delta x \to 0} i = 0.$$

Quitando denominadores, y empleando (*B*),

$$\Delta y = dy + i\,\Delta x.$$

Dividiendo ambos miembros por Δy y transponiendo, se obtiene

$$\frac{dy}{\Delta y} = 1 - i\,\frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Luego, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{dy}{\Delta y} = 1$, o sea, igualmente, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$,

como se quería demostrar.

Ahora enunciamos, sin demostración, el siguiente teorema sobre equivalencia de infinitésimos.

Teorema. *En los problemas que implican solamente las razones de infinitésimos que tienden simultáneamente a cero, un infinitésimo puede reemplazarse por otro infinitésimo si el límite de la razón de los dos es la unidad.*

Según este teorema, Δy puede reemplazarse por dy, y, en general, un incremento cualquiera por la diferencial correspondiente.

En una ecuación *homogénea* en infinitésimos, la aplicación de dicho teorema es sencilla.

EJEMPLO 1. Según (5), Art. 2, si $x = \frac{1}{2} i$, $1 - \cos i = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$. Sea i un infinitésimo. Entonces, según (*B*) del Art. 68, $\operatorname{sen} i$ puede reemplazarse por i, $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$ por $\frac{1}{4} i^2$ y, en consecuencia, $1 - \cos i$ por $\frac{1}{2} i^2$. Además, $\operatorname{tg} i \left(= \dfrac{\operatorname{sen} i}{\cos i}\right)$ puede reemplazarse por i.

EJEMPLO 2. En (1), del Artículo 95, todas las cantidades son, finalmente, infinitésimos, puesto que $\Delta x \to 0$. La ecuación es homogénea (cada término es de segundo grado). Según el teorema, podemos reemplazar los infinitésimos como sigue:

Cuerda PQ por arco $PQ = \Delta s$, y Δs por ds; Δy por dy; y Δx por dx.

Entonces (1) se convierte en $ds^2 = dx^2 + dy^2$; es decir, en (*C*).

99. Ordenes de infinitésimos. Diferenciales de orden superior. Sean i y j infinitésimos que tienden simultáneamente a cero, y sea

$$\lim \frac{j}{i} = L.$$

Si L no es cero sino una cantidad finita, se dice que i *y* j *son infinitésimos del mismo orden*.

Si $L = 0$, se dice que j *es de orden superior a* i.

Si L se hace infinito, se dice que j *es de orden inferior a* i.

Sea $L = 1$. *Entonces* j $-$ i *es de orden superior a* i.

$$\left[\lim\left(\frac{j-i}{i}\right) = \lim\left(\frac{j}{i} - 1\right) = \lim\frac{j}{i} - 1 = 0.\right]$$

La recíproca es igualmente cierta. En este caso $(L = 1)$, se dice que j *difiere de* i *en un infinitésimo de orden superior*.

Por ejemplo, dy y Δx son del mismo orden si $f'(x)$ no se anula ni se hace infinita. Entonces Δy y Δx son del mismo orden, pero $\Delta y - dy$ es de orden superior a Δx. A causa de esto, dy se llama "la parte principal de Δy". Evidentemente, las potencias de un infinitésimo i son de orden superior a i.

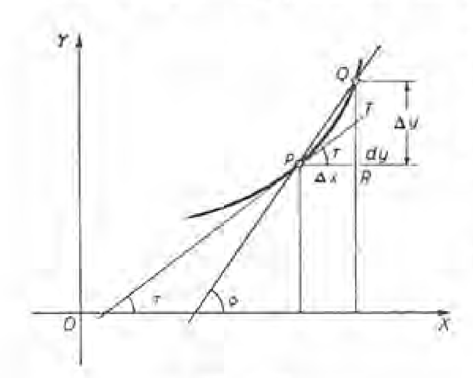


Fig. 80

EJEMPLO. Demostrar la igualdad, supuesta cierta en el Artículo 95.

$$\lim\left(\frac{\text{cuerda } PQ}{\text{arco } PQ}\right) = 1.$$

Demostración. En la figura 80, tenemos, por Geometría,

$$\text{cuerda } PQ < \text{arco } PQ < PT + TQ.$$

Dividiendo por "cuerda PQ" resulta,

$$1 < \frac{\text{arco } PQ}{\text{cuerda } PQ} < \frac{PT}{\text{cuerda } PQ} + \frac{TQ}{\text{cuerda } PQ}.$$

Ahora bien, cuerda $PQ = \sec\phi\,\Delta x$, $PT = \sec\tau\,\Delta x$, $TQ = \Delta y - dy$, y por tanto,

$$\frac{PT}{\text{cuerda } PQ} = \frac{\sec\tau}{\sec\phi}, \quad \frac{TQ}{\text{cuerda } PQ} = \cos\phi\,\frac{\Delta y - dy}{\Delta x}.$$

Tomando límites,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{PT}{\text{cuerda } PQ}\right) = 1, \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{TQ}{\text{cuerda } PQ}\right) = 0.$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\text{arco } PQ}{\text{cuerda } PQ}\right) = 1.$$

Diferenciales de orden superior. Sea $y = f(x)$. La igualdad

$$d^2y = f''(x)\,\Delta x^2 = y''\,\Delta x^2$$

define la *segunda diferencial* de y. Si y'' no se anula ni se hace infinita, d^2y es del mismo orden de Δx^2 y, en consecuencia, de orden superior a dy. De la misma manera pueden definirse $d^3y, \ldots, d^ny$.

PROBLEMAS

En el triángulo ABC los lados a, b, c son infinitésimos que tienden simultáneamente hacia cero, y c es de orden superior a b. Demuéstrese que $\lim \frac{a}{b} = 1$.

CAPITULO X

CURVATURA. RADIO DE CURVATURA. CIRCULO DE CURVATURA

100. Curvatura. En el Artículo 55 se ha estudiado el sentido de la concavidad de una curva. La forma de una curva (su cualidad de aguda o achatada) en un punto depende de la razón de la variación de su dirección. Esta razón se llama *curvatura en el punto,* y se representa por K. Hallemos la expresión matemática de K.

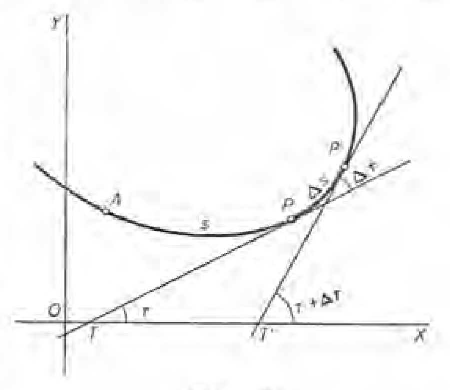


Fig. 81

En la figura 81, sea P' un segundo punto de la curva, próximo a P. Cuando el punto de contacto de la tangente describe el arco PP' $(= \Delta s)$, la tangente gira el ángulo $\Delta\tau$. * Es decir, $\Delta\tau$ es la variación que sufre la inclinación de la tangente. Veamos ahora las siguientes definiciones:

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \textit{curvatura media del arco } \mathrm{PP'}.$$

Se llama curvatura en P $(= \mathrm{K})$ *el límite de la curvatura media cuando* P' *tiende a* P; es decir,

$$(A) \qquad K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} = \text{curvatura en } P.$$

En términos formales, la curvatura es *la razón de la variación de la inclinación con respecto al arco* (compárese con lo dicho en el Artículo 50).

---

* Al ángulo $\Delta\tau$ se le suele llamar *ángulo de contingencia*.

Puesto que el ángulo $\Delta\tau$ se mide en radianes y la longitud del arco Δs en unidades de longitud, se sigue que *la unidad de curvatura en un punto es un radián por unidad de longitud*.

101. Curvatura de la circunferencia.

Teorema. *La curvatura de una circunferencia en un punto cualquiera es igual al recíproco del radio, y, por tanto, es la misma en todos los puntos.*

Demostración. En la figura 82, el ángulo $\Delta\tau$ que forman las tangentes en P y en P', es igual al ángulo central PCP' que forman los radios CP y CP'. Luego,

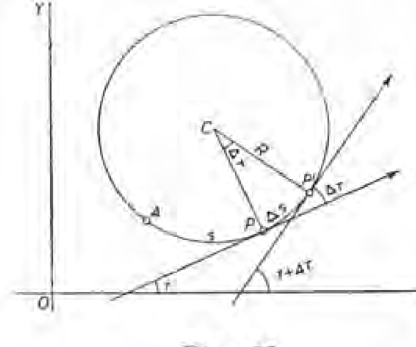


Fig. 82

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\text{ángulo } PCP'}{\Delta s} = \frac{\dfrac{\Delta s}{R}}{\Delta s} = \frac{1}{R},$$

puesto que el ángulo PCP' se mide *en radianes*. Es decir, la curvatura media del arco PP' es igual a una constante. Cuando $\Delta s \rightarrow 0$, tenemos el resultado que afirma el teorema.

Desde el punto de vista de la curvatura, la circunferencia es la curva más sencilla, puesto que un círculo se va curvando de manera uniforme. Evidentemente, la curvatura de una recta es cero en todos sus puntos.

102. Fórmulas para la curvatura (coordenadas rectangulares).

Teorema. *Cuando la ecuación de una curva se da en coordenadas rectangulares, entonces*

$$(B) \qquad K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

siendo y' *y* y'', *respectivamente, la primera y la segunda derivada de* y *con respecto a* x.

Demostración. Puesto que $\tau = \text{arc tg } y'$, $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

derivando, tenemos

$$(1) \qquad \frac{d\tau}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}. \qquad \text{Según } \mathbf{XXII}, \text{ Art. } 60$$

Pero

$$(2) \qquad \frac{ds}{dx} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{Según (3), Art. 95}$$

Dividiendo (1) por (2), tenemos (*B*), como se quería demostrar.

Ejercicio. Si y es la variable independiente, demostrar que

$$(C) \qquad K = \frac{-x''}{(1 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

siendo x' y x'', respectivamente, la primera y la segunda derivadas de x con respecto a y.

La fórmula (*C*) puede emplearse como fórmula adecuada en los casos en que es más sencillo derivar con respecto a y. Además, (*B*) falla cuando y' se vuelve infinita; es decir, cuando la tangente en P es vertical. Entonces en (*C*)

$$x' = 0 \quad \text{y} \quad K = -x''.$$

Signo de K. Eligiendo el signo positivo en el denominador de (*B*), vemos que K y y'' tienen el mismo signo. Es decir, K es positivo o negativo según que la curva sea cóncava hacia arriba o hacia abajo.

Ejemplo 1. Hallar la curvatura de la parábola $y^2 = 4x$, *a*) en el punto (1, 2); *b*) en el vértice.

Solución. $\quad y' = \frac{2}{y}, \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{y}\right) = -\frac{2y'}{y^2}.$

a) Cuando $x = 1$ y $y = 2$, entonces $y' = 1$, $y'' = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo en (*B*), $K = -\frac{1}{8}\sqrt{2} = -0,177$. Según esto, en (1, 2) la curva es cóncava hacia abajo, y la inclinación de la tangente varía a razón de 0,177 radianes por unidad de arco. Puesto que 0,177 radianes $= 10°\ 7'$, el ángulo que forman las tangentes en $P(1, 2)$ y en un punto Q, siendo el arco PQ igual a 0.1 es, aproximadamente, de 1°.

b) En el vértice (0, 0), y' se vuelve infinita. Por tanto, según la fórmula (C),

$$x' = \frac{1}{2}y, \quad x'' = \frac{1}{2}\frac{dy}{dy} = \frac{1}{2}, \quad K = -\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. Hallar el valor de K para la cicloide (véase el Artículo 81)

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

Solución. En el ejemplo 2 del Artículo 81, hemos hallado

$$y' = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}.$$

Luego,

$$1 + y'^2 = \frac{2}{1 - \cos\theta}.$$

Además, en el ejemplo del Artículo 82, se ha demostrado que

$$y'' = -\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}.$$

Sustituyendo en (B), resulta

$$K = -\frac{1}{2a\sqrt{2-2\cos\theta}} = -\frac{1}{4a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta}.$$

103. Fórmula especial para las ecuaciones paramétricas. De la ecuación **(A)** del Artículo 81 obtenemos, derivando,

$$(1) \qquad \frac{dy'}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

De esto, empleando **(B)** del Artículo 82 y sustituyendo en **(B)** del Artículo 102, y reduciendo, obtenemos

$$(D) \qquad K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde los acentos indican derivadas con respecto a t; es decir,

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

La fórmula **(D)** es cómoda, pero a menudo es mejor proceder como en el ejemplo del Artículo 102; hallando y' como en el Artículo 81, y'' como en el Artículo 82, y sustituyendo directamente en **(B)**.

104. Fórmula para la curvatura (coordenadas polares).

Teorema. *Cuando la ecuación de una curva está dada en coordenadas polares,*

$$(E) \qquad K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donde ρ' y ρ'' son, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de ρ con respecto a θ.

Demostración. Según **(I)** del Artículo 85,

$$\tau = \theta + \psi.$$

Luego

$$(1) \qquad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 + \frac{d\psi}{d\theta}.$$

Además, según (H) del Artículo 85,

$$\psi = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\rho}{\rho'}.$$

Luego $$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho^2}.$$

Entonces, según (1),

(2) $$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{\rho^2 + 2\,\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

De (I) del Artículo 96,

(3) $$\frac{ds}{d\theta} = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dividiendo (2) por (3), tenemos (E), como se quería demostrar.

EJEMPLO. Hallar la curvatura de la espiral logarítmica $\rho = e^{a\theta}$ en un punto cualquiera.

Solución. $\dfrac{d\rho}{d\theta} = \rho' = ae^{a\theta} = a\rho$; $\dfrac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho'' = a^2e^{a\theta} = a^2\,\rho$.

Sustituyendo en (E), $K = \dfrac{1}{\rho\sqrt{1 + a^2}}$.

105. Radio de curvatura. Se llama radio de curvatura R en un punto de una curva, al recíproco de la curvatura en ese punto. Luego, de (B), se obtiene,

(F) $$R = \frac{1}{K} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

EJEMPLO. Hallar el radio de curvatura en un punto cualquiera de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (figura en el Capítulo XXVI).

Solución. $y' = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$; $y'' = \dfrac{1}{2\,a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \dfrac{y}{a^2}$.

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{y^2}{a^2}. \quad \therefore\ R = \frac{y^2}{a}.$$

106. Curvas de ferrocarril; curvas de transición. Al proyectar las curvas de un ferrocarril, y debido a la gran velocidad de los trenes, no conviene pasar bruscamente de la vía recta a una curva circular. A fin de hacer gradual el cambio de curvatura, los ingenieros se sirven de curvas de transición para unir la parte recta de una vía con la parte que es un arco circular. Tal curva debe tener curvatura cero en su

punto de unión con la vía recta, y la curvatura de la vía circular donde se une con ésta. Por lo general, se emplean arcos de parábolas cúbicas como curvas de transición.

EJEMPLO. Una curva de transición en una vía de ferrocarril tiene la forma de un arco de la parábola cúbica $y = \frac{1}{3} x^3$. ¿A razón de cuántos radianes por kilómetro cambia un vagón en esa vía su dirección (1 Km = unidad de longitud) cuando pasa: *a*) por el punto (3, 9); *b*) por el punto (2, $\frac{8}{3}$), y *c*) por el punto (1, $\frac{1}{3}$)?

Solución. $\qquad \dfrac{dy}{dx} = x^2, \qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = 2x.$

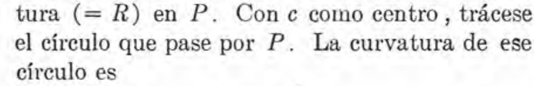
Sustituyendo en $\qquad K = \dfrac{2x}{(1 + x^4)^{\frac{3}{2}}}.$

a) En (3, 9), $K = \dfrac{6}{(82)^{\frac{3}{2}}}$ radianes por Km = 28′ por Km.

b) En (2, $\frac{8}{3}$), $K = \dfrac{4}{(17)^{\frac{3}{2}}}$ radianes por Km = 3° 16′ por Km.

c) En (1, $\frac{1}{3}$), $K = \dfrac{2}{(2)^{\frac{3}{2}}}$ radianes por Km = 40° 30′ por Km.

107. Círculo de curvatura. Consideremos un punto cualquiera de la curva C (fig. 83). La tangente a la curva en P tiene la misma pendiente que la curva en P (Art. 42). De manera análoga, podemos construir, para cada punto de la curva, un círculo tangente cuya curvatura sea igual a la curvatura de la curva dada, en ese punto. Para esto, trácese la normal a la curva en P hacia el lado cóncavo de la curva. Mídase en esa normal la distancia Pc = radio de curvatura (= R) en P.



Con c como centro, trácese el círculo que pase por P. La curvatura de ese círculo es

$$K = \frac{1}{R},$$

que también es la curvatura de la curva dada en el punto P. El así construído se llama *círculo de curvatura* en el punto P de la curva.

Fig. 83

En general, el círculo de curvatura de una curva en un punto cortará a la curva en ese punto, tal como se indica en la figura 83. (Compárese con la tangente en un punto de inflexión, que vimos en el Artículo 57.)

Así como la tangente en P nos da la dirección de la curva en P, así el círculo de curvatura en P nos ayuda notablemente a formarnos un concepto geométrico de la curvatura de la curva en P, puesto que

la razón de la variación de la dirección de la curva y del círculo son idénticas en P.

Más adelante (Art. 114) se definirá el círculo de curvatura como la posición límite de un círculo secante. Esa definición es análoga a la que se dió en el Artículo 28 para la tangente.

EJEMPLO 1. Hallar el radio de curvatura en el punto (3, 4) de la hipérbola equilátera $xy = 12$ (fig. 84), y trazar el círculo de curvatura correspondiente.

Solución. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}.$

Para (3, 4), $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{9}.$

$$\therefore \quad R = \frac{[1 + 16/9]^{3/2}}{8/9} = \frac{125}{24} = 5\tfrac{5}{24}.$$

El círculo de curvatura corta a la curva en dos puntos.

EJEMPLO 2. Hallar el valor de R correspondiente al punto (2, 1) de la hipérbola

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = 10.$$

Solución. Derivando, considerando y como una función implícita de x, obtenemos

$$x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0.$$

Derivando otra vez, considerando y y y' como funciones implícitas de x, obtenemos

$$1 + 4y' - 2y'^2 + 2(x - y)y'' = 0.$$

Fig. 84

Sustituyendo los valores dados $x = 2$, $y = 1$, hallamos $y' = -2$, $y'' = 15/2$. De esto, según (F),

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{5}.$$

El método de este ejemplo (a saber, el considerar y y y' como funciones implícitas de x) se emplea muchas veces con ventaja cuando se piden sólo los valores numéricos de y' y y'', y no expresiones generales de estas derivadas en términos de x y y.

PROBLEMAS

Hallar el radio de curvatura en cada una de las siguientes curvas en el punto indicado. Trazar la curva, y el círculo de curvatura correspondiente.

1. $2y = x^2$; (0, 0). *Sol.* $R = 1$.

2. $6y = x^3$; (2, 4/3). $R = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

3. $y^2 = x^3$; $(1, 1)$. *Sol.* $R = \frac{13}{6}\sqrt{13}$.

4. $y = \operatorname{sen} x$; $(\frac{1}{2}\pi, 1)$. $R = 1$.

5. $y = e^x$; $(0, 1)$. $R = 2\sqrt{2}$.

6. $x^2 - 4y^2 = 9$; $(5, 2)$.

7. $y^2 = x^3 + 8$; $(1, 3)$.

8. $y = 2 \operatorname{sen} 2x$; $(\frac{1}{4}\pi, 2)$.

9. $y = \operatorname{tg} x$; $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

Calcular el radio de curvatura en un punto cualquiera (x_1, y_1) en cada una de las siguientes curvas:

10. $y = x^3$. *Sol.* $R = \dfrac{(1 + 9x_1^4)^{\frac{3}{2}}}{6x_1}$.

11. $y^2 = 2px$.

12. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. $R = \dfrac{(b^4x_1^2 + a^4y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$.

13. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

14. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. $R = \dfrac{2(x_1 + y_1)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$.

15. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $R = 3(ax_1y_1)^{\frac{1}{3}}$.

16. $x = r \operatorname{arc\,vers} \dfrac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. $R = 2\sqrt{2ry_1}$.

17. $y = \ln \sec x$. $R = \sec x_1$.

18. Si el punto de contacto de la línea tangente en $(2, 4)$ a la parábola $y^2 = 8x$ se mueve sobre la curva a una distancia $\Delta s = 0,1$, ¿qué ángulo, aproximadamente, girará la línea tangente? (Empléense diferenciales.)

19. La inclinación de la curva $27y = x^3$ en el punto A $(3, 1)$ es 45°. Empléense diferenciales para hallar aproximadamente la inclinación de la curva en el punto B, si la distancia a lo largo de la curva desde A hasta B es $\Delta s = 0,2$ unidades.

Calcular el radio de curvatura en un punto cualquiera (ρ_1, θ_1) sobre cada una de las siguientes curvas:

20. El círculo $\rho = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $R = \frac{1}{2}a$.

21. La espiral de Arquímedes $\rho = a\theta$. (Fig., Cap. XXVI).
$$R = \frac{(\rho_1^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho_1^2 + 2a^2}.$$

22. La cardioide $\rho = a(1 - \cos\theta)$. (Fig., Cap. XXVI).
$$R = \tfrac{2}{3}\sqrt{2a\rho_1}.$$

23. La lemniscata $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$. (Fig., Cap. XXVI).
$$R = \frac{a^2}{3\rho_1}.$$

24. La parábola $\rho = a \sec^2 \frac{1}{2}\theta$. (Fig. Cap. XXVI).
$$R = 2a \sec^3 \tfrac{1}{2}\theta_1.$$

25. La curva $\rho = a \operatorname{sen}^3 \frac{1}{3}\theta$. $R = \frac{3}{4} a \operatorname{sen}^2 \frac{1}{3}\theta_1$.

26. La trisectriz $\rho = 2a\cos\theta - a$. *Sol.* $R = \dfrac{a(5 - 4\cos\theta_1)^{3/2}}{9 - 6\cos\theta_1}$.

27. La hipérbola equilátera $\rho^2\cos 2\theta = a^2$. $R = \dfrac{\rho_1{}^3}{a^2}$.

28. La cónica $\rho = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$. $R = \dfrac{a(1 - e^2)(1 - 2e\cos\theta_1 + e^2)^{3/2}}{(1 - e\cos\theta_1)^3}$.

Hallar el radio de curvatura en cada una de las siguientes curvas en el punto indicado. Trazar la curva y el círculo de curvatura correspondiente.

29. $x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad t = 1.$ $R = 4\sqrt{2}$.

30. $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3; \quad t = 1.$ $R = 6.$

31. $x = 2e^t, \quad y = 2e^{-t}; \quad t = 0.$ $R = 2\sqrt{2}$.

32. $x = a\cos t, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,t; \quad t = t_1.$ $R = a.$

33. $x = 2t, \quad y = \dfrac{4}{t}; \quad t = 1.$

34. $x = t^2 + 1, \quad y = t^3 - 1; \quad t = 1.$

35. $x = 4\cos t, \quad y = 2\,\mathrm{sen}\,t; \quad y = 1.$

36. $x = 2\,\mathrm{sen}\,t, \quad y = \cos 2t; \quad t = \tfrac{1}{6}\pi.$

37. $x = \mathrm{tg}\,t, \quad y = \mathrm{ctg}\,t; \quad t = \tfrac{1}{4}\pi.$

38. $x = t - \mathrm{sen}\,t, \quad y = 1 - \cos t; \quad t = \pi.$

39. Hallar el radio de curvatura en un punto cualquiera $(t = t_1)$ de la hipocicloide $x = a\cos^3 t, \quad y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$. *Sol.* $R = 3a\,\mathrm{sen}\,t_1\cos t_1$.

40. Hallar el radio de curvatura en un punto cualquiera $(t = t_1)$ de la curva

$$x = a(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t),$$
$$y = a(\mathrm{sen}\,t - t\cos t).$$

Esta curva es la evolvente (véase el Art. 111) de un círculo. *Sol.* $R = at_1$.

41. Hallar el punto de la curva $y = e^x$ donde la curvatura es máxima. *Sol.* $x = -0{,}347$.

42. Hallar los puntos de la curva $3y = x^3 - 2x$ donde la curvatura es máxima. *Sol.* $x = \pm 0{,}931$.

43. Demostrar que en un punto de inflexión el radio de curvatura se hace infinito.

44. Dada la curva $y = 3x - x^3$,

a) Hallar el radio de curvatura en el punto máximo de la curva, y trazar el círculo de curvatura correspondiente.

b) Demostrar que el punto máximo de la curva no es el punto de curvatura máxima.

c) Hallar, aproximando hasta la centésima, la abscisa del punto de curvatura máxima. *Sol.* $x = 1{,}01$.

45. Hallar el radio de curvatura en cada punto máximo o mínimo de la curva $y = x^4 - 2x^2$. Trazar la curva y los círculos de curvatura. Hallar los puntos de la curva donde el radio de curvatura es mínimo.

46. Demostrar que en un punto de la curva $y = f(x)$, de radio de curvatura mínimo, se tiene

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = \frac{d^3y}{dx^3}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

47. Demostrar que la curvatura de la parábola cúbica $3a^2y = x^3$ aumenta desde cero hasta un valor máximo cuando x aumenta desde cero hasta $\frac{1}{5}a\sqrt[4]{125}$. Hallar el valor mínimo del radio de curvatura. *Sol.* $0{,}983\,a$.

108. Centro de curvatura. La tangente en $P(x, y)$ tiene la propiedad de que x, y y y' tienen los mismos valores en P para esta línea y para la curva. El círculo de curvatura en P tiene una propiedad semejante: a saber, x, y, y', y'' tienen los mismos valores en P para este círculo y para la curva.

DEFINICIÓN. *Se llama centro de curvatura* (α, β) *de un punto* P(x, y) *sobre una curva, el centro del círculo de curvatura.*

Teorema. *Las coordenadas* (α, β) *del centro de curvatura en el punto* P(x, y) *son*

$$\textbf{(G)} \qquad \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad \beta = y + \frac{(1+y'^2)}{y''}.$$

Demostración. La ecuación del círculo de curvatura es

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

donde R está dado por **(F)**. Derivando (1),

$$(2) \qquad y' = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}, \quad y'' = -\frac{R^2}{(y-\beta)^3}.$$

De la segunda de estas ecuaciones, después de sustituir el valor de R según **(F)**, obtenemos

$$(3) \qquad (y-\beta)^3 = -\frac{(1+y'^2)^3}{y''^3}. \quad \therefore\ y-\beta = -\frac{1+y'^2}{y''}.$$

De la primera de las ecuaciones (2) obtenemos, empleando (3),

$$(4) \qquad x-\alpha = -y'(y-\beta) = \frac{y'(1+y'^2)}{y''}.$$

Despejando β de (3) y α de (4), tenemos (*G*), como se quería demostrar.

Ejercicio 1. Obtener directamente la fórmula (*G*) empleando (*G*) del Artículo 95, y la figura 85.

$$(\alpha = x - R \operatorname{sen} \tau, \quad \beta = y + R \cos \tau, \text{ etc.})$$

Ejercicio 2. Si x' y x'' son, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de x con respecto a y, establézcase (*G*) en la forma

$$(H) \qquad \alpha = x + \frac{1 + x'^2}{x''}, \quad \beta = y - \frac{x'(1 + x'^2)}{x''}.$$

Las fórmulas (*H*) pueden emplearse cuando y' se hace infinita, o si es más sencillo derivar con respecto a y.

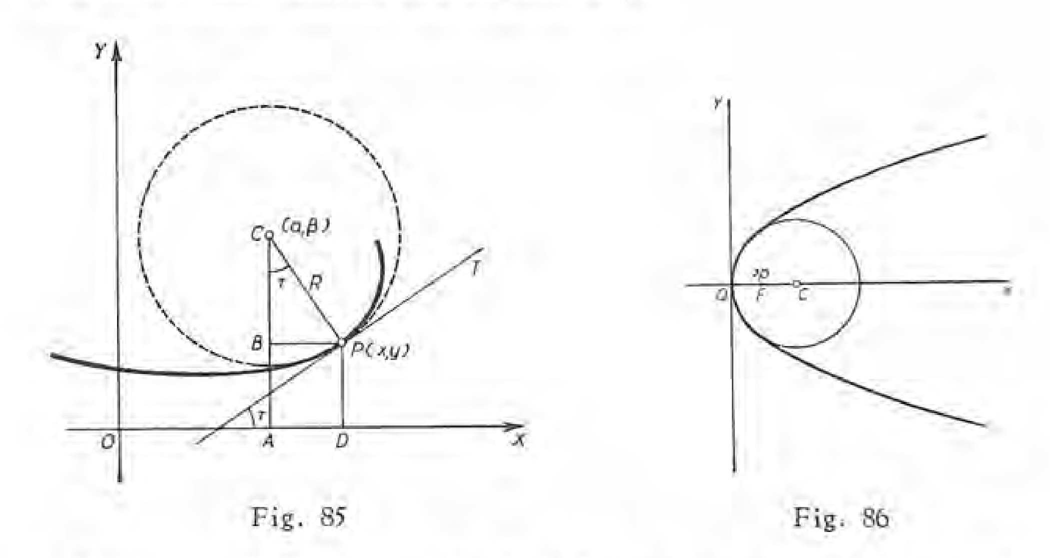


Fig. 85 Fig. 86

Ejemplo. Hallar las coordenadas del centro de curvatura de la parábola $y^2 = 4\,px$ (fig. 86), *a*) para un punto cualquiera de la curva; *b*) para el vértice.

Solución. Según (*H*), tendremos $x' = \frac{y}{2\,p}$, $x'' = \frac{1}{2\,p}$.

Luego,
$$\alpha = x + \frac{y^2 + 4\,p^2}{2\,p} = 3\,x + 2\,p.$$

$$\beta = y - \frac{y\,(y^2 + 4\,p^2)}{4\,p^2} = -\frac{y^3}{4\,p^2}.$$

Por tanto,
$$a)\quad \left(3\,x + 2\,p,\ -\frac{y^3}{4\,p^2}\right)$$

es el centro de curvatura correspondiente a un punto cualquiera de la curva.

b) $(2\,p,\ 0)$ es el centro de curvatura correspondiente al vértice $(0,\ 0)$.

Por el Artículo 57 sabemos que en un punto de inflexión (como Q de la figura 87)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 .$$

Luego, según **(B)** del Artículo 102, la curvatura $K = 0$, y según **(F)** del Artículo 105 y **(G)** del Artículo 108 vemos que, en general, α, β y R aumentan sin límite cuando la segunda derivada tiende a cero, a menos que la tangente sea vertical. Es decir: si suponemos que P, con su tangente, se mueve a lo largo de la curva hasta P', en el punto de inflexión Q la curvatura es cero, el giro de la tangente se detiene momentáneamente, y como el giro cambia de sentido el centro de curvatura se aleja indefinidamente y el radio de curvatura llega a ser infinito.

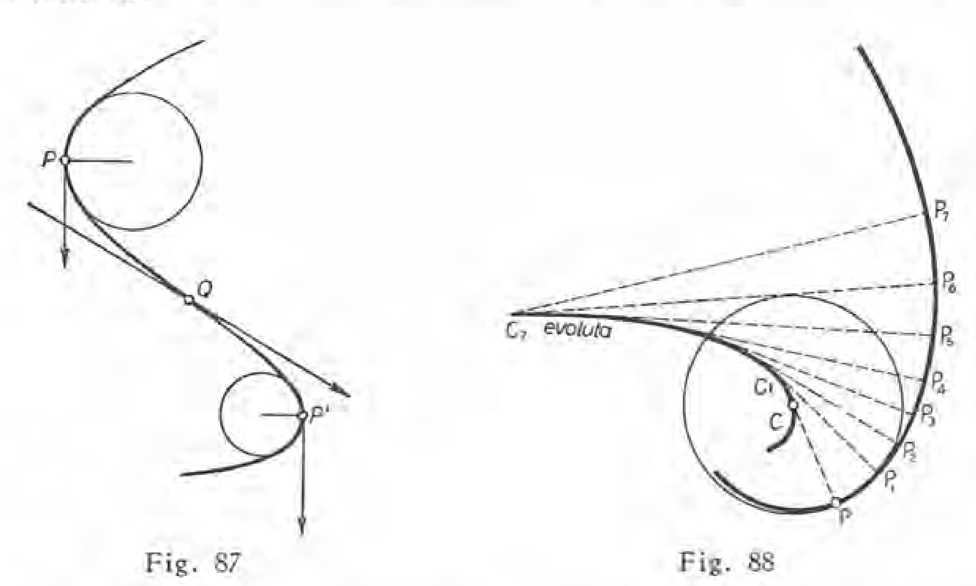


Fig. 87 Fig. 88

109. Evolutas. El lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva dada se llama la *evoluta* de esa curva. Consideremos el círculo de curvatura en un punto P de una curva. Si P se mueve a lo largo de la curva, podemos suponer que el círculo de curvatura correspondiente ruede al mismo tiempo, variando su radio de manera que sea siempre igual al radio de curvatura de la curva en el punto P. La curva CC_7 que describe el centro del círculo es la evoluta de PP_7.

Las fórmulas **(G)** y **(H)** del Artículo 108 dan las coordenadas de un punto cualquiera (α, β) de la evoluta, expresadas en función de las coordenadas del punto correspondiente (x, y) de la curva dada. Pero y es una función de x; por tanto, estas fórmulas nos dan inmediatamente *las ecuaciones paramétricas de la evoluta en función del parámetro* x.

Para hallar la ecuación cartesiana rectangular de la evoluta, basta eliminar x y y entre las dos expresiones y la ecuación de la curva dada. No puede darse ningún procedimiento general de eliminación que sea aplicable en todos los casos; el método depende de la forma de la ecuación dada. Sin embargo, en muchos casos, el estudiante podrá hallar la ecuación rectangular de la evoluta por medio de los tres pasos siguientes.

Instrucciones generales para hallar la ecuación de la evoluta en coordenadas rectangulares.

PRIMER PASO. *Hallar* α *y* β *de las fórmulas* **(G)** *o* **(H)** *del Artículo 108.*

SEGUNDO PASO. *Resolver las dos ecuaciones resultantes con respecto a* x *y* y *en función de* α *y* β.

TERCER PASO. *Sustituir estos valores de* x *y* y *en la ecuación dada, y reducir. Así se obtiene una relación entre las variables* α *y* β *que es la ecuación de la evoluta.*

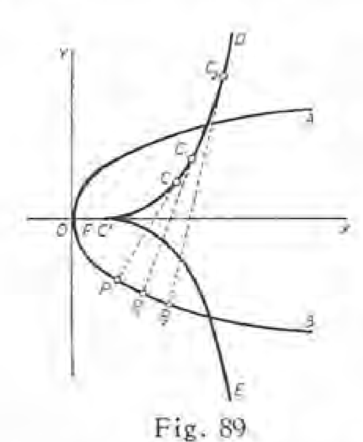


Fig. 89

EJEMPLO 1. Hallar la ecuación de la evoluta en la parábola $y^2 = 4\,px$ (fig. 89).

Solución. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,p}{y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{4\,p^2}{y^3}.$

Primer paso. $\alpha = 3\,x + 2\,p, \quad \beta = -\dfrac{y^3}{4\,p^2}.$

Segundo paso. $x = \dfrac{\alpha - 2\,p}{3}, \quad y = -(4\,p^2\beta)^{1/3}.$

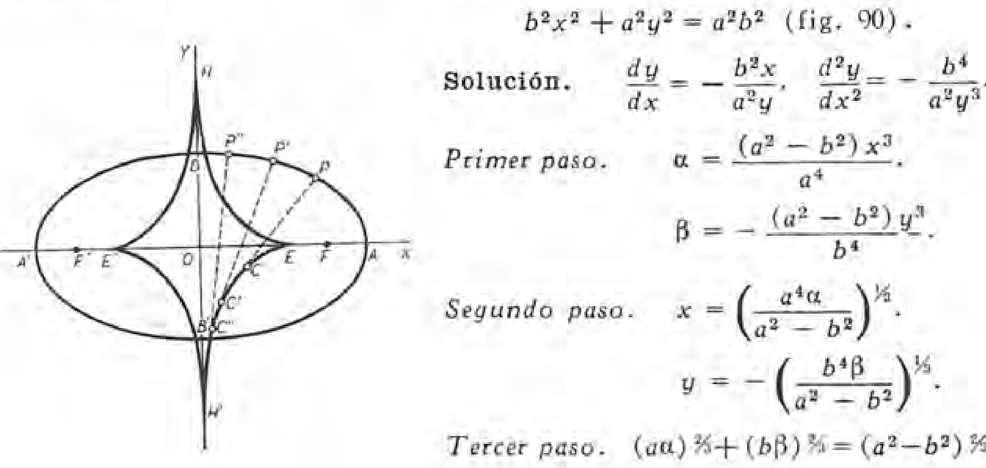
Tercer paso. $(4\,p^2\beta)^{2/3} = 4\,p\left(\dfrac{\alpha - 2\,p}{3}\right).$

o sea, $p\beta^2 = \frac{4}{27}(\alpha - 2\,p)^3.$

Recordando que α representa la abscisa y β la ordenada en un sistema de coordenadas rectangulares, vemos que la evoluta de la parábola AOB es la parábola semicúbica $DC'E$ (fig. 89); los centros de curvatura correspondientes a O, P, P_1, P_2 son C', C, C_1, C_2 respectivamente.

EJEMPLO 2. Hallar la ecuación de la evoluta de la elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(fig. 90)}.$$



Solución. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}, \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{b^4}{a^2y^3}.$

Primer paso. $\alpha = \dfrac{(a^2 - b^2)\,x^3}{a^4}.$

$$\beta = -\frac{(a^2 - b^2)\,y^3}{b^4}.$$

Segundo paso. $x = \left(\dfrac{a^4\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{1/3}.$

$$y = -\left(\frac{b^4\beta}{a^2 - b^2}\right)^{1/3}.$$

Tercer paso. $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3},$

Fig. 90

que es la ecuación de la evoluta $EHE'H'$ de la elipse $ABA'B'$. Los puntos E, E', H', H son los centros de curvatura correspondientes a los puntos A, A', B, B' de la curva, y C, C', C'' corresponden a los puntos P, P', P''.

EJEMPLO 3. Las ecuaciones paramétricas de una curva son

$$(1) \qquad x = \frac{t^2 + 1}{4}, \quad y = \frac{t^3}{6}.$$

Hallar la ecuación de la evoluta en forma paramétrica, construir la curva y la evoluta, hallar el radio de curvatura en el punto donde $t = 1$ y trazar el círculo de curvatura correspondiente.

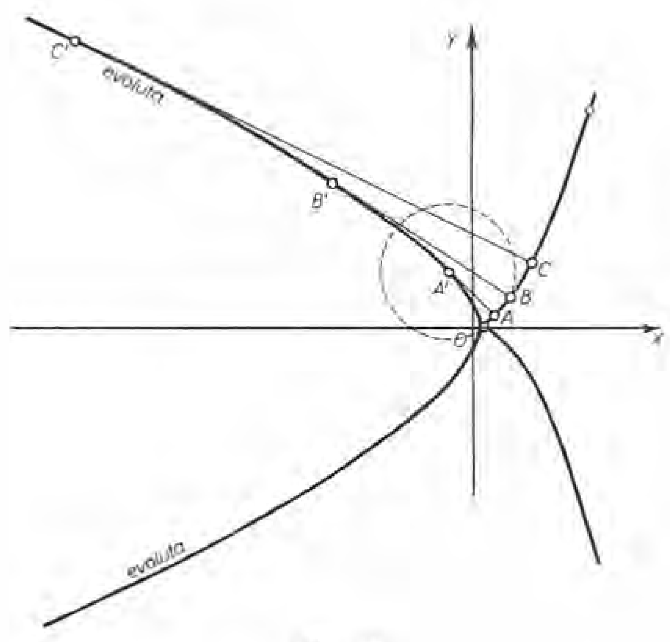


Fig. 91

Solución. $\frac{dx}{dt} = \frac{t}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}t^2. \quad \therefore \quad y' = t.$

Según (A) del Art. 81

$\frac{dy'}{dt} = 1. \quad \therefore \quad y'' = \frac{2}{t}.$ Según (B) del Art. 82

Sustituyendo en (G), y reduciendo, obtenemos

$$(2) \qquad \alpha = \frac{1 - t^2 - 2t^4}{4}, \quad \beta = \frac{4t^3 + 3t}{6},$$

que son las ecuaciones paramétricas de la evoluta. Tomando varios valores del parámetro t, calculamos x y y de (1), α y β de (2), y disponemos los resultados en forma de tabla.

t	x	y	α	β
-3	$5/2$	$-9/2$		
-2	$5/4$	$-4/3$	$-35/4$	$-19/3$
$-3/2$	$13/16$	$-9/16$	$-91/32$	-3
-1	$1/2$	$-1/6$	$-1/2$	$-7/6$
0	$1/4$	0	$1/4$	0
1	$1/2$	$1/6$	$-1/2$	$7/6$
$3/2$	$13/16$	$9/16$	$-91/32$	3
2	$5/4$	$4/3$	$-35/4$	$19/3$
3	$5/2$	$9/2$		

Construyamos ahora la curva y su evoluta (fig. 91).

El punto $(1/4, 0)$ es común a la curva dada y a su evoluta. La curva dada (una parábola semicúbica) está toda a la derecha de $x = 1/4$, y la evoluta toda a la izquierda de este punto.

El círculo de curvatura en $A\ (1/2, 1/6)$, donde $t = 1$, tendrá su centro en $A'\ (-1/2, 7/6)$ sobre la evoluta, y su radio será AA'. A fin de comprobar nuestro trabajo, hallemos el radio de curvatura en A. De (F), del Artículo 105, obtenemos:

$$R = \frac{t(1+t^2)^{3/2}}{2} = \sqrt{2} \text{ cuando } t = 1.$$

Esto debe ser igual a la distancia

$$AA' = \sqrt{(1/2 + 1/2)^2 + (1/6 - 7/6)^2} = \sqrt{2}.$$

Según (1) del Art. 3.

EJEMPLO 4. Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de la cicloide

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Solución. Como en el ejemplo del Artículo 82, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} t}{1 - \cos t}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

Sustituyendo estos resultados en las fórmulas (G), del Artículo 108, obtenemos

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = a(t + \operatorname{sen} t), \\ \beta = -a(1 - \cos t). \end{cases}$$

NOTA. Si eliminamos t entre las ecuaciones (4), resulta la ecuación rectangular de la evoluta $OO'Q^v$ referida a los ejes $O'\alpha$ y $O'\beta$. Las coordenadas de O con respecto a estos ejes son $(-\pi a, -2a)$. Transformemos las ecuaciones (4) refiriéndolas a los nuevos ejes OX y OY. Entonces

$$\alpha = x - \pi a, \quad \beta = y - 2a.$$

Además, sea

$$t = t' - \pi.$$

Sustituyendo en (4) y reduciendo, las ecuaciones de la evoluta se transforman en

$$(5) \quad \begin{cases} x = a(t' - \operatorname{sen} t'), \\ y = a(1 - \cos t'). \end{cases}$$

Fig. 92

Puesto que (5) y (3) son de la misma forma, tenemos el resultado:

La evoluta de una cicloide es una cicloide, cuyo círculo generador es igual al de la cicloide dada.

110. Propiedades de la evoluta. La evoluta tiene dos propiedades interesantes.

Teorema 1. *La normal en* P(x, y) *a la curva dada es tangente a la evoluta en el centro de curvatura* C(α, β) *correspondiente a* P. (Ver las figuras del artículo anterior.)

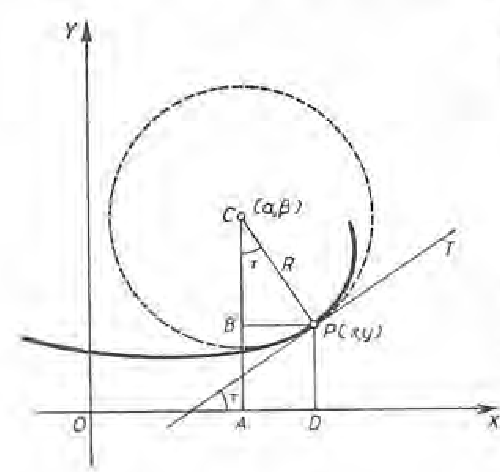


Fig. 93

Demostración. En la figura 93,

$$(1) \quad \alpha = x - R \operatorname{sen} \tau, \quad \beta = y + R \cos \tau.$$

La recta PC está sobre la normal en P, y la pendiente de la recta PC es igual a

$$(2) \quad \frac{y - \beta}{x - \alpha} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \tau}$$

= pendiente de la normal en P.

Ahora vamos a demostrar que la pendiente de la evoluta es igual a la pendiente de PC. En efecto, obsérvese que

$$\text{pendiente de la evoluta} = \frac{d\beta}{d\alpha},$$

puesto que α y β son las coordenadas rectangulares de cualquier punto de la evoluta.

Elijamos como variable independiente la longitud del arco de la curva dada; entonces x, y, R, τ, α, β son funciones de s. Derivando (1) con respecto a s, obtenemos

$$(3) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dx}{ds} - R \cos\tau \frac{d\tau}{ds} - \operatorname{sen}\tau \frac{dR}{ds},$$

$$(4) \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{dy}{ds} - R \operatorname{sen}\tau \frac{d\tau}{ds} + \cos\tau \frac{dR}{ds}.$$

Pero, según el Artículo 95,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\tau, \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\tau, \text{ y } \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{R}.$$

Sustituyendo en (3) y (4) y reduciendo, obtenemos

$$(5) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = -\operatorname{sen}\tau \frac{dR}{ds}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \cos\tau \frac{dR}{ds}.$$

Dividiendo la segunda ecuación de (5) por la primera, se obtiene

$$(6) \qquad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\operatorname{ctg}\tau = -\frac{1}{\operatorname{tg}\tau} = \text{pendiente de } PC.$$

Teorema 2. *La longitud de un arco de la evoluta es igual a la diferencia entre los radios de curvatura de la curva dada que son tangentes a ese arco en sus extremidades, a condición de que en todo el largo del arco de la curva dada* R *aumente o disminuya.*

Demostración. Elevando al cuadrado las ecuaciones (5) y sumando, obtenemos

$$(7) \qquad \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2$$

Pero si s' = longitud de un arco de la evoluta,

$$ds'^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

según (*C*) del Artículo 95, si $s = s'$, $x = \alpha$, $y = \beta$. Luego (7) nos dice que

$$(8) \qquad \left(\frac{ds'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2, \text{ o sea, } \frac{ds'}{ds} = \pm\frac{dR}{ds}.$$

Si nos limitamos a un arco de la curva dada para el cual el segundo miembro no cambia de signo, podemos escribir

$$(9) \qquad \frac{ds'}{dR} = +1 \quad \text{ó} \quad \frac{ds'}{dR} = -1.$$

Es decir, *la razón de variación del arco de la evoluta con respecto a* R *es* $+1$ *ó* -1. Luego, según el Artículo 50, incrementos correspondientes de s' y R son numéricamente iguales. Es decir,

$$(10) \qquad s' - s'_0 = \pm (R - R_0),$$

o sea (fig. 88), $\qquad$ arco $CC_1 = \pm (P_1C_1 - PC)$.

Queda así demostrado el teorema.

En el ejemplo 4 del Artículo 109, observamos que en O', $R = 0$; en P^v, $R = 4a$. Luego arco $O'QQ^v = 4a$.

La longitud de una arcada de la cicloide (como $OO'Q^v$*) es ocho veces la longitud del radio del círculo que la engendra.*

111. Las evolventes y su construcción mecánica. Encórvese una varilla flexible dándole la forma de la curva C_1C_9 (fig. 94), evoluta de la curva P_1P_9; supóngase que uno de los extremos de un hilo de longitud R_9 está pegado a la varilla en el punto C_9 y que el hilo esté tendido a lo largo de la varilla (o sea, de la curva). Según lo dicho en el artículo anterior, es claro que cuando el hilo se desarrolla, manteniéndose tirante, el extremo libre describirá la curva P_1P_9. De esto viene el nombre *evoluta*.

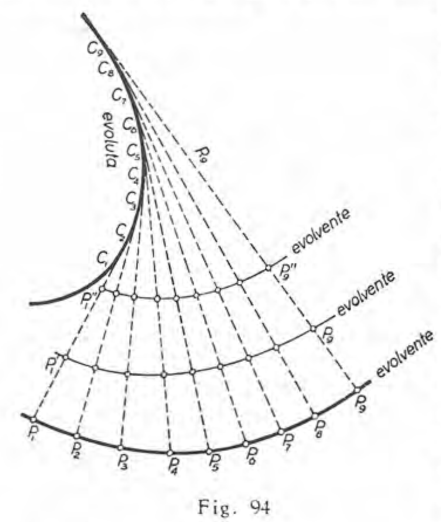


Fig. 94

Decimos que la curva P_1P_9 es una *evolvente* de C_1C_9. Evidentemente, cualquier punto del hilo describirá una evolvente, de suerte que una curva dada tiene una infinidad de evolventes, pero solamente una evoluta.

Las evolventes P_1P_9, $P_1'P_9'$, $P_1''P_9''$ se llaman *curvas paralelas*, puesto que la distancia entre dos de ellas, medida sobre sus normales comunes, es constante.

El estudiante debe observar la posibilidad de construir la parábola y la elipse (figuras 89 y 90), por medio de sus evolutas, empleando este método.

PROBLEMAS

Hallar el radio y el centro de curvatura de cada una de las siguientes curvas en el punto dado. Verificar los resultados, demostrando: *a*) que el centro de curvatura está en la normal a la curva en el punto dado; y *b*) que la distancia desde el punto dado hasta el centro de curvatura es igual al radio de curvatura.

1. $2\,py = x^2$; $(0,\ 0)$. *Sol.* $(0,\ p)$.
2. $x^2 + 4\,y^2 = 25$; $(3,\ 2)$. $(^{81}/_{100},\ -{}^{96}/_{25})$.
3. $x^3 - y^3 = 19$; $(3,\ 2)$. $(^{519}/_{76},\ ^{17}/_{57})$.
4. $xy = 6$; $(2,\ 3)$. $(^{63}/_{12},\ ^{31}/_{6})$.
5. $y = e^x$, $(0,\ 1)$. $(-2,\ 3)$.
6. $y = \cos x$; $(0,\ 1)$. $(0,\ 0)$.
7. $y = \ln x$; $(1,\ 0)$. $(3,\ -2)$.
8. $y = 2\,\text{sen}\,2\,x$; $(\frac{1}{4}\pi,\ 2)$. $(\frac{1}{4}\pi,\ ^{15}/_{8})$.
9. $(x + 6)^3 + xy^2 = 0$; $(-3,\ 3)$. $(-13,\ 8)$.
10. $2\,y = x^2 - 4$; $(0,\ -2)$.
11. $xy = x^2 + 2$ $(2,\ 3)$.
12. $y = \text{sen}\,\pi x$; $(\frac{1}{2},\ 1)$.
13. $y = \frac{1}{2}\,\text{tg}\,2\,x$; $(\frac{1}{8}\pi,\ \frac{1}{2})$.

Hallar las coordenadas del centro de curvatura en un punto cualquiera $(x,\ y)$ de cada una de las siguientes curvas:

14. $y^2 = 2\,px$. *Sol.* $\alpha = \dfrac{3\,y^2 + 2\,p^2}{2\,p}$, $\beta = -\dfrac{y^3}{p^2}$.
15. $y^3 = a^2x$. $\alpha = \dfrac{a^4 + 15\,y^4}{6\,a^2y}$, $\beta = \dfrac{a^4y - 9\,y^5}{2\,a^4}$.
16. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. $\alpha = \dfrac{(a^2 + b^2)\,x^3}{a^4}$,
    $\beta = -\dfrac{(a^2 + b^2)\,y^3}{b^4}$.
17. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. $\alpha = x + 3\,x^{1/3}y^{2/3}$,
    $\beta = y + 3\,x^{2/3}y^{1/3}$.

18. Hallar los radios y los centros de curvatura de la curva $xy = 4$ en los puntos $(1,\ 4)$ y $(2,\ 2)$. Trazar el arco de la evoluta entre esos centros. ¿Cual es su longitud?

Sol. En $(1,\ 4)$, $R_1 = \dfrac{17}{8}\sqrt{17}$, $\alpha = \dfrac{19}{2}$ $\beta = \dfrac{49}{8}$;
en $(2,\ 2)$, $R_2 = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 4$, $\beta = 4$;
$R_1 - R_2 = 5{,}933$.

Hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta de cada una de las siguientes curvas en función del parámetro t. Trazar la curva y su evoluta, y, por lo menos, un círculo de curvatura.

19. $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3.$ *Sol.* $\alpha = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - t^4), \quad \beta = -4t^3.$

20. $x = 3t, \quad y = t^2 - 6.$ $\alpha = -\frac{4}{3}t^3, \quad \beta = 3t^2 - \frac{3}{2}.$

21. $x = 6 - t^2, \quad y = 2t.$ $\alpha = 4 - 3t^2, \quad \beta = -2t^3.$

22. $x = 2t, \quad y = t^2 - 2.$ $\alpha = -2t^3, \quad \beta = 3t^2.$

23. $x = 4t, \quad y = 3 + t^2.$ $\alpha = -t^3, \quad \beta = 11 + 3t^2.$

24. $x = 9 - t^2, \quad y = 2t.$ $\alpha = 7 - 3t^2, \quad \beta = -2t^3.$

25. $x = 2t, \quad y = \dfrac{3}{t}.$ $\alpha = \dfrac{12t^4 + 9}{4t^3}, \quad \beta = \dfrac{27 + 4t^4}{6t}.$

26. $x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t.$ $\alpha = \dfrac{(a^2 - b^2)}{a}\cos^3 t,$

$\beta = \dfrac{(b^2 - a^2)}{b}\operatorname{sen}^3 t.$

27. $x = a\cos^3 t,$ $\alpha = a\cos^3 t + 3a\cos t \operatorname{sen}^2 t,$

$y = a\operatorname{sen}^3 t.$ $\beta = 3a\cos^2 t \operatorname{sen} t + a\operatorname{sen}^3 t.$

28. $x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t),$ $\alpha = a\cos t, \quad \beta = a\operatorname{sen} t.$

$y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t).$

29. $x = 4 - t^2, \quad y = 2t.$

30. $x = 2t, \quad y = 16 - t^2.$

31. $x = t^2, \quad y = \frac{1}{6}t^3.$

32. $x = 1 - \cos t, \quad y = t - \operatorname{sen} t.$

33. $x = \cos^4 t, \quad y = \operatorname{sen}^4 t.$

34. $x = a\sec t, \quad y = b\operatorname{tg} t.$

35. $x = \cos t, \quad y = t.$

36. $x = 6\operatorname{sen} t, \quad y = 3\cos t.$

37. $x = 3\csc t, \quad y = 4\operatorname{ctg} t.$

38. $x = a(t + \operatorname{sen} t),$

$y = a(1 - \cos t).$

39. $x = 2\cos t + \cos 2t,$

$y = 2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t.$

40. Demostrar que en la parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$ se tiene la relación $\alpha + \beta = 3(x + y).$

41. Dada la ecuación de la hipérbola equilátera $2\,xy = a^2$, demostrar que

$$\alpha + \beta = \frac{(y+x)^3}{a^2}, \quad \alpha - \beta = \frac{(y-x)^3}{a^2}.$$

Deducir de esto la ecuación de la evoluta

$$(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} - (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}}.$$

112. Transformación de derivadas. De las fórmulas que hemos demostrado independientemente, algunas pueden deducirse de otras según fórmulas que establecen relaciones entre derivadas. Aquí presentaremos dos casos.

Intercambio de las variables dependiente e independiente.

NOTACIÓN. Sea $y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2},$ etc.,

$$x' = \frac{dx}{dy}, \quad x'' = \frac{dx'}{dy} = \frac{d^2x}{dy^2}, \quad \text{etc.}$$

Según IX del Artículo 29,

$$(I) \qquad y' = \frac{1}{x'}.$$

Ahora bien, $\quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dy}}{x'}.$

Empleando (I), obtenemos

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{x''}{x'^2}.$$

$$(J) \qquad \therefore \quad y'' = -\frac{x''}{x'^3}.$$

Además, $\quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dy}}{x'}.$

Empleando (J), $\frac{dy''}{dy} = -\frac{x'\,x''' - 3\,x''^2}{x'^4}.$

$$(K) \qquad \therefore \quad y''' = -\frac{x'\,x''' - 3\,x''^2}{x'^5}.$$

Y así sucesivamente para las derivadas superiores. Por estas fórmulas las ecuaciones en y', y'', y''', etc., pueden transformarse en ecuaciones en x', x'', x''', etc.

EJEMPLO. Transformar (B) del Artículo 102 en la (C) del mismo artículo.

Solución. Empleando (I) y (J), se obtiene

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{-\dfrac{x''}{x'^3}}{\left(1+\dfrac{1}{x'^2}\right)^{3/2}} = -\frac{x''}{(x'^2+1)^{3/2}}.$$

Transformación de coordenadas rectangulares en polares.

Las relaciones entre las coordenadas rectangulares y polares de un punto son

(1) $$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Si la ecuación polar de una curva es $\rho = f(\theta)$, entonces las ecuaciones (1) son ecuaciones paramétricas para esa curva, siendo θ el parámetro.

NOTACIÓN. La variable independiente es θ, y x', x'', y', y'', ρ', ρ'' representan derivadas sucesivas de estas variables con respecto a θ.

Derivando (1),

(2) $$x' = -\rho \operatorname{sen}\theta + \rho' \cos\theta,$$
$$y' = \rho\cos\theta + \rho' \operatorname{sen}\theta;$$

(3) $$x'' = -2\rho' \operatorname{sen}\theta + (\rho'' - \rho)\cos\theta,$$
$$y'' = 2\rho'\cos\theta + (\rho'' - \rho)\operatorname{sen}\theta.$$

Mediante las fórmulas (1), (2) y (3), las ecuaciones en x, y, x', y', x'', y'' pueden transformarse en ecuaciones en ρ, θ, ρ', ρ''.

EJEMPLO. De la fórmula (D), del Artículo 103, deducir directamente la fórmula (E) del Artículo 104.

Solución. Tomando separadamente el numerador y el denominador en (D), sustituyendo según (2) y (3) y reduciendo, obtenemos los resultados

$$x'y'' - y'x'' = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'';$$
$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2.$$

Sustituyendo estos valores en (D), tenemos (E).

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 5, intercambiar las variables dependiente e independientes

1. $x\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = 0.$ *Sol.* $x\frac{d^2x}{dy^2} - y\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$

2. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (y-2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - (y-2)\frac{d^2x}{dy^2} = 0.$

3. $(y-4)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $\frac{d^2x}{dy^2} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + y - 4 = 0.$

4. $xy\frac{d^3y}{dx^3} + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^4.$

5. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4$

6. Transformar $\dfrac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ suponiendo $x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\,\text{sen}\,\theta.$

Sol. $\dfrac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}.$

7. Transformar la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x^2} = 0,$ suponiendo $x = \cos t.$

Sol. $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

8. Transformar la ecuación $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0,$ suponiendo $x = \frac{1}{t}.$ *Sol.* $\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Dada la curva $x = 3\cos t + \cos 3t,\ y = 3\,\text{sen}\,t - \text{sen}\,3t,$ hallar las ecuaciones paramétricas de la evoluta. Hallar también el centro de curvatura para $t = 0$, y demostrar que coincide con el punto correspondiente de la curva dada. *Sol.* $\alpha = 6\cos t - 2\cos 3t,\quad \beta = 6\,\text{sen}\,t + 2\,\text{sen}\,3t.$

2. Si R es el radio de curvatura en un punto cualquiera de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ y D es la distancia perpendicular del origen a la tangente trazada en ese punto, demostrar que $RD^3 = a^2b^2$.

3. Hallar las ecuaciones de la evoluta de la parábola $y^2 = 4x$, empleando x como parámetro. Hallar los puntos de la parábola para los cuales los centros de curvatura correspondientes son también puntos de la parábola. De aquí, calcular la longitud de la parte de evoluta interior a la parábola.

Sol. $(2, \pm 2\sqrt{2});\quad 4(\sqrt{27} - 1).$

4. *a*) En cada punto (x, y) de cierta curva, su pendiente es igual a $\frac{x(1+y)}{\sqrt{5-x^2}}$, y la curva pasa por el punto $(2, 0)$. Verificar que la ecuación de la curva es $\log(1+y) = 1 - \sqrt{5-x^2}$.

b) Hallar la curvatura de la curva en el punto dado, y trazar una pequeña porción de la curva cerca de él.

Sol. $K = \frac{9}{25}\sqrt{5}$.

c) Trazar el círculo de curvatura para este punto.

Sol. $\alpha = \frac{8}{9}, \quad \beta = \frac{5}{9}$.

5. La pendiente de la tangente a cierta curva C en un punto cualquiera P es $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a}$, en donde s es la longitud del arco HP (H es un punto fijo) y a una constante. El centro de curvatura de C correspondiente a P es P'. Si R representa el radio de curvatura de C correspondiente a P, y R' el radio de curvatura de la evoluta de C correspondiente a P', demostrar que

$$a) \quad R = \frac{s^2 + a^2}{a}; \quad b) \quad R' = \frac{2s(s^2 + a^2)}{a^2}.$$

CAPITULO XI

TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

113. Teorema de Rolle. Veamos ahora un teorema que es fundamental en el desarrollo teórico del Cálculo infinitesimal.

Sea $y = f(x)$ una función uniforme de x, continua en todo el intervalo $[a, b]$ (Art. 7) y que se anula en los extremos del intervalo, es decir, $f(a) = 0$, $f(b) = 0$. Supongamos también que $f(x)$ tiene una derivada $f'(x)$ en cada punto interior $(a < x < b)$ del intervalo. Entonces la función se representará gráficamente por una curva continua, tal como la de la figura 95. La intuición geométrica nos dice inmediatamente que *existe por lo menos un valor de* x, *comprendido entre* a *y* b, en el que la tangente es paralela al eje de las x (como en P); es decir, la pendiente en este punto es cero. Eso ilustra el

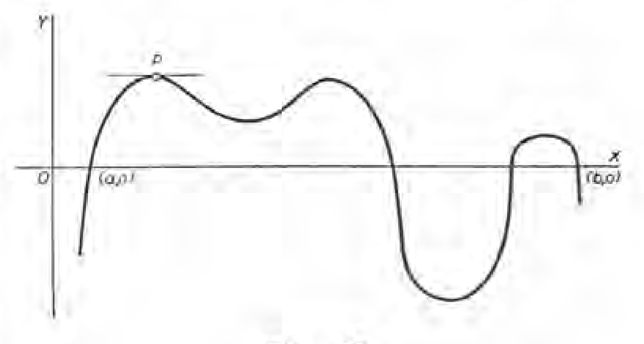


Fig. 95

Teorema de Rolle. *Si* f(x) *es continua en el intervalo* [a, b] *y se anula en sus extremos, y tiene una derivada* f'(x) *en todo punto interior del intervalo, entonces existe por lo menos un valor de* x, *comprendido entre* a *y* b, *en el que* f'(x) *es igual a cero*.

La demostración es sencilla. En efecto, $f(x)$ tiene que ser positiva o negativa en algunas partes del intervalo, salvo el caso de anularse en todos los puntos (pero en este caso el teorema es evidentemente cierto). Si suponemos que $f(x)$ es positiva en una parte del intervalo, entonces $f(x)$ tendrá un valor máximo en algún punto dentro

del intervalo. Igualmente, si $f(x)$ es negativa, tendrá un valor mínimo. Pero si $f(X)$ es máxima o mínima $(a < X < b)$, entonces $f'(X) = 0$. De otra manera, $f(x)$ aumentaría o disminuiría cuando x pasa por X (Art. 51).

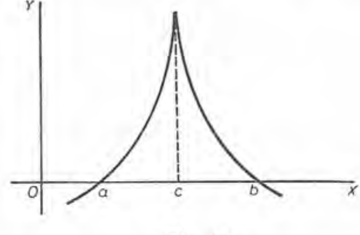


Fig. 96

La figura 96 ilustra un caso en el que el teorema de Rolle no se aplica. En la figura, $f(x)$ es continua en todo el intervalo $[a, b]$, pero $f'(x)$ no existe para $x = c$, sino que se vuelve infinita. En ningún punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de las x.

A continuación damos dos aplicaciones del teorema de Rolle a la Geometría.

114. Círculo osculador. Si trazamos un círculo que pase por tres puntos próximos, P_0, P_1, P_2, de una curva, y hacemos que P_1 y P_2 se acerquen a lo largo de la curva a P_0 como posición límite, entonces, en general, este círculo tenderá a la magnitud y posición de un círculo límite que se llama *el círculo osculador de la curva en el punto* P_0.

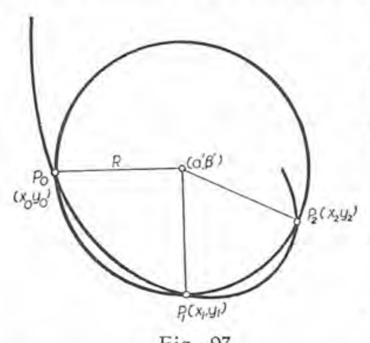


Fig. 97

Teorema. *El círculo osculador es idéntico al círculo de curvatura.*

Demostración. Sea la ecuación de la curva

$$(1) \qquad y = f(x);$$

y sean x_0, x_1, x_2 las abscisas respectivas de los puntos P_0, P_1, P_2, (α', β') las coordenadas del centro y R' el radio del círculo que pasa por los tres puntos. Entonces la ecuación del círculo es

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = R'^2,$$

y puesto que las coordenadas de los puntos P_0, P_1, P_2, deben satisfacer esta ecuación, tenemos

$$(2) \qquad \begin{cases} (x_0 - \alpha')^2 + (y_0 - \beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_1 - \alpha')^2 + (y_1 - \beta')^2 - R'^2 = 0, \\ (x_2 - \alpha')^2 + (y_2 - \beta')^2 - R'^2 = 0. \end{cases}$$

Consideremos ahora la *función de* x que se define por

$$F(x) = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - R'^2,$$

donde y está definida por (1).

De las ecuaciones (2) obtenemos

$$F(x_0) = 0, \quad F(x_1) = 0, \quad F(x_2) = 0.$$

Luego, según el teorema de Rolle (Art. 113), $F'(x)$ debe anularse para dos valores de x por lo menos, el uno entre x_0 y x_1, digamos x', y el otro entre x_1 y x_2, digamos x''; es decir,

$$F'(x') = 0, \quad F'(x'') = 0.$$

Igualmente, por la misma razón, $F''(x)$ debe anularse para algún valor de x entre x' y x'', digamos x_3; por tanto,

$$F''(x_3) = 0.$$

En consecuencia, los elementos α', β', R' del círculo que pasa por los puntos P_0, P_1, P_2 deben satisfacer las tres ecuaciones

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x') = 0, \quad F''(x_3) = 0.$$

Ahora bien, hagamos que los puntos P_1 y P_2 tiendan a P_0 como posición límite; entonces x_1, x_2, x', x'', x_3 tenderán todos a x_0 como límite, y los elementos α, β, R del círculo osculador se determinan por las tres ecuaciones

$$F(x_0) = 0, \quad F'(x_0) = 0, \quad F''(x_0) = 0;$$

o sea, omitiendo los sub-índices por

(3) $\qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$

(4) $\qquad (x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0$, derivando (3).

(5) $\qquad 1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0$, derivando (4).

Resolviendo (4) y (5) con respecto a $x - \alpha$ y $y - \beta$, obtenemos ($y'' \neq 0$)

(6) $$x - \alpha = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Resolviendo (6) con respecto a α y β, el resultado es idéntico a **(G)** del Artículo 108. Sustituyendo en (3) los valores de (6) y resolviendo con respecto a R, el resultado es **(F)** del Artículo 105. Luego el círculo osculador es idéntico al círculo de curvatura.

En el Artículo 28 definimos la tangente en P como la posición límite de una secante trazada por P y un punto vecino Q de la curva. Vemos ahora que el círculo de curvatura en P se puede definir como la posición límite de un círculo trazado por P y otros dos puntos Q y R de la curva.

115. Punto límite de la intersección de dos normales infinitamente próximas.

Teorema. *El centro de curvatura* C *correspondiente a un punto* P *de una curva es la posición límite de la intersección de la normal a la curva en* P *con una normal infinitamente próxima.*

Demostración. Sea la ecuación de una curva

(1) $$y = f(x).$$

Las ecuaciones de las normales a la curva en dos puntos próximos, P_0 y P_1 (fig. 98), son

$$(x_0 - x) + (y_0 - y)f'(x_0) = 0,$$
$$(x_1 - x) + (y_1 - y)f'(x_1) = 0.$$

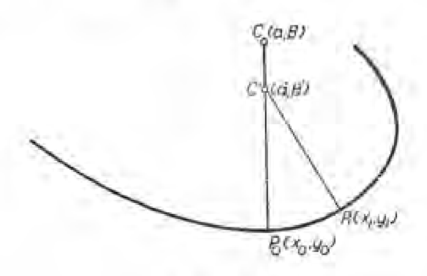


Fig. 98

Si las normales se cortan en C' (α', β'), las coordenadas de ese punto deben satisfacer ambas ecuaciones, de lo que tenemos

(2) $$\begin{cases} (x_0 - \alpha') + (y_0 - \beta')f'(x_0) = 0, \\ (x_1 - \alpha') + (y_1 - \beta')f'(x_1) = 0. \end{cases}$$

Consideremos ahora la *función de* x que se define por

$$\phi(x) = (x - \alpha') + (y - \beta')y',$$

donde y está definida por (1).

Entonces las ecuaciones (2) muestran que

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi(x_1) = 0.$$

Pero entonces, según el teorema de Rolle (Art. 113), $\phi'(x)$ debe anularse para algún valor de x entre x_0 y x_1, digamos x'. En consecuencia, α' y β' se determinan por las dos ecuaciones

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x') = 0.$$

Si P_1 se acerca ahora a P_0 como posición límite, entonces x' tiende a x_0 lo que da

$$\phi(x_0) = 0, \quad \phi'(x_0) = 0;$$

y $C'(\alpha', \beta')$ se acercará, como a posición límite, a un punto $C(\alpha, \beta)$ de la normal en P_0. Omitiendo los subíndices y los acentos, las últimas ecuaciones son

$$(x - \alpha) + (y - \beta)y' = 0,$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta)y'' = 0.$$

Resolviendo con respecto a α y β, los resultados son idénticos a **(G)** del Artículo 108, como se quería demostrar.

116. Teorema del valor medio. Para las aplicaciones subsecuentes necesitamos el siguiente

Teorema. *Si* f (x) *y* F (x), *y sus primeras derivadas, son continuas en todo el intervalo* [a, b], *y* F'(x) *no se anula dentro del intervalo, entonces, para algún valor* x = x₁ *comprendido entre* a *y* b, *es*

$$\textbf{(A)} \qquad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}. \qquad (a < x_1 < b)$$

Demostración. Consideremos la función

$$(1) \qquad \phi(x) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}[F(x) - F(a)] - [f(x) - f(a)].$$

Evidentemente, por ser $\phi(a) = \phi(b) = 0$, puede aplicarse el teorema de Rolle (Art. 113). Derivando,

$$(2) \qquad \phi'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x) - f'(x).$$

Esta expresión debe anularse para un valor $x = x_1$ entre a y b.

$$(3) \qquad \therefore \quad \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} F'(x_1) - f'(x_1) = 0.$$

Dividiendo por $F'(x_1)$ (teniendo en cuenta que $F'(x_1)$ no se anula), y transponiendo, el resultado es (A), como se quería demostrar.

Cuando $F(x) = x$, (A) se convierte en

$$(B) \qquad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_1). \qquad (a < x_1 < b)$$

En esta forma el teorema tiene una interpretación geométrica sencilla. En la figura 99, la curva es la gráfica de $f(x)$. Además,

$$OC = a, \quad CA = f(a),$$
$$OD = b, \quad DB = f(b).$$

Luego

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{pendiente de la cuerda } AB.$$

Ahora bien, en (B) $f'(x_1)$ es la pendiente de la curva en un punto del arco AB, y la fórmula (B) nos dice que la pendiente en ese punto es igual a la pendiente de AB Luego, en el arco AB, hay un punto, por lo menos, en el que la tangente es paralela a la cuerda AB.

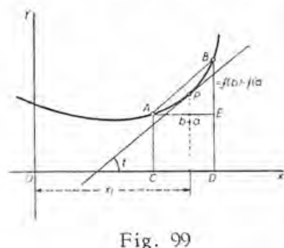


Fig. 99

El estudiante debe trazar curvas, como la primera curva del Artículo 113, que hagan ver que pueden haber en el intervalo más de uno de tales puntos, y también curvas que ilustren que el teorema puede no ser cierto si $f(x)$ llega a ser discontinua para algún valor de x entre a y b, o si $f'(x)$ llega a ser discontinua como en la figura 96.

Quitando denominadores en (B), podemos también escribir el teorema en la forma

$$(C) \qquad f(b) = f(a) + (b - a) f'(x_1).$$

Si ahora suponemos $b = a + \Delta a$; entonces $b - a = \Delta a$, y puesto que x_1 es un número entre a y b, podemos escribir:

$$x_1 = a + \theta \cdot \Delta a,$$

siendo θ una fracción propia positiva. Sustituyendo en (C) obtenemos, *otra forma del teorema del valor medio,*

$$(D) \qquad f(a + \Delta a) - f(a) = \Delta a f'(a + \theta \cdot \Delta a). \qquad (0 < \theta < 1)$$

PROBLEMAS

1. Comprobar el teorema de Rolle, hallando en cada uno de los siguientes casos los valores de x para los que $f(x)$ y $f'(x)$ se anulan.

a) $f(x) = x^3 - 3x$.

b) $f(x) = 6x^2 - x^3$.

c) $f(x) = a + bx + cx^2$.

d) $f(x) = \operatorname{sen} x$.

e) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x - \cos \pi x$.

f) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$.

g) $f(x) = x \ln x$.

h) $f(x) = xe^x$.

2. Si $f(x) = \operatorname{tg} x$, entonces $f(0) = 0$ y $f(\pi) = 0$. Según el teorema de Rolle ¿puede asegurarse que $f'(x)$ se anula para algún valor de x entre 0 y π? Razonar la respuesta.

3. Si $(y + 1)^3 = x^2$, entonces $y = 0$ cuando $x = -1$ y $y = 0$ cuando $x = +1$. Según el teorema de Rolle ¿puede asegurarse que y' se anula para algún valor de x entre -1 y $+1$? Razonar la respuesta.

4. En cada uno de los siguientes casos, hallar x_1 de manera que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_1).$$

a) $f(x) = x^2$, $a = 1$, $b = 2$. *Sol.* $x_1 = 1{,}5$.

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 4$. $x_1 = 2{,}25$.

c) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $b = 1$. $x_1 = \ln(e - 1) = 0{,}54$.

d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $a = 1$, $b = 2$.

e) $f(x) = \ln x$, $a = 0{,}5$, $b = 1{,}5$.

f) $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}$, $a = 0$, $b = 1$.

5. Si se dan $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = -1$, $b = 1$, ¿para qué valor de x_1 (si lo es para alguno) será $f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_1)$?

6. Si se dan $f(x) = x^{2/3}$, $a = -1$, $b = 1$, ¿para qué valor de x_1 (si lo es para alguno) será $f(b) = f(a) + (b - a)f'(x_1)$?

117. Formas indeterminadas. Cuando una función, para cierto valor de la variable independiente, toma una de las formas

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty,$$

se dice que es *indeterminada*. Para ese valor de la variable, la expresión analítica dada *no* define la función. Supongamos que, por ejemplo, tenemos

$$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$

y que para algún valor de la variable, como $x = a$, es

$$f(a) = 0, \quad F(a) = 0.$$

Para este valor de x, nuestra función *no* está definida; por tanto, podemos asignarle cualquier valor que queramos. De lo ya dicho (caso II del Art. 17) es evidente que lo más conveniente, si es posible, será asignar a la función un valor que complete a la función y la haga continua cuando $x = a$.

118. Determinación del valor de una función cuando ésta toma una forma indeterminada. Si la función $f(x)$ adquiere una forma indeterminada cuando $x = a$, entonces, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y es finito, completamos la función asignándole este valor para $x = a$. Así la función se hace continua para $x = a$ (Art. 17).

A veces el valor límite se encuentra después de transformaciones sencillas, como ocurre en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1. Dada $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, demostrar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Solución. $f(2)$ es indeterminada. Pero dividiendo el numerador por el denominador, $f(x) = x + 2$, y $\lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4$.

EJEMPLO 2. Dada $f(x) = \sec x - \operatorname{tg} x$, demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} f(x) = 0$.

Solución. $f(x)$ es indeterminada $(\infty - \infty)$. Transformémosla como sigue:

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x},$$

y el límite de esta última fracción, cuando $x \to \frac{\pi}{2}$, es cero.

Véase también el Artículo 18. Los métodos generales para determinar los valores de las formas indeterminadas del Artículo 117 se basan en el Cálculo infinitesimal.

119. Determinación del valor de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Si una función dada de la forma $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ es tal que $f(a) = 0$ y $F(a) = 0$, la función es indeterminada cuando $x = a$; entonces necesitamos hallar $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{F(x)}$.

Demostraremos la igualdad

$$(E) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Demostración. Según (*A*) del Artículo 116, haciendo $b = x$ y recordando que $f(a) = F(a) = 0$, tenemos

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(x_1)}{F'(x_1)}. \qquad (a < x_1 < x)$$

Si $x \to a$, asimismo $x_1 \to a$. Luego, si en (1) el segundo miembro tiende a un límite cuando $x_1 \to a$, el miembro de la izquierda tenderá al mismo límite. Así queda demostrada la igualdad (*E*).

De (*E*), si $f'(a)$ y $F'(a)$ no son cero ambos, tendremos

$$(2) \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Regla para determinar el valor de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. *Se halla la derivada del numerador para obtener un nuevo numerador; se halla la derivada del denominador para obtener un nuevo denominador. El valor de esa nueva fracción, para el valor asignado de la variable, será el valor límite de la primera fracción.*

Si acontece que las primeras derivadas también se anulan para $x = a$ (es decir, $f'(a) = 0$ y $F'(a) = 0$), entonces podemos aplicar (*E*) a la fracción $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, y según la regla tendremos

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Puede ser necesario repetir el procedimiento muchas veces.

El lector debe prevenirse contra el error muy frecuente que se comete cuando se tiene el descuido de hallar la derivada de toda la expresión, considerada como fracción, aplicando la fórmula VII (Art. 29).

Si $a = \infty$, la sustitución $x = \frac{1}{z}$ reduce el problema a la determinación del límite para $z = 0$.

$$\text{Así,} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{z \to 0} \frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-F'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \lim_{z \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{F'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Luego la regla también es cierta para este caso.

EJEMPLO 1. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} nx}{x}=n$.

Demostración. Sean $f(x)=\operatorname{sen} nx$, $F(x)=x$. Entonces

$$f(0)=0,\quad F(0)=0.$$

Luego, según (E),

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{n\cos nx}{1}=n,$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO 2. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{3}{2}$.

Demostración. Sean $f(x)=x^3-3x+2$, $F(x)=x^3-x^2-x+1$.

Entonces, $f(1)=0$, $F(1)=0$. Luego, según (E),

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}.$$

EJEMPLO 3. Demostrar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}=2$.

Demostración. Sean $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$, $F(x)=x-\operatorname{sen} x$.

Entonces $f(0)=0$, $F(0)=0$. Luego, según (E),

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}=\frac{0}{0}\ \text{(indeterminado)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{F'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

PROBLEMAS

Determinar por derivación el valor de cada una de las siguientes formas indeterminadas. *

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$. *Sol.* $\dfrac{8}{9}$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$. $\dfrac{1}{na^{n-1}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$. 1.

---

* Después de derivar, el estudiante debe en todos los casos reducir el resultado a la forma más sencilla posible antes de sustituir el valor de la variable.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x}$. *Sol.* 2.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - x}{x - \text{sen } x}$. 2.

6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \text{sen } x}{(\pi - 2x)^2}$. $-\frac{1}{8}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$. $\ln \dfrac{a}{b}$.

8. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\theta - \text{arc sen } \theta}{\text{sen}^3 \theta}$. $-\frac{1}{6}$.

9. $\lim\limits_{x \to \phi} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } \phi}{x - \phi}$. $\cos \phi$.

10. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y + \text{sen } y - 1}{\ln(1 + y)}$. 2.

11. $\lim\limits_{\phi \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 \phi - 2 \text{ tg } \phi}{1 + \cos 4\phi}$. $\frac{1}{2}$.

12. $\lim\limits_{r \to a} \dfrac{r^3 - ar^2 - a^2 r + a^3}{r^2 - a^2}$.

13. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x} - \sqrt{12 - x}}{2x - 3\sqrt{19 - 5x}}$.

14. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{16x - x^4} - 2\sqrt[3]{4x}}{2 - \sqrt[4]{2x^3}}$.

15. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\text{tg } \theta + \sec \theta - 1}{\text{tg } \theta - \sec \theta + 1}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } x}{x^3}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{\text{sen}^3 x}$.

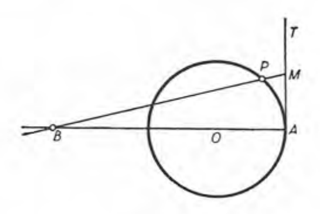


Fig. 100

18. Se da un círculo (fig. 100) de centro O y radio r, y una tangente AT. Si AM es igual al arco AP, y B es la intersección de la recta MP con la recta AO, hallar la posición límite de B cuando P tiende a A como posición límite.

Sol. $OB = 2r$.

120. Determinación del valor de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Para obtener el valor de $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{F(x)}$ cuando $f(x)$ y $F(x)$ se hacen ambas infinitas cuando $x \to a$, seguiremos la misma regla que se dió en el Artículo 119 para determinar el valor de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. A saber:

Regla para determinar el valor de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. *Se halla la derivada del numerador para obtener un nuevo numerador; se halla la derivada del denominador para obtener un nuevo denominador. El valor de esa nueva fracción para el valor asignado de la variable será el valor límite de la primera fracción.*

Una demostración rigurosa de esa regla queda fuera del propósito de este libro.

EJEMPLO. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\csc x} = 0$.

Demostración. Sean $f(x) = \ln x$, $F(x) = \csc x$. Entonces

$$f(0) = -\infty, \quad F(0) = \infty.$$

Luego, según la regla,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \frac{0}{0}.$$

Entonces, según (E),

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

121. Determinación del valor de la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Si una función $f(x) \cdot \phi(x)$ toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$ para $x = a$, escribimos la función dada en la forma

$$f(x) \cdot \phi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}} \left(\text{o bien} = \frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \right)$$

a fin de hacer que tome una de las formas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces se aplica la regla del Artículo 119 o la del Artículo 120.

Según esto, el producto $f(x) \cdot \phi(x)$ puede escribirse en una u otra de las dos formas que hemos dado. Por lo general, una forma es mejor que la otra; la elección depende del ejemplo.

EJEMPLO. Demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sec 3x \cos 5x) = -\frac{5}{3}$.

Demostración. Puesto que $\sec \frac{3}{2}\pi = \infty$, $\cos \frac{5}{2}\pi = 0$, escribimos

$$\sec 3x \cos 5x = \frac{1}{\cos 3x} \cdot \cos 5x = \frac{\cos 5x}{\cos 3x}.$$

Sean $f(x) = \cos 5x$, $F(x) = \cos 3x$. Entonces $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $F(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Luego, según (E),

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{-5 \operatorname{sen} 5x}{-3 \operatorname{sen} 3x} = -\frac{5}{3}.$$

122. Determinación del valor de la forma indeterminada $\infty - \infty$. En general, es posible transformar la expresión en una fracción que tomará la forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

EJEMPLO. Demostrar que $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} (\sec x - \operatorname{tg} x) = 0$.

Demostración. Tenemos $\sec \frac{1}{2}\pi - \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi = \infty - \infty$ (indeterminado). Según (2), del Artículo 2,

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Sean $f(x) = 1 - \operatorname{sen} x$, $F(x) = \cos x$. Entonces $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $F(\frac{1}{2}\pi) = 0$. Luego, según (E),

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0.$$

PROBLEMAS

Calcular el valor de cada una de las siguientes formas indeterminadas:

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^n}$. *Sol.* 0.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$. 2.
3. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3\theta}{\operatorname{tg} \theta}$. $\frac{1}{3}$.
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{e^x}$. 0.
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{\ln x}$. ∞.
6. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$. *Sol.* $-\infty$.
7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x}$. 1.
8. $\lim\limits_{x \to 0} x \ln \operatorname{sen} x$. 0.
9. $\lim\limits_{\phi \to 0} \frac{\pi}{\phi} \operatorname{tg} \frac{\pi\phi}{2}$. $\frac{1}{2}\pi^2$.
10. $\lim\limits_{x \to \infty} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$. a.

11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x.$ *Sol.* 2.

12. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg}\theta) \sec 2\theta.$ 1.

13. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x - 1}\right].$ $-\frac{1}{2}$.

14. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right].$ -1.

15. $\lim\limits_{\phi \to 0} \left[\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 \phi} \quad \dfrac{1}{1 - \cos\phi}\right].$ $\frac{1}{2}$.

16. $\lim\limits_{y \to 1} \left[\dfrac{y}{y - 1} - \dfrac{1}{\ln y}\right]$ $\frac{1}{2}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \quad \dfrac{1}{x^2}\right].$ $\frac{1}{3}$.

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \ln x}{x \ln x}.$

19. $\lim\limits_{\theta \to 0} \theta \csc 2\theta.$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 3x}.$

21. $\lim\limits_{\phi \to a} (a^2 - \phi^2) \operatorname{tg} \dfrac{\pi\phi}{2a}.$

22. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\sec 5\theta - \operatorname{tg}\theta).$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\pi}{4x} - \dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}\right].$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x \operatorname{tg} x}\right].$

25. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[x \operatorname{tg} x - \dfrac{\pi}{2} \sec x\right].$

26. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2} \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}.$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{\log(1 + x)} - \dfrac{1}{x}\right].$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x} - \dfrac{1}{x^3}\right].$

123. Determinación del valor de las formas indeterminadas 0^0, 1^∞, ∞^0. Si una función de la forma $f(x)^{\phi(x)}$ toma una de estas tres formas, debemos de tener, para cierto valor de x,

$$f(x) = 0, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{lo que da } 0^0;$$

o

$$f(x) = 1, \quad \phi(x) = \infty, \quad \text{lo que da } 1^\infty,$$

o

$$f(x) = \infty, \quad \phi(x) = 0, \quad \text{lo que da } \infty^0.$$

Sea

$$y = f(x)^{\phi(x)}.$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros,

$$\ln y = \phi(x) \ln f(x).$$

En cada uno de dichos casos, el logaritmo natural de la función y tomará la forma indeterminada

$$0 \cdot \infty.$$

Determinando el valor de esta expresión por el procedimiento del Artículo 121, tenemos el límite del logaritmo de la función. Este límite es igual al logaritmo del límite de la función; siendo así, se sabe el límite de la función. En efecto, si lím ln $y = a$, entonces lím $y = e^a$.

EJEMPLO 1. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

Demostración. La función toma la forma indeterminada 0^0 cuando $x = 0$.

Sea $$y = x^x;$$

entonces $$\ln y = x \ln x = 0 \cdot -\infty, \qquad \text{cuando } x = 0.$$

Según el Art. 121, $$\ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}, \qquad \text{cuando } x = 0.$$

Según el Art. 120, $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Luego, $$\lim_{x \to 0} \ln y = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} x^x = e^0 = 1.$$

EJEMPLO 2. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

Demostración. La función toma la forma indeterminada 1^∞ cuando $x = 1$.

Sea $$y = (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x};$$

ntonces $$\ln y = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \pi x \ln (2 - x) = \infty \cdot 0, \qquad \text{cuando } x = 1.$$

Según el Art. 121, $$\ln y = \frac{\ln (2 - x)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi x} = \frac{0}{0}, \qquad \text{cuando } x = 1.$$

Según el Art. 119, $$\lim_{x \to 1} \frac{\ln (2 - x)}{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi x} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{2 - x}}{-\frac{1}{2} \pi \csc^2 \frac{1}{2} \pi x} = \frac{2}{\pi}.$$

Luego, $$\lim_{x \to 1} \ln y = \frac{2}{\pi}, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1} y = \lim_{x \to 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi x} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

EJEMPLO 3. Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = 1$.

Demostración. La función toma la forma indeterminada ∞^0 cuando $x = 0$.

Sea $$y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x};$$

entonces $$\ln y = \operatorname{sen} x \ln \operatorname{ctg} x = 0 \cdot \infty, \qquad \text{cuando } x = 0.$$

Según el Art. 121, $$\ln y = \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\csc x} = \frac{\infty}{\infty}, \qquad \text{cuando } x = 0.$$

Según el Art. 120,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\csc x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\csc^2 x}{\operatorname{ctg} x}}{-\csc x \operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0.$$

Luego, $$\lim_{x \to 0} \ln y = 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

PROBLEMAS

Determinar el valor de cada una de las siguientes formas indeterminadas:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$. *Sol.* 1.

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x} + 1\right)^{x}$. e^2.

3. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. $\frac{1}{e}$.

4. $\lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \frac{a}{y}\right)^{y}$. e^a.

5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{ctg} x}$. e.

6. $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. e^2.

7. $\lim\limits_{t \to 0} (1 + nt)^{\frac{1}{t}}$. e^n.

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^2}$.

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \frac{2}{x}\right)^{x^3}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} (e^{2x} + 2x)^{\frac{1}{4x}}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)^{\operatorname{ctg} x}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\ln x}$.

124. Generalización del teorema del valor medio. Sea una constante R definida por la ecuación

$$(1) \quad f(b) - f(a) - (b - a) f'(a) - \tfrac{1}{2}(b - a)^2 R = 0.$$

Sea $F(x)$ una función que se forma reemplazando b por x en el primer miembro de (1); es decir,

$$(2) \quad F(x) = f(x) - f(a) - (x - a) f'(a) - \tfrac{1}{2}(x - a)^2 R.$$

Segun (1), $F(b) = 0$, y según (2), $F(a) = 0$. Luego, según el teorema de Rolle (Art. 113), un valor, por lo menos, de x entre a y b, digamos x_1, anulará $F'(x)$. Por tanto, puesto que

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - (x - a)R,$$

obtenemos
$$F'(x_1) = f'(x_1) - f'(a) - (x_1 - a) R = 0.$$

Puesto que $F'(x_1) = 0$ y $F'(a) = 0$, es evidente que también $F'(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle, de suerte que *su derivada*, a saber $F''(x)$, debe anularse para un valor, por lo menos, de x entre a y x_1, digamos x_2. Por tanto, x_2 también está entre a y b. Pero

$$F''(x) = f''(x) - R; \text{ luego } F''(x_2) = f''(x_2) - R = 0,$$

y
$$R = f''(x_2).$$

Sustituyendo este resultado en (1), obtenemos

$$(F) \quad f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{1}{\underline{|2}}(b-a)^2 f''(x_2). \qquad (a < x_2 < b)$$

Continuando este procedimiento, obtenemos el resultado general

$$(G) \quad f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{\underline{|1}} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{\underline{|2}} f''(a)$$
$$+ \frac{(b-a)^3}{\underline{|3}} f'''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{(n-1)}(a)$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{\underline{|n}} f^{(n)}(x_1). \qquad (a < x_1 < b)$$

La ecuación (G) expresa el llamado *teorema generalizado del valor medio*.

125. Los máximos y mínimos, tratados analíticamente. Sirviéndonos de lo dicho en los Artículos 116 y 124, podemos ahora dar una discusión general de *los máximos y mínimos de las funciones de una sola variable independiente*.

Sea una función $f(x)$. Sea h un número positivo, tan pequeño como queramos; entonces las definiciones que hemos dado en el Artículo 46 pueden enunciarse como sigue.

Si para cada valor de x, exceptuado a, en el intervalo $[a-h, a+h]$, se tiene

(1) $\qquad f(x) - f(a) =$ un número negativo,

se dice que $f(x)$ tiene un *máximo para* x = a.

Si, al contrario,

(2) $\qquad f(x) - f(a) =$ un número positivo,

entonces se dice que $f(x)$ tiene un *mínimo para* x = a.

Empezaremos dando una demostración analítica del criterio del Artículo 45:

Una función es creciente cuando su derivada es positiva; es decreciente cuando su derivada es negativa.

En efecto, sea $y = f(x)$. Cuando Δx es numéricamente pequeño, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la derivada $f'(x)$ tendrá el mismo signo (Art. 24). Sea $f'(x) > 0$. Entonces, cuando Δx es positivo, Δy lo es también, y cuando Δx es negativo, Δy es negativo. Por tanto, $f(x)$ es creciente.

Una demostración semejante es aplicable cuando la derivada es negativa. Ahora fácilmente se deduce la siguiente proposición:

Si f (a) *es un valor máximo o mínimo de* f (x), *y si* f'(x) *existe en toda la vecindad de* a, *entonces* f'(a) = 0.

En efecto, si $f'(a) \neq 0$, $f(x)$ aumentaría o disminuiría al aumentar x a través de a. Pero si es así, $f(a)$ no es ni valor máximo ni mínimo.

Veamos ahora las condiciones suficientes generales para máximos y mínimos. Consideremos los siguientes casos.

I. Sean $f'(a) = 0$ y $f''(a) \neq 0$.

De la fórmula **(*F*)** del Artículo 124, reemplazando b por x y trasponiendo $f(a)$, resulta

$$(3) \qquad f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} f''(x_2). \qquad (a < x_2 < x)$$

Puesto que $f''(a) \neq 0$, y que $f''(x)$ se supone continua, podemos elegir nuestro intervalo $[a - h, a + h]$ tan pequeño que $f''(x)$ tenga el mismo signo que $f''(a)$. Además, $(x - a)^2$ no cambia de signo. Por consiguiente, el segundo miembro de (3) no cambiará de signo, y la diferencia $f(x) - f(a)$ tendrá el mismo signo para todos los valores de x en el intervalo $[a - h, a + h]$; además, *ese signo será el mismo que el signo de* f''(a). Luego se sigue de nuestras definiciones (1) y (2) que

(4) f (a) *es un máximo si* f'(a) = 0 *y* f''(a) = *un número negativo;*

(5) f (a) *es un mínimo si* f'(a) = 0 *y* f''(a) = *un número positivo.*

Estas condiciones son las mismas que las del Artículo 56.

II. Sean $f'(a) = f''(a) = 0$, y $f'''(a) \neq 0$.

De la fórmula **(*G*)** del Artículo 124, haciendo $n = 3$, reemplazando b por x y trasponiendo $f(a)$,

$$(6) \qquad f(x) - f(a) = \frac{1}{\underline{|3}} (x - a)^3 f'''(x_3). \qquad (a < x_3 < x)$$

Como antes, $f'''(x)$ tendrá el mismo signo que $f'''(a)$. Pero $(x - a)^3$ cambia de signo cuando x aumenta a través de a. Luego la diferencia $f(x) - f(a)$ debe cambiar de signo, y $f(a)$ no es ni máximo ni mínimo.

III. Sean $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Continuando el procedimiento seguido en I y II, se ve que si la primera derivada de $f(x)$ que no se anula para $x = a$ es *de orden par* (es decir, n es par), entonces

(H) $f(a)$ es un máximo si $f^{(n)}(a)$ = un número negativo;

(I) $f(a)$ es un mínimo si $f^{(n)}(a)$ = un número positivo. *

Si de las derivadas de $f(x)$ la primera que no se anula para $x = a$ es *de orden impar*, entonces **$f(a)$ no será ni máximo ni mínimo.**

EJEMPLO 1. Calcular los máximos y mínimos de la función

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$$

Solución. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24.$$

Resolviendo la ecuación $3x^2 - 18x + 24 = 0$ obtenemos los valores críticos $x = 2$ y $x = 4$.

$$\therefore \quad f'(2) = 0 \text{ y } f'(4) = 0.$$

Derivando otra vez, $f''(x) = 6x - 18$.

Puesto que $f''(2) = -6$, resulta, según (H), que $f(2) = 13$ es un máximo.
Puesto que $f''(4) = +6$, resulta, según (I), que $f(4) = 9$ es un mínimo.

EJEMPLO 2. Calcular los máximos y mínimos de la función

$$e^x + 2\cos x + e^{-x}$$

Solución.

$$f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}.$$
$$f'(x) = e^x - 2\,\text{sen}\,x - e^{-x} = 0, \text{ para } x = 0.\;^{**}$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x} = 0, \text{ para } x = 0.$$
$$f'''(x) = e^x + 2\,\text{sen}\,x - e^{-x} = 0, \text{ para } x = 0.$$
$$f^{\text{iv}}(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x} = 4, \text{ para } x = 0.$$

Luego, según (I), $f(0) = 4$ es un mínimo.

PROBLEMAS

Calcular los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones, empleando el método del Artículo 125.

1. $x^4 - 4x^3 + 5$. *Sol.* Para el valor crítico $x = 0$, la función no tiene ni máximo ni mínimo.
Mín. $= -22$ para $x = 3$.

---

* Como en el Artículo 46, un valor crítico $x = a$ se determina igualando a cero la primera derivada y resolviendo la ecuación resultante para obtener sus raíces reales.

** $x = 0$ es la única raíz de la ecuación $e^x - 2\,\text{sen}\,x - e^{-x} = 0$.

2. $x^3 + 3x^2 + 3x$. *Sol.* Para el valor crítico $x = -1$, la función no tiene ni máximo ni mínimo.

3. $x^3(x-2)^2$. Para el valor crítico $x = 0$, la función no tiene ni máximo ni mínimo.

Máx. $= 1{,}11$ para $x = \frac{6}{5}$.

Mín. $= 0$, para $x = 2$.

4. $x(x-1)^2(x+1)^3$.

5. Estudiar $4x^5 - 15x^4 + 20x^3 - 10x^2$, para $x = 1$.

6. Demostrar que si la primera derivada de $f(x)$ no se anula para $x = a$ es de orden impar (es decir, n es impar), entonces $f(x)$ es una función creciente o decreciente cuando $x = a$, según que $f^{(n)}(a)$ sea positivo o negativo.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Si $y = e^x + e^{-x}$, hallar dx en función de y y dy.

Sol. $dx = \dfrac{\pm\, dy}{\sqrt{y^2 - 4}}$.

2. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\ln(3x + 2 + \sqrt{9x^2 + 12x}) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 12x}}.$$

3. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{4}(x^2+1)^{3/2} - \frac{x}{8}\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right] = x^2\sqrt{x^2+1}.$$

4. Demostrar que la curva $x = t^3 + 2t^2$, $y = 3t^2 + 4t$ no tiene ningún punto de inflexión.

5. Demostrar que los puntos de intersección de las curvas $2y = x \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son puntos de inflexión de la primera curva. Bosquejar ambas curvas, referidas a los mismos ejes.

6. Dado el movimiento harmónico amortiguado $s = ae^{-bt} \operatorname{sen} ct$ (en donde a, b y c son constantes positivas), demostrar que los valores sucesivos de t correspondientes a $v = 0$ forman una progresión aritmética, y que los valores correspondientes de s forman una progresión geométrica decreciente.

7. La abscisa de un punto P que se mueve sobre la parábola $y = ax^2$ aumenta a razón de una unidad por segundo. Sean O el origen y T la intersección del eje de las x con la tangente en P a la parábola. Demostrar que la longitud del arco OP aumenta, en valor absoluto, a razón de $\dfrac{TP}{OT}$ por segundo.

8. Sea MP la ordenada en un punto cualquiera de la catenaria (fig. 261) y tracemos la recta MA perpendicular a la tangente en P. Demostrar que la longitud de MA es constante e igual a a.

9. La curva $x^2y + 12\ y = 144$ tiene un máximo y dos puntos de inflexión. Hallar el área del triángulo formado por las tangentes a la curva en esos tres puntos. *Sol.* 1.

10. Se dan $\ln 6 = 1{,}792$ y $\ln 7 = 1{,}946$. Calcular $\ln 6{,}15$, primero por interpolación y después por diferenciales. Demostrar, gráficamente, que el verdadero valor está entre las dos aproximaciones.

11. Dada la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, hallar la longitud de la tangente más corta que se intercepta entre los ejes coordenados. *Sol.* $a + b$.

12. Las curvas $y^2 = x$ y $y^2 = x^3$ limitan una superficie en el primer cuadrante. Se traza, dentro de la superficie, un rectángulo con sus lados paralelos a los ejes. La dimensión horizontal del rectángulo es $\frac{1}{3}$. Una de las diagonales tiene sus extremos uno en cada curva. Hallar el área del rectángulo de área máxima que así se puede construir. *Sol.* 0,019.

13. Se trazan rectángulos con un lado en el eje de las x, otro lado en la recta $x = \frac{1}{2}$, y un vértice en la curva $y = e^{-x^2}$. Hallar el área del mayor rectángulo. *Sol.* $e^{-0{,}25} = 0{,}7788$.

14. Hallar los máximos y mínimos de y, si

$$y = ae^{\frac{x}{a}} - 3\ x - 2\ ae^{-\frac{x}{a}}.$$

Sol. Máx. $= -a$; mín. $= a(1 - 3 \log 2)$.

15. Si $x^2 + 3\ xy + 2\ y^2 - 5\ x - 6\ y + 5 = 0$, hallar los máximos y mínimos de y. *Sol.* Máx. $= 1$; mín. $= 5$.

CALCULO INTEGRAL

CAPITULO XII

INTEGRACION DE FORMAS ELEMENTALES ORDINARIAS

126. Integración. El lector está ya acostumbrado a las operaciones mutuamente inversas de adición y sustracción, multiplicación y división, elevar a una potencia y extraer una raíz. En los ejemplos que siguen, los segundos miembros de una columna son, respectivamente, las funciones inversas de los segundos miembros de la otra columna.

$$y = x^2 + 1, \qquad x = \pm\sqrt{y-1};$$
$$y = a^x, \qquad x = \log_a y;$$
$$y = \operatorname{sen} x, \qquad x = \operatorname{arc\,sen} y.$$

En el Cálculo diferencial hemos aprendido a calcular la derivada $f'(x)$ de una función dada $f(x)$, operación que se indica por

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$$

o bien, si empleamos diferenciales, por

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Los problemas del Cálculo integral dependen de la *operación inversa*, a saber:

Hallar una función f (x) *cuya derivada*

(1) $$f'(x) = \phi(x)$$

es conocida.

O bien, puesto que en el Cálculo integral es usual emplear diferenciales, podemos escribir

(2) $$df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx$$

y enunciar el problema del Cálculo integral como sigue:

Dada la diferencial de una función, hallar la función.

La función $f(x)$ que así se obtiene se llama una *integral* de la expresión diferencial dada; el procedimiento de hallarla se llama *integración;* la operación se indica escribiendo el *signo integral* * $\int$ delante de la expresión diferencial dada; así,

$$\int f'(x)dx = f(x), \tag{3}$$

que se lee *la integral de* f'(x)dx *es igual a* f(x). En general, el signo $\int$ se lee *integral* o *integral de*. La diferencial dx indica que x es *la variable de integración*. Por ejemplo,

a) Si $f(x) = x^3$, entonces $f'(x)dx = 3\,x^2\,dx$, y

$$\int 3\,x^2\,dx = x^3.$$

b) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x)dx = \cos x\,dx$, y

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x.$$

c) Si $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$, entonces $f'(x)dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$, y

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Debe hacerse hincapié en el hecho de que, según las explicaciones anteriores:

La diferenciación y la integración son operaciones inversas.

Diferenciando (3), tenemos

$$d\int f'(x)\,dx = f'(x)dx. \tag{4}$$

Sustituyendo en (3) el valor de $f'(x)dx\,[= df(x)]$ según (2), obtenemos

$$\int df(x) = f(x). \tag{5}$$

* Históricamente, ese signo es una *S* deformada, letra inicial de la palabra *suma*. (Véase el Artículo 155.)

Por tanto, si $\frac{d}{dx}$ e $\int \ldots dx$ se consideran como símbolos de operación, son *inversos el uno del otro*. O si empleamos diferenciales, d e $\int$ son inversos el uno del otro.

Cuando d antecede a $\int$, como en (4), ambos signos se anulan mutuamente; pero cuando $\int$ antecede a d, como en (5), eso, en general, no será cierto. La razón la veremos en el artículo siguiente, al dar la definición de la constante de integración.

127. Constante de integración. Integral indefinida. Del artículo anterior se sigue que

por ser $\quad d(x^3) = 3\,x^2\,dx$, tenemos $\int 3\,x^2\,dx = x^3$;

por ser $d(x^3 + 2) = 3\,x^2\,dx$, tenemos $\int 3\,x^2\,dx = x^3 + 2$;

como $\quad d(x^3 - 7) = 3\,x^2\,dx$, tenemos $\int 3\,x^2\,dx = x^3 - 7$

En general, como

$$d(x^3 + C) = 3\,x^2\,dx,$$

siendo C una constante cualquiera, tenemos

$$\int 3\,x^2\,dx = x^3 + C.$$

La constante arbitraria C se llama *constante de integración* y es una cantidad independiente de la *variable de integración*. Puesto que podemos dar a C cuantos valores queramos, se sigue que si una expresión diferencial dada tiene una integral, tiene también una infinidad de integrales que difieren sólo en constantes. Por tanto,

$$\int f'(x)dx = f(x) + C;$$

y puesto que C es desconocida e *indefinida*, la expresión

$$f(x) + C$$

se llama la *integral indefinida de* f'(x)dx.

Es evidente que si $\phi(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, entonces $\phi(x) + C$, siendo C una constante cualquiera, es igualmente una función cuya derivada es $f(x)$. De aquí se deduce:

Teorema. *Si dos funciones difieren en una constante, tienen la misma derivada.*

Sin embargo, no es obvio que si $\phi(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, *todas* las funciones que tengan la misma derivada $f(x)$ sean de la forma $\phi(x) + C$, siendo C una constante. En otros términos, tenemos que demostrar:

Teorema recíproco. *Si dos funciones tienen una misma derivada, su diferencia es una constante.*

Demostración. Sean $\phi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones que tengan la misma derivada $f(x)$. Sea

$$F(x) = \phi(x) - \psi(x)\text{; entonces, por hipótesis,}$$

$$(1) \qquad F'(x) = \frac{d}{dx}[\phi(x) - \psi(x)] = f(x) - f(x) = 0.$$

Pero según la fórmula (*D*) del teorema del valor medio (Art. 116), tenemos:

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x\, F'(x + \theta \cdot \Delta x). \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$\therefore \quad F(x + \Delta x) - F(x) = 0$$

[Puesto que según (1) la derivada de $F(x)$ es cero para todo valor de x.]

y $$F(x + \Delta x) = F(x).$$

Esto significa que la función $F(x) = \phi(x) - \psi(x)$ no cambia de valor al dar a x el incremento Δx; es decir, $\phi(x)$ y $\psi(x)$ difieren sólo en una constante.

El valor de C puede determinarse en el caso en que se conozca el valor de la integral para algún valor de la variable, y de eso veremos muchos ejemplos en el capítulo siguiente. Por ahora nos contentaremos con aprender a hallar las integrales indefinidas de expresiones diferenciales dadas. En lo que sigue daremos por sentado que *toda función continua tiene una integral indefinida*, proposición cuya demostración rigurosa queda fuera del propósito de este libro. Sin embargo, para todas las funciones elementales, la exactitud de la proposición aparecerá clara en los capítulos que siguen.

En todos los casos de integración indefinida, el criterio que debe aplicarse al verificar los resultados es que *la diferencial de la integral ha de ser igual a la expresión diferencial dada*.

128. Reglas para integrar las formas elementales ordinarias. El Cálculo diferencial nos ha proporcionado una regla general para obtener la derivada y la diferencial (Arts. 27 y 94). El Cálculo integral no da

una regla general correspondiente, que pueda aplicarse fácilmente en la práctica para la operación inversa de la integración.* Cada caso necesita un trato especial, y se llega a la integral de una expresión diferencial dada por medio de nuestro conocimiento de los resultados de la diferenciación. Es decir: resolvemos el problema contestando a la pregunta, *¿qué función, diferenciada, producirá la expresión diferencial dada?*

La integración es, pues, un procedimiento esencialmente de ensayos. Para facilitar el trabajo, se forman tablas de integrales conocidas, que se llaman tablas de *integrales inmediatas*. Para efectuar una integración cualquiera, comparamos la expresión diferencial dada con las tablas. Si se encuentra registrada en ellas, se sabe la integral. Si no está registrada, miraremos, por varios métodos, de reducirla a una de las formas registradas. Como muchos de los métodos se sirven de artificios que sólo la práctica puede sugerir, una gran parte de nuestro texto se consagrará a la explicación de métodos para integrar las funciones que se encuentran frecuentemente en la resolución de problemas prácticos.

De todo resultado de diferenciación puede deducirse siempre una fórmula para integración.

Las dos reglas siguientes son útiles para la reducción de expresiones diferenciales a integrales inmediatas.

a) *La integral de una suma algebraica de expresiones diferenciales es igual a la misma suma algebraica de las integrales de esas expresiones.*

Demostración. Diferenciando la expresión

$$\int du + \int dv - \int dw,$$

siendo u, v, w funciones de una sola variable, obtenemos

$$du + dv - dw. \qquad \text{Según III, Art. 04}$$

$$(1) \qquad \therefore \int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

b) *Un factor constante puede escribirse o delante del signo integral o después de él.*

---

* Aun cuando se sabe que la integral de una expresión diferencial dada existe, puede ser imposible obtenerla en términos de funciones conocidas.

Demostración. Diferenciando la expresión

$$a \int dv$$

obtenemos $a\,dv$. Según IV, Art. 94

(2) $$\therefore \quad \int a\,dv = a \int dv.$$

A causa de la importancia de estas dos reglas, las escribiremos como fórmulas al principio de la lista siguiente de "integrales inmediatas" o "formas elementales ordinarias".

INTEGRALES INMEDIATAS

(1) $$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw.$$

(2) $$\int a dv = a \int dv.$$

(3) $$\int dx = x + C.$$

(4) $$\int v^n dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C. \qquad (n \neq -1)$$

(5) $$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C.$$

$$= \ln v + \ln c = \ln cv.$$

[Haciendo $C = \ln c$.]

(6) $$\int a^v\, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C.$$

(7) $$\int e^v\, dv = e^v + C.$$

(8) $$\int \operatorname{sen} v\, dv = -\cos v + C.$$

(9) $$\int \cos v\, dv = \operatorname{sen} v + C.$$

(10) $$\int \sec^2 v\, dv = \operatorname{tg} v + C.$$

(11) $$\int \csc^2 v\, dv = -\operatorname{ctg} v + C.$$

(12) $$\int \sec v \operatorname{tg} v\, dv = \sec v + C.$$

(13) $$\int \csc v \operatorname{ctg} v\, dv = -\csc v + C.$$

(14) $$\int \operatorname{tg} v\, dv = -\ln \cos v + C = \ln \sec v + C.$$

(15) $$\int \operatorname{ctg} v\, dv = \ln \operatorname{sen} v + C.$$

(16) $$\int \sec v\, dv = \ln (\sec v + \operatorname{tg} v) + C.$$

(17) $$\int \csc v\, dv = \ln (\csc v - \operatorname{ctg} v) + C.$$

(18) $$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C.$$

(19) $$\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{v - a}{v + a} + C. \qquad (v^2 > a^2)$$

(19 a) $$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + v}{a - v} + C. \qquad (v^2 < a^2)$$

(20) $$\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a} + C.$$

(21) $$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C.$$

(22) $$\int \sqrt{a^2 - v^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{a^2 - v^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{v}{a} + C.$$

(23) $$\int \sqrt{v^2 \pm a^2}\, dv = \frac{v}{2} \sqrt{v^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C.$$

129. Demostración de las fórmulas (3), (4) y (5). Se demuestran fácilmente.

Demostración de (3). Puesto que

$$d(x + C) = dx, \qquad \text{II, Art. 94}$$

obtenemos

$$\int dx = x + C.$$

Demostración de (4). Puesto que

$$d\left(\frac{v^{n+1}}{n+1}+C\right)=v^n\,dv, \qquad \text{VI, Art. 94}$$

obtenemos
$$\int v^n\,dv=\frac{v^{n+1}}{n+1}+C.$$

Esto es cierto para todo valor de n, con excepción de $n=-1$. En efecto, cuando $n=-1$, (4) implica división por cero. El caso de $n=-1$ corresponde a la fórmula (5).

Demostración de (5). Puesto que

$$d(\ln v+C)=\frac{dv}{v}, \qquad \text{X, Art. 94}$$

obtenemos
$$\int\frac{dv}{v}=\ln v+C$$

Este resultado puede expresarse en forma más abreviada si representamos la constante de integración por $\log_e c$. Así,

$$\int\frac{dv}{v}=\ln v+\ln c=\ln cv.$$

La fórmula (5) dice: *si la expresión que se encuentra bajo el signo integral es una fracción cuyo numerador es la diferencial del denominador, entonces la integral es el logaritmo natural del denominador.*

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS *

Comprobar las siguientes integraciones:

1. $\int x^6\,dx=\frac{x^{6+1}}{6+1}+C=\frac{x^7}{7}+C$, segun (4), siendo $v=x$ y $n=6$.

2. $\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$, por (4), siendo $v=x$ y $n=\frac{1}{2}$.

3. $\int\frac{dx}{x^3}=\int x^{-3}\,dx=\frac{x^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$ según (4), siendo $v=x$ y $n=-3$.

4. $\int ax^5\,dx=a\int x^5\,dx=\frac{ax^6}{6}+C$. Según (2) y (4)

* Mientras el estudiante aprende a integrar, debe recibir lección oral de integración de formas sencillas.

5. $\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4)\,dx$

$$= \int 2x^3\,dx - \int 5x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 4\,dx \qquad \text{según (1)}$$

$$= 2\int x^3\,dx - 5\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 4\int dx \qquad \text{según (2)}$$

$$= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + C.$$

NOTA. Aunque cada integración requiere una constante arbitraria, escribimos sólo una constante que representa la suma algebraica de ellas.

6. $\int \left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3c\sqrt[3]{x^2} \right) dx$

$$= \int 2ax^{-\frac{1}{2}}\,dx - \int bx^{-2}\,dx + \int 3cx^{\frac{2}{3}}\,dx \qquad \text{según (1)}$$

$$= 2a\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx - b\int x^{-2}\,dx + 3c\int x^{\frac{2}{3}}\,dx \qquad \text{según (2)}$$

$$= 2a\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 3c\cdot\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C \qquad \text{según (4)}$$

$$= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}} + C.$$

7. $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3\,dx = a^2x + \frac{9}{7}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{9}{5}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} + C.$

SUGESTION. En primer lugar, desarrollar el cubo del binomio.

8. $\int (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx = \frac{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C.$

Solución. Esta integral puede reducirse a la forma (4). En efecto, se puede introducir el factor $2b^2$ *después* del signo integral, delante de $x\,dx$, y su recíproco *delante* del signo integral. Estas operaciones se compensan mutuamente según (2).

(Compárese con (4), $v = a^2 + b^2x^2$, $n = \frac{1}{2}$, $dv = 2b^2x\,dx$.)

$$\int (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int (a^2 + b^2x^2)^{\frac{1}{2}}(2b^2x\,dx)\left[= \frac{1}{2b^2}\int v^{\frac{1}{2}}\,dv = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C, \text{ según (4)} \right]$$

$$= \frac{(a^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{3b^2} + C.$$

NOTA. Se previene al estudiante que no debe trasladar una función de la variable de un lado a otro del signo integral, puesto que eso alteraría el valor de la integral.

9. $\int \frac{3\,ax\,dx}{b^2 + c^2x^2} = \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln\,(b^2 + c^2x^2) + C.$

Solución. $\int \frac{3\,ax\,dx}{b^2 + c^2x^2} = 3\,a \int \frac{x\,dx}{b^2 + c^2x^2}.$ Según (2)

Esta integral se parece a (5). Si introducimos el factor $2\,c^2$ después del signo integral y su recíproco delante de él, no se alterará el valor de la expresión. (Compárese con (5). $v = b^2 + c^2x^2$, $dv = 2\,c^2x\,dx$.)

Luego, $3\,a \int \frac{x\,dx}{b^2 + c^2x^2}$

$$= \frac{3\,a}{2\,c^2} \int \frac{2\,c^2x\,dx}{b^2 + c^2x^2} \left[= \frac{3\,a}{2\,c^2} \int \frac{dv}{v} = \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln v + C, \text{ según } (5) \right]$$

$$= \frac{3\,a}{2\,c^2} \ln\,(b^2 + c^2x^2) + C.$$

10. $\int \frac{x^3\,dx}{x + 1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln\,(x + 1) + C.$

Solución. En primer lugar, dividiendo el numerador por el denominador, resulta:

$$\frac{x^3}{x + 1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x + 1}.$$

Sustituyendo en la integral, empleando (1) e integrando, obtenemos la solución.

11. $\int \frac{2\,x - 1}{2\,x + 3}\,dx = x - \ln\,(2\,x + 3)^2 + C.$

Solución. Dividiendo, $\frac{2\,x - 1}{2\,x + 3} = 1 - \frac{4}{2\,x + 3}$. Sustituir y emplear (1) etcétera.

La función por integrar se llama el *integrando*. Así, en el ejemplo 1, el integrando es x^6.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$

3. $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3\,x^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3\,x^{\frac{2}{3}}}{2} + C.$

6. $\int 3\,ay^2\,dy = ay^3 + C.$

7. $\int \frac{2\,dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} + C.$

8. $\int \sqrt{ax}\,dx = \frac{2x\sqrt{ax}}{3} + C.$

10. $\int \sqrt[3]{3t}\,dt = \frac{(3t)^{4/3}}{4} + C.$

11. $\int (x^{3/2} - 2x^{2/3} + 5\sqrt{x} - 3)\,dx = \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{6x^{5/3}}{5} + \frac{10x^{3/2}}{3} - 3x + C.$

12. $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx = 2x^2 - 4\sqrt{x} + C.$

13. $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + C.$

14. $\int \sqrt{x}(3x - 2)\,dx = \frac{6x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + C.$

15. $\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} - 6x + 5\ln x + C.$

16. $\int \sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2(a + bx)^{3/2}}{3b} + C.$

17. $\int \frac{dy}{\sqrt{a - by}} = -\frac{2\sqrt{a - by}}{b} + C.$

18. $\int (a + bt)^2\,dt = \frac{(a + bt)^3}{3b} + C.$

19. $\int x(2 + x^2)^2\,dx = \frac{(2 + x^2)^3}{6} + C.$

20. $\int y(a - by^2)\,dy = -\frac{(a - by^2)^2}{4b} + C.$

21. $\int t\sqrt{2t^2 + 3}\,dt = \frac{(2t^2 + 3)^{3/2}}{6} + C.$

22. $\int x(2x + 1)^2\,dx = x^4 + \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

23. $\int \frac{4x^2\,dx}{\sqrt{x^3 + 8}} = \frac{8\sqrt{x^3 + 8}}{3} + C.$

24. $\int \frac{6z\,dz}{(5 - 3z^2)^2} = \frac{1}{5 - 3z^2} + C.$

25. $\int (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + C.$

26. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx}{\sqrt{x}} = -\frac{2(\sqrt{a} - \sqrt{x})^3}{3} + C.$

27. $\int \sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = \frac{2ax^{3/2}}{3} - x^2\sqrt{a} + \frac{2x^{5/2}}{5} + C.$

28. $\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{a^4 + t^4}} = \frac{\sqrt{a^4 + t^4}}{2} + C.$

29. $\int \frac{dy}{(a + by)^3} = -\frac{1}{2b(a + by)^2} + C.$

30. $\int \frac{x\,dx}{(a + bx^2)^3} = -\frac{1}{4b(a + bx^2)^2} + C.$

31. $\int \frac{t^2\,dt}{(a + bt^3)^2} = -\frac{1}{3b(a + bt^3)} + C.$

32. $\int z(a + bz^3)^2\,dz = \frac{a^2z^2}{2} + \frac{2\,abz^5}{5} + \frac{b^2z^8}{8} + C.$

33. $\int x^{n-1}\sqrt{a + bx^n}\,dx = \frac{2(a + bx^n)^{3/2}}{3\,nb} + C.$

34. $\int \frac{(2x + 3)\,dx}{\sqrt{x^2 + 3x}} = 2\sqrt{x^2 + 3x} + C.$

35. $\int \frac{(x^2 + 1)\,dx}{\sqrt{x^3 + 3x}} = \frac{2\sqrt{x^3 + 3x}}{3} + C.$

36. $\int \frac{(2 + \ln x)\,dx}{x} = \frac{(2 + \ln x)^2}{2} + C.$

37. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

$$= \int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x\,dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^3}{3} + C = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C.$$

SUGESTION. Emplear (4), haciendo $v = \operatorname{sen} x$, $dv = \cos x\,dx$, $n = 2$.

38. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a} + C.$

39. $\int \operatorname{sen} 2x \cos^2 2x\,dx = -\frac{\cos^3 2x}{6} + C.$

40. $\int \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C.$

41. $\int \frac{\cos ax\,dx}{\sqrt{b + \operatorname{sen} ax}} = \frac{2\sqrt{b + \operatorname{sen} ax}}{a} + C.$

42. $\int \left(\frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}\right)^2 dx = -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + C.$

43. $\int \frac{dx}{2 + 3x} = \frac{\ln(2 + 3x)}{3} + C.$

44. $\int \frac{x^2\,dx}{2 + x^3} = \frac{\ln(2 + x^3)}{3} + C.$

45. $\int \frac{t\,dt}{a + bt^2} = \frac{\ln(a + bt^2)}{2b} + C.$

46. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x} = \ln\,(x^2+3x) + C.$

47. $\int \frac{(y+2)\,dy}{y^2+4y} = \frac{\ln\,(y^2+4y)}{2} + C.$

48. $\int \frac{e^\theta\,d\theta}{a+be^\theta} = \frac{\ln\,(a+be^\theta)}{b} + C.$

49. $\int \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{1-\cos x} = \ln\,(1-\cos x) + C.$

50. $\int \frac{\sec^2 y\,dy}{a+b\operatorname{tg} y} = \frac{1}{b}\ln\,(a+b\operatorname{tg} y) + C.$

51. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x+2} = 2x - \ln\,(x+2) + C.$

52. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{x+1} = \frac{x^2}{2} - x + 3\ln\,(x+1) + C.$

53. $\int \frac{(x+4)\,dx}{2x+3} = \frac{x}{2} + \frac{5\ln\,(2x+3)}{4} + C.$

54. $\int \frac{e^{2s}\,ds}{e^{2s}+1} = \tfrac{1}{2}\ln\,(e^{2s}+1) + C.$

55. $\int \frac{ae^\theta+b}{ae^\theta-b}\,d\theta = 2\ln\,(ae^\theta-b) - \theta + C.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales, y verificar los resultados por diferenciación.

56. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$

Solución. $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}} = -\frac{1}{5}\int (6-5x^2)^{-1/3}\,(-10x\,dx)$

$$= -\frac{3}{10}(6-5x^2)^{2/3} + C.$$

Verificación. $d\left[-\frac{3}{10}(6-5x^2)^{2/3} + C\right]$

$$= -\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}(6-5x^2)^{-1/3}(-10x)\,dx$$

$$= \frac{2x\,dx}{\sqrt[3]{6-5x^2}}.$$

57. $\int (x^3+3x^2)\,dx.$

58. $\int \frac{(x^2-4)\,dx}{x^4}.$

59. $\int \left(\frac{\sqrt{5x}}{5} + \frac{5}{\sqrt{5x}}\right)dx.$

60. $\int \sqrt[3]{by^2}\,dy.$

61. $\int \frac{dt}{t\sqrt{2t}}.$

62. $\int \sqrt[3]{2-3x}\,dx.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

63. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

64. $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 5}}$.

65. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{3 + 2x}}$.

66. $\int \frac{3\, dx}{2 + 3x}$.

67. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - 2x^2}}$.

68. $\int \frac{t\, dt}{3t^2 + 4}$.

69. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

70. $\int \left(y^2 - \frac{1}{y^2}\right)^3 dy$.

71. $\int \frac{\operatorname{sen} a\theta\, d\theta}{\cos a\theta + b}$.

72. $\int \frac{\csc^2 \phi\, d\phi}{\sqrt{2 \operatorname{ctg} \phi + 3}}$.

73. $\int \frac{(2x + 5)\, dx}{x^2 + 5x + 6}$.

74. $\int \frac{(2x + 7)\, dx}{x + 3}$.

75. $\int \frac{(x^2 + 2)\, dx}{x + 2}$.

76. $\int \frac{(x^3 + 3x)\, dx}{x^2 + 1}$.

77. $\int \frac{(4x + 3)\, dx}{\sqrt[3]{1 + 3x + 2x^2}}$.

78. $\int \frac{(e^t + 2)\, dt}{e^t + 2t}$.

79. $\int \frac{(e^x + \operatorname{sen} x)\, dx}{\sqrt{e^x - \cos x}}$.

80. $\int \frac{\sec 2\theta \operatorname{tg} 2\theta\, d\theta}{3 \sec 2\theta - 2}$.

81. $\int \frac{\sec^2 2t\, dt}{\sqrt{5 + 3 \operatorname{tg} 2t}}$.

130. Demostración de las fórmulas (6) y (7). Estas fórmulas se deducen inmediatamente de las fórmulas de diferenciación correspondientes, XI y XI *a* del Art. 94.

EJEMPLO. Demostrar que $\int ba^{2x}\, dx = \frac{ba^{2x}}{2 \ln a} + C$.

Solución. $\int ba^{2x}\, dx = b \int a^{2x}\, dx$. Según (2)

Esta expresión se parece a (6). Hagamos $v = 2x$; entonces $dv = 2\, dx$. Si ahora introducimos el factor 2 delante de dx y el factor ½ delante del signo integral, tenemos

$$b \int a^{2x}\, dx$$

$$= \frac{b}{2} \int a^{2x}\, 2\, dx = \frac{b}{2} \int a^{2x}\, d(2x) \left[= \frac{b}{2} \int a^v\, dv = \frac{b}{2} \frac{a^v}{\ln a} \right]$$

$$= \frac{b}{2} \cdot \frac{a^{2x}}{\ln a} + C. \qquad \text{Según (6)}$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int 6\, e^{3x}\, dx = 2\, e^{3x} + C.$

2. $\int e^{\frac{x}{n}}\, dx = ne^{\frac{x}{n}} + C.$

3. $\int \frac{dx}{e^x} = -\frac{1}{e^x} + C.$

4. $\int 10^x\, dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C.$

5. $\int a^{ny}\, dy = \frac{a^{ny}}{n \ln a} + C.$

6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + C.$

7. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx = a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) + C.$

8. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) - 2\,x + C.$

9. $\int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + C.$

10. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = e^{\operatorname{sen} x} + C.$

11. $\int e^{\operatorname{tg} \theta} \sec^2 \theta\, d\theta = e^{\operatorname{tg} \theta} + C.$

12. $\int \sqrt{e^t}\, dt = 2\sqrt{e^t} + C.$

13. $\int a^x e^x\, dx = \frac{a^x e^x}{1 + \ln a} + C.$

14. $\int a^{2x}\, dx = \frac{a^{2x}}{2 \ln a} + C.$

15. $\int (e^{5x} + a^{5x})\, dx = \frac{1}{5}\left(e^{5x} + \frac{a^{5x}}{\ln a}\right) + C.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

16. $\int 5\, e^{ax}\, dx.$

17. $\int \frac{3\, dx}{e^x}.$

18. $\int \frac{4\, dt}{\sqrt{e^t}}.$

19. $\int c^{ax}\, dx.$

20. $\int \frac{dx}{4^{2x}}.$

21. $\int x^2 e^{x^3}\, dx.$

22. $\int \left(\frac{e^x + 4}{e^x}\right) dx.$

23. $\int \frac{e^x\, dx}{e^x - 2}.$

24. $\int x\,(e^{x^2} + 2)\, dx.$

25. $\int \frac{e^{\sqrt{x}} - 3}{\sqrt{x}}\, dx.$

26. $\int t\, 2^{t^2}\, dt.$

27. $\int \frac{a\, d\theta}{b^{3\theta}}.$

28. $\int 6\, x e^{-x^2}\, dx.$

29. $\int (e^{2x})^2\, dx.$

30. $\int \frac{x^2\, dx}{e^{x^3}}.$

131. Demostración de las fórmulas (8) a (17). Las fórmulas (8) a (13) se deducen inmediatamente de las fórmulas de diferenciación correspondientes, XIII, etc., del Art. 94.

Demostración de (14).

$$\int \operatorname{tg} v\, dv = \int \frac{\operatorname{sen} v\, dv}{\cos v}$$

$$= -\int \frac{-\operatorname{sen} v\, dv}{\cos v}$$

$$= -\int \frac{d(\cos v)}{\cos v}$$

$$= -\ln \cos v + C \qquad \text{según (5)}$$

$$= \ln \sec v + C.$$

$$\left[\text{Por ser } -\ln \cos v = -\ln \frac{1}{\sec v} = -\ln 1 + \ln \sec v = \ln \sec v.\right]$$

Demostración de (15).

$$\int \operatorname{ctg} v\, dv = \int \frac{\cos v\, dv}{\operatorname{sen} v} = \int \frac{d(\operatorname{sen} v)}{\operatorname{sen} v}$$

$$= \ln \operatorname{sen} v + C. \qquad \text{Según (5)}$$

Demostración de (16). Puesto que

$$\sec v = \sec v \, \frac{\sec v + \operatorname{tg} v}{\sec v + \operatorname{tg} v}$$

$$= \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v},$$

$$\int \sec v\, dv = \int \frac{\sec v \operatorname{tg} v + \sec^2 v}{\sec v + \operatorname{tg} v}\, dv$$

$$= \int \frac{d(\sec v + \operatorname{tg} v)}{\sec v + \operatorname{tg} v}$$

$$= \ln(\sec v + \operatorname{tg} v) + C. \qquad \text{Según (5)}$$

Demostración de (17). Puesto que

$$\csc v = \csc v \, \frac{\csc v - \operatorname{ctg} v}{\csc v - \operatorname{ctg} v}$$

$$= \frac{-\csc v \operatorname{ctg} v + \csc^2 v}{\csc v - \operatorname{ctg} v},$$

resulta,
$$\int \csc v\, dv = \int \frac{-\csc v \operatorname{ctg} v + \csc^2 v}{\csc v - \operatorname{ctg} v}\, dv$$
$$= \int \frac{d(\csc v - \operatorname{ctg} v)}{\csc v - \operatorname{ctg} v}$$
$$= \ln\ (\csc v - \operatorname{ctg} v) + C. \qquad \text{Según (5)}$$

Otra forma de (17) es

$\int \csc v\, dv = \ln \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v + C$ (véase el problema 4 al final de este mismo artículo).

EJEMPLO 1. Demostrar la siguiente integración.

$$\int \operatorname{sen} 2\,ax\, dx = -\frac{\cos 2\,ax}{2\,a} + C.$$

Demostración. Esta expresión se asemeja a (8). En efecto, hagamos $v = 2\,ax$; entonces $dv = 2\,a\,dx$. Si ahora introducimos el valor $2\,a$ delante de dx y el factor $\frac{1}{2\,a}$ delante del signo integral, obtenemos

$$\int \operatorname{sen} 2\,ax\, dx$$
$$= \frac{1}{2\,a}\int \operatorname{sen} 2\,ax \cdot 2\,a\,dx \left[= \frac{1}{2\,a}\int \operatorname{sen} v\, dv = -\frac{1}{2\,a}\cos v + C, \quad \text{por (8)} \right]$$
$$= \frac{1}{2\,a}\cdot - \cos 2\,ax + C = -\frac{\cos 2\,ax}{2\,a} + C.$$

EJEMPLO 2. Demostrar la siguiente integración.

$$\int (\operatorname{tg} 2\,s - 1)^2\, ds = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2\,s + \ln \cos 2\,s + C.$$

Demostración. $(\operatorname{tg} 2\,s - 1)^2 = \operatorname{tg}^2 2s - 2 \operatorname{tg} 2\,s + 1.$

$\operatorname{tg}^2 2\,s = \sec^2 2\,s - 1.$ Según (2) Art. 2

Por tanto, sustituyendo,

$$\int (\operatorname{tg} 2\,s - 1)^2\, ds = \int (\sec^2 2\,s - 2 \operatorname{tg} 2\,s)\, ds = \int \sec^2 2\,s\, ds - 2\int \operatorname{tg} 2\,s\, ds.$$

Hagamos $v = 2\,s$; entonces $dv = 2\,ds$. Empleando (10) y (14), resulta:

$$\int \sec^2 2\,s\, ds = \tfrac{1}{2}\int \sec^2 2\,s\, d(2\,s) \left[= \tfrac{1}{2}\int \sec^2 v\, dv = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} v \right] = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} 2\,s.$$

$$\int \operatorname{tg} 2\,s\, ds = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2\,s\, d(2\,s) \left[= \tfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} v\, dv = -\tfrac{1}{2} \ln \cos v \right] = -\tfrac{1}{2} \ln \cos 2\,s.$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int \cos mx\ dx = \frac{1}{m} \operatorname{sen} mx + C.$

2. $\int \operatorname{tg} bx\ dx = \frac{1}{b} \ln \sec bx + C.$

3. $\int \sec ax\ dx = \frac{1}{a} \ln (\sec ax + \operatorname{tg} ax) - C.$

4. $\int \csc v\ dv = \ln \operatorname{tg} \frac{1}{2} v + C.$

5. $\int \sec 3t \operatorname{tg} 3t\ dt = \frac{1}{3} \sec 3t + C.$

6. $\int \csc ay \operatorname{ctg} ay\ dy = -\frac{1}{a} \csc ay + C.$

7. $\int \csc^2 3x\ dx = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 3x + C.$

8. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\ dx = 2 \ln \operatorname{sen} \frac{x}{2} + C.$

9. $\int x^2 \sec^2 x^3\ dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \frac{ds}{\cos^2 s} = \operatorname{tg} s + C.$

12. $\int (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{ctg} \theta)^2\ d\theta = \operatorname{tg} \theta - \operatorname{ctg} \theta + C.$

13. $\int (\sec \phi - \operatorname{tg} \phi)^2\ d\phi = 2(\operatorname{tg} \phi - \sec \phi) - \phi + C.$

14. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = -\operatorname{ctg} x + \csc x + C.$

SUGESTION. Multiplicar el numerador y el denominador por $1 - \cos x$, y reducir antes de integrar.

15. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x - \sec x + C.$

16. $\int \frac{\operatorname{sen} s\ ds}{1 + \cos s} = -\ln(1 + \cos s) + C.$

17. $\int \frac{\sec^2 x\ dx}{1 + \operatorname{tg} x} = \ln(1 + \operatorname{tg} x) + C.$

18. $\int x \cos x^2\ dx = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.$

19. $\int (x + \operatorname{sen} 2x)\, dx = \frac{1}{2}(x^2 - \cos 2x) + C.$

20. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\sqrt{4 - \cos x}} = 2\sqrt{4 - \cos x} + C.$

21. $\int \frac{(1 + \cos x)\, dx}{x + \operatorname{sen} x} = \ln (x + \operatorname{sen} x) + C.$

22. $\int \frac{\sec^2 \theta\, d\theta}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \theta}} = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} \theta} + C.$

Calcular cada una de las siguientes integrales y comprobar los resultados por diferenciación.

23. $\int \operatorname{sen} \frac{2x}{3}\, dx.$

24. $\int \cos (b + ax)\, dx.$

25. $\int \csc^2 (a - bx)\, dx.$

26. $\int \sec \frac{\theta}{2} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

27. $\int \csc \frac{a\phi}{b} \operatorname{ctg} \frac{a\phi}{b}\, d\phi$

28. $\int e^x \operatorname{ctg} e^x\, dx.$

29. $\int \sec^2 2ax\, dx.$

30. $\int \operatorname{tg} \frac{x}{3}\, dx.$

31. $\int \frac{dt}{\operatorname{tg} 5t}.$

32. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2 4\theta}.$

33. $\int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 7y}.$

34. $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}}.$

35. $\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^2 3t}.$

36. $\int \frac{d\phi}{\cos 4\phi}.$

37. $\int \frac{a\, dx}{\cos^2 bx}.$

38. $\int \left(\sec 2\theta - \csc \frac{\theta}{2}\right) d\theta.$

39. $\int (\operatorname{tg} \phi + \sec \phi)^2\, d\phi.$

40. $\int \left(\operatorname{tg} 4s - \operatorname{ctg} \frac{s}{4}\right) ds.$

41. $\int (\operatorname{ctg} x - 1)^2\, dx.$

42. $\int (\sec t - 1)^2\, dt.$

43. $\int (1 - \csc y)^2\, dy.$

44. $\int \frac{dx}{1 - \cos x}.$

45. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$

46. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{3 + \cos 2x}.$

47. $\int \frac{\cos t\, dt}{\sqrt{a + b \operatorname{sen} t}}.$

48. $\int \frac{\csc \theta \operatorname{ctg} \theta\, d\theta}{5 - 4 \csc \theta}.$

49. $\int \frac{\csc^2 x\, dx}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg} x}}.$

50. $\int \frac{\sqrt{5 + 2 \operatorname{tg} x}\, dx}{\cos^2 x}.$

132. Demostración de las fórmulas (18) a (21). Las fórmulas (18) y (20) se deducen fácilmente de las fórmulas de diferenciación correspondientes.

Demostración de (18). Puesto que

$$d\left(\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a}+C\right)=\frac{1}{a}\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{1+\left(\frac{v}{a}\right)^2}=\frac{dv}{v^2+a^2}, \text{ según } \mathbf{XXII}, \text{Art. } 60$$

obtenemos $$\int\frac{dv}{v^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{a}+C.$$

Demostración de (19) y (19 *a*). En primer lugar demostraremos (19). Por Algebra, tenemos

$$\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}=\frac{2a}{v^2-a^2}.$$

Por tanto, $$\frac{1}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{v-a}-\frac{1}{v+a}\right].$$

Entonces $$\int\frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\frac{dv}{v-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dv}{v+a} \qquad \text{según (1)}$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(v-a)-\frac{1}{2a}\ln(v+a) \qquad \text{según (5)}$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\frac{v-a}{v+a}+C. \qquad \text{Según (2), Art. 1}$$

Para demostrar (19 *a*), por Algebra,

$$\frac{1}{a+v}+\frac{1}{a-v}=\frac{2a}{a^2-v^2}.$$

El resto de la demostración es igual que en el caso anterior.

NOTA. Las integrales (19) y (19 *a*) satisfacen la relación

$$\int\frac{dv}{v^2-a^2}=-\int\frac{dv}{a^2-v^2}.$$

Por tanto, en cualquier caso dado una u otra fórmula puede aplicarse. Más tarde veremos que en muchos ejemplos numéricos es necesario elegir una u otra.

Demostración de (20). Puesto que

$$d\left(\text{arc sen}\,\frac{v}{a}+C\right)=\frac{d\left(\frac{v}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{a}\right)^2}}=\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}, \text{ por XX, Art. 94}$$

obtenemos
$$\int\frac{dv}{\sqrt{a^2-v^2}}=\text{arc sen}\,\frac{v}{a}+C.$$

Demostración de (21). Supongamos que $v = a \text{ tg } z$, siendo z una nueva variable; diferenciando, $dv = a \sec^2 z\, dz$. Luego, por sustitución,

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2 z\,dz}{\sqrt{a^2\,\text{tg}^2 z+a^2}}=\int\frac{\sec^2 z\,dz}{\sqrt{\text{tg}^2 z+1}}$$

$$=\int\sec z\,dz=\ln\,(\sec z+\text{tg}\,z)+c \text{ por (16)}$$

$$=\ln\,(\text{tg}\,z+\sqrt{\text{tg}^2 z+1})+c. \text{ Según (2), Art. 2}$$

Pero $\text{tg}\,z=\frac{v}{a}$; por tanto,

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}}=\ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^2}{a^2}+1}\right)+c$$

$$=\ln\frac{v+\sqrt{v^2+a^2}}{a}+c$$

$$=\ln\,(v+\sqrt{v^2+a^2})-\ln a+c.$$

Haciendo $C=-\ln a+c$, obtenemos

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}}=\ln\,(v+\sqrt{v^2+a^2})+C.$$

De la misma manera, suponiendo que $v=a\sec z$, $dv=a\sec z\,\text{tg}\,z\,dz$, obtenemos

$$\int\frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}}=\int\frac{a\sec z\,\text{tg}\,z\,dz}{\sqrt{a^2\sec^2 z-a^2}}=\int\sec z\,dz$$

$$=\ln\,(\sec z+\text{tg}\,z)+c \qquad \text{según (16)}$$

$$=\ln\,(\sec z+\sqrt{\sec^2 z-1})+c \quad \text{por (2), Art. 2}$$

$$=\ln\left(\frac{v}{a}+\sqrt{\frac{v^2}{a^2}-1}\right)+c=\ln\,(v+\sqrt{v^2-a^2})+C.$$

EJEMPLO. Verificar la siguiente integración:

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{3} + C.$$

Solución. Esta expresión se asemeja a (18). En efecto, sean $v^2 = 4x^2$ y $a^2 = 9$; entonces $v = 2x$, $dv = 2\,dx$ y $a = 3$. Luego, si multiplicamos el numerador por 2 y dividimos delante del signo integral por 2, obtenemos

$$\int \frac{dx}{4x^2+9}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2+(3)^2} \left[= \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{arc\,tg} \frac{v}{a} + C \quad \text{según (18)} \right]$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x}{3} + C.$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{3} + C.$

2. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x-2}{x+2}\right) + C.$

3. $\int \frac{dy}{\sqrt{25-y^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{y}{5} + C.$

4. $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-16}} = \ln\left(s+\sqrt{s^2-16}\right) + C.$

5. $\int \frac{dx}{9x^2-4} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{3x-2}{3x+2}\right) + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{4} + C.$

7. $\int \frac{dx}{9x^2-1} = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right) + C.$

8. $\int \frac{dt}{4-9t^2} = \frac{1}{12} \ln \left(\frac{2+3t}{2-3t}\right) + C.$

9. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}} = \operatorname{arc\,tg} e^x + C.$

10. $\int \frac{\cos\theta\,d\theta}{4-\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2+\operatorname{sen}\theta}{2-\operatorname{sen}\theta}\right) + C.$

11. $\int \frac{b\,dx}{a^2x^2-c^2} = \frac{b}{2ac} \ln \left(\frac{ax-c}{ax+c}\right) + C.$

12. $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{5}{2} \operatorname{arc\,sen} x^2 + C.$

13. $\int \frac{ax\,dx}{x^4 + b^4} = \frac{a}{2\,b^2} \text{ arc tg } \frac{x^2}{b^2} + C.$

14. $\int \frac{dt}{(t-2)^2 + 9} = \frac{1}{3} \text{ arc tg } \left(\frac{t-2}{3}\right) + C.$

15. $\int \frac{dy}{\sqrt{1 + a^2y^2}} = \frac{1}{a} \ln\,(ay + \sqrt{1 + a^2y^2}) + C.$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{4 - (u+3)^2}} = \text{arc sen} \left(\frac{u+3}{2}\right) + C.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16\,x^2}}.$

18. $\int \frac{dy}{\sqrt{9\,y^2 + 4}}.$

19. $\int \frac{dt}{4\,t^2 + 25}.$

20. $\int \frac{dx}{25\,x^2 - 4}.$

21. $\int \frac{7\,dx}{3 + 7\,x^2}.$

22. $\int \frac{3\,dy}{9\,y^2 - 16}.$

23. $\int \frac{ds}{\sqrt{4\,s^2 + 5}}.$

24. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^4 - 4}}.$

25. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5\,x^2 + 3}}.$

26. $\int \frac{2\,e^x\,dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}.$

27. $\int \frac{6\,t\,dt}{8 - 3\,t^2}.$

28. $\int \frac{\text{sen}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{4 + \cos^2\theta}}.$

29. $\int \frac{dx}{m^2 + (x+n)^2}.$

30. $\int \frac{du}{4 - (2\,u - 1)^2}.$

31. $\int \frac{7\,x^2\,dx}{5 - x^6}.$

Las fórmulas ordinarias (18) a (21) contienen expresiones de segundo grado de dos términos solamente ($v^2 \pm a^2$, $a^2 - v^2$). Si una integral implica una expresión de segundo grado de tres términos, ésta se puede reducir a una de dos términos completando el cuadrado, como puede verse en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1. Verificar la siguiente integración:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2\,x + 5} = \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{x+1}{2} + C.$$

Solución. $x^2 + 2\,x + 5 = x^2 + 2\,x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4.$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2\,x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2^2}.$$

Esta última integral es de la forma (18). En efecto, hagamos $v = x + 1$ y $a = 2$; entonces $dv = dx$. Por tanto, la integral anterior se convierte en

$$\int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{v}{a} + C = \frac{1}{2} \text{ arc tg } \frac{x+1}{2} + C.$$

EJEMPLO 2. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 2 \text{ arc sen } \frac{2\,x - 1}{3} + C.$

Solución. Esta integral es de la forma (20), *puesto que el coeficiente de* x^2 *es negativo*. Ahora bien,

$$2 + x - x^2 = 2 - (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{4} = \tfrac{9}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2.$$

Hagamos $v = x - \tfrac{1}{2}$, $a = \tfrac{3}{2}$. Entonces, $dv = dx$.

$$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{\sqrt{\tfrac{9}{4} - (x - \tfrac{1}{2})^2}} = 2\int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = 2 \text{ arc sen } \frac{v}{a} + C \quad \text{según (20)}$$

$$= 2 \text{ arc sen } \frac{2x - 1}{3} + C.$$

EJEMPLO 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \frac{1}{10} \ln \frac{3x - 3}{3x + 7} + C.$

Solución.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x - 7 &= 3(x^2 + \tfrac{4}{3}x - \tfrac{7}{3}) \\ &= 3(x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{9} - \tfrac{25}{9}) \\ &= 3[(x + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{25}{9}]. \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{3x^2 + 4x - 7} = \int \frac{dx}{3[(x + \tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{25}{9}]} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^2 - a^2},$$

según la forma (19), si $v = x + \tfrac{2}{3}$, $a = \tfrac{5}{3}$, puesto que también $dv = dx$. Entonces, tenemos

$$\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{6a} \ln \frac{v - a}{v + a} + C = \frac{1}{10} \ln \frac{x + \tfrac{2}{3} - \tfrac{5}{3}}{x + \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{3}} + C, \text{ etc.}$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x + 1}{x + 3}\right) + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x - x^2 - 10} = -\frac{1}{3} \text{ arc tg} \left(\frac{x - 1}{3}\right) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x^2 - 8x + 25} = \text{arc tg} \left(\frac{x - 4}{3}\right) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}} = \text{arc sen } (2x - 3) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dv}{v^2 - 6v + 5} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{v - 5}{v - 1}\right) + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1} = \text{arc tg } (2x - 1) + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{15 + 2x - x^2}} = \text{arc sen}\left(\frac{x-1}{4}\right) + C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{x+2}\right) + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x - x^2} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x-4}\right) + C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \text{arc sen}\,(x-1) + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{2as + s^2}} = \ln\left(s + a + \sqrt{2as + s^2}\right) + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + 3y + 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{2y + 3 - \sqrt{5}}{2y + 3 + \sqrt{5}}\right) + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x + x^2}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + x + x^2}\right) + C.$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5} = \frac{1}{4}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + C.$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{11}}\,\text{arc tg}\left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right) + C.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3x - 4x^2}} = \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{8x+3}{\sqrt{41}}\right) + C.$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}.$

20. $\displaystyle\int \frac{dy}{3 - 2y - y^2}.$

21. $\displaystyle\int \frac{3\,du}{\sqrt{5 - 4u - u^2}}.$

22. $\displaystyle\int \frac{5\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$

25. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{3t - 2t^2}}.$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}.$

27. $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 2x - x^2}.$

28. $\displaystyle\int \frac{dr}{r^2 - 2r - 3}.$

29. $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}.$

30. $\int \frac{dz}{\sqrt{3 + 2z - z^2}}$.

31. $\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 8v + 15}}$.

32. $\int \frac{x\,dx}{x^4 - x^2 - 1}$.

33. $\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t - 2t^2}}$.

34. $\int \frac{dx}{3x^2 + 4x + 1}$.

35. $\int \frac{dw}{2w^2 + 2w + 1}$.

36. $\int \frac{x^2\,dx}{9x^6 - 3x^3 - 1}$.

37. $\int \frac{dt}{15 + 4t - t^2}$.

38. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 12x + 8}}$.

39. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 7}}$.

Cuando el integrando es una fracción cuyo numerador es una expresión de primer grado mientras que el denominador es una expresión de segundo grado o la raíz cuadrada de una tal expresión , la integral dada puede reducirse a una integral inmediata utilizando el método que se indica en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1. Demostrar la siguiente integración:

$$\int \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2 + 9} - \frac{1}{2}\ln(2x + \sqrt{4x^2 + 9}) + C.$$

Demostración. Multiplicando el numerador por dx, y aplicando (1), resulta

$$\int \frac{3x - 1}{\sqrt{4x^2 + 9}} dx = \int \frac{3x\,dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}.$$

De aquí se deduce la solución según (4) y (21).

EJEMPLO 2. Demostrar la siguiente integración:

$$\int \frac{2x - 3}{3x^2 + 4x - 7} dx = \frac{1}{3}\ln\left(x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}\right) - \frac{13}{30}\ln\frac{3x - 3}{3x + 7} + C.$$

Demostración. $3x^2 + 4x - 7 = 3[(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{25}{9}]$, según el ejemplo 3 de la página 250.

Hagamos $v = x + \frac{2}{3}$. Entonces $x = v - \frac{2}{3}$ y $dx = dv$.

Sustituyendo,

$$\int \frac{2x - 3}{3x^2 + 4x - 7} dx = \int \frac{2(v - \frac{2}{3}) - 3}{3(v^2 - \frac{25}{9})} dv = \frac{1}{9}\int \frac{6v - 13}{v^2 - \frac{25}{9}} dv.$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{2v\,dv}{v^2 - \frac{25}{9}} - \frac{13}{9}\int \frac{dv}{v^2 - \frac{25}{9}}.$$

Empleando (5) y (19), y sustituyendo $v = x + \frac{2}{3}$, tenemos el resultado pedido.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\int \frac{(1+2x)\,dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + \ln(1+x^2) + C.$

2. $\int \frac{(2x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$

3. $\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \text{arc sen } x + C.$

4. $\int \frac{(3x-1)\,dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\text{arc tg }\frac{x}{3} + C.$

5. $\int \frac{(3s-2)\,ds}{\sqrt{9-s^2}} = -3\sqrt{9-s^2} - 2\text{ arc sen }\frac{s}{3} + C.$

6. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + 3\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$

7. $\int \frac{(2x-5)\,dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln(3x^2-2) - \frac{5\sqrt{6}}{12}\ln\left(\frac{3x-\sqrt{6}}{3x+\sqrt{6}}\right) + C.$

8. $\int \frac{(5t-1)\,dt}{\sqrt{3t^2-9}} = \frac{5}{3}\sqrt{3t^2-9} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln(t\sqrt{3}+\sqrt{3t^2-9}) + C.$

9. $\int \frac{(x+3)\,dx}{6x-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(6x-x^2) - \ln\left(\frac{x-6}{x}\right) + C.$

10. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\text{arc tg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

11. $\int \frac{(1-x)\,dx}{4x^2-4x-3} = -\frac{1}{8}\ln(4x^2-4x-3) + \frac{1}{16}\ln\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right) + C.$

12. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{1-6x-9x^2} = -\frac{1}{6}\ln(1-6x-9x^2)$
$+ \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{3x+1-\sqrt{2}}{3x+1+\sqrt{2}}\right) + C.$

13. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+2x}} = \sqrt{x^2+2x} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x}) + C.$

14. $\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\text{ arc sen}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C.$

15. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\text{ arc sen}\left(\frac{x-3}{6}\right) + C.$

16. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{\sqrt{19-5x+x^2}} = 3\sqrt{19-5x+x^2}$
$+ {}^{19}\!/_{2}\ln(x-{}^{5}\!/_{2}+\sqrt{19-5x+x^2}) + C.$

17. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2-4x+5}$
$- \frac{1}{4}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right) + C.$

18. $\int \frac{(8x-3)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-5}} = -2\sqrt{12x-4x^2-5}$
$+ \frac{9}{2}\,\text{arc sen}\left(\frac{2x-3}{2}\right) + C.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

19. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{x^2+1}$.

20. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{x^2-1}$.

21. $\int \frac{(3-x)\,dx}{4-3x^2}$.

22. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

23. $\int \frac{(4x-1)\,dx}{\sqrt{3+5x^2}}$.

24. $\int \frac{(3x-5)\,dx}{x^2+4x}$.

25. $\int \frac{(4x+5)\,dx}{\sqrt{3x-x^2}}$.

26. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2-6x+5}$.

27. $\int \frac{(3-4x)\,dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

28. $\int \frac{(5x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

29. $\int \frac{(1-x)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$.

30. $\int \frac{(8-3x)\,dx}{x^2+x+1}$.

31. $\int \frac{(x+4)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

32. $\int \frac{(2x+7)\,dx}{2x^2+2x+1}$.

33. $\int \frac{(3x+8)\,dx}{9x^2-3x-1}$.

34. $\int \frac{(6-x)\,dx}{\sqrt{4x^2-12x+7}}$.

133. Demostración de las fórmulas (22) y (23). Para demostrar la fórmula (22) basta efectuar la sustitución

$$v = a \operatorname{sen} z.$$

Entonces
$$dv = a\cos z\,dz,$$

y
$$\sqrt{a^2-v^2} = \sqrt{a^2-a^2\operatorname{sen}^2 z} = a\cos z.$$

Luego, según (5) Art. 2,

$$\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv = a^2\int \cos^2 z\,dz = \frac{a^2}{2}\int(\cos 2z+1)dz$$

$$= \frac{a^2}{4}\operatorname{sen} 2z + \frac{a^2}{2}z + C.$$

Para obtener el resultado en función de v, tenemos, según lo anteriormente dicho,

$$z = \text{arc sen}\,\frac{v}{a}, \quad \text{y} \quad \text{sen}\,2z = 2\,\text{sen}\,z\cos z = 2\frac{v}{a}\,\frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{a}.$$

Sustituyendo, obtenemos **(22)**.

Demostración de la fórmula (23). Sustituyendo $v = a\,\text{tg}\,z$, se demuestra fácilmente (véase el Art. 132) que

$$(1)\quad \int \sqrt{v^2 + a^2}\,dv = \int a\sec z \cdot a\sec^2 z\,dz = a^2\int \sec^3 z\,dz.$$

En un párrafo posterior se demostrará que

$$(2)\quad \int \sec^3 z\,dz = \tfrac{1}{2}\sec z\,\text{tg}\,z + \tfrac{1}{2}\ln(\sec z + \text{tg}\,z) + C.$$

Puesto que $\text{tg}\,z = \frac{v}{a}$ y $\sec z = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$, de (1) y (2) deducimos

$$(3)\quad \int \sqrt{v^2 + a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(v + \sqrt{v^2 + a^2}\right) + C',$$

en donde $C' = C - \frac{a^2}{2}\ln a$. Por tanto, **(23)** queda demostrado cuando el signo es positivo.

Sustituyendo $v = a\sec z$, obtenemos (véase el Art. 132)

$$(4)\quad \int \sqrt{v^2 - a^2}\,dv = \int a\,\text{tg}\,z \cdot a\sec z\,\text{tg}\,z\,dz$$

$$= a^2\int \text{tg}^2 z\sec z\,dz$$

$$= a^2\int \sec^3 z\,dz - a^2\int \sec z\,dz.$$

Comparando (4) con (2), tenemos

$$(5)\quad \int \sqrt{v^2 - a^2}\,dv = \frac{a^2}{2}\sec z\,\text{tg}\,z - \frac{a^2}{2}\ln(\sec z + \text{tg}\,z) + C.$$

Pero $\sec z = \frac{v}{a}$ y, por tanto, $\text{tg}\,z = \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{a}$. Sustituyendo en (5), obtenemos la fórmula **(23)** cuando el signo delante de a^2 es negativo.

EJEMPLO 1. Demostrar la siguiente integración:

$$\int \sqrt{4-9x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2} + \frac{2}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x}{2} + C.$$

Demostración. Compárese con (22) y sean $v = 3x$, $a^2 = 4$; entonces $dv = 3\,dx$. Por tanto,

$$\int \sqrt{4-9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{4-9x^2}\,3\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{a^2-v^2}\,dv.$$

Empleando (22) y haciendo $v = 3x$, $a^2 = 4$, tenemos la solución.

EJEMPLO 2. Demostrar la siguiente integración:

$$\int \sqrt{3x^2+4x-7}\,dx$$

$$= \frac{1}{6}(3x+2)\sqrt{3x^2+4x-7} - \frac{25\sqrt{3}}{18}\ln\left(3x+2+\sqrt{9x^2+12x-21}\right) + C.$$

Demostración. Según el ejemplo 3, página 250,

$$3x^2+4x-7 = 3[(x+\tfrac{2}{3})^2 - \tfrac{25}{9}] = 3(v^2-a^2)$$

si $v = x + \tfrac{2}{3}$, $a = \tfrac{5}{3}$. Entonces $dv = dx$.

$$\int \sqrt{3x^2+4x-7}\,dx = \sqrt{3}\int \sqrt{v^2-a^2}\,dv.$$

Empleando (23) y haciendo $v = x + \frac{2}{3}$, $a = \frac{5}{3}$, obtenemos el resultado que se quería demostrar.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int \sqrt{1-4x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen} 2x + C.$

2. $\int \sqrt{1+9x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+9x^2} + \frac{1}{6}\ln(3x+\sqrt{1+9x^2}) + C.$

3. $\int \sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{x^2-4} - \ln(x+\sqrt{x^2-4}) + C.$

4. $\int \sqrt{25-9x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{25-9x^2} + \frac{25}{6}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x}{5} + C.$

5. $\int \sqrt{4x^2+9}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{4x^2+9} + \frac{9}{4}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C.$

6. $\int \sqrt{5-3x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{5-3x^2} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,sen} x\sqrt{\frac{3}{5}} + C.$

7. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}$
$+ 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x+1}{2} + C.$

8. $\int \sqrt{5-2x+x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{5-2x+x^2}$
$+ 2 \ln (x-1+\sqrt{5-2x+x^2}) + C.$

9. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \frac{x-1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (x-1) + C.$

10. $\int \sqrt{10-4x+4x^2}\,dx = \frac{2x-1}{4}\sqrt{10-4x+4x^2}$
$+ \frac{9}{4} \ln (2x-1+\sqrt{10-4x+4x^2}) + C.$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

11. $\int \sqrt{16-9x^2}\,dx.$

12. $\int \sqrt{4+25x^2}\,dx.$

13. $\int \sqrt{9x^2-1}\,dx.$

14. $\int \sqrt{8-3x^2}\,dx.$

15. $\int \sqrt{5+2x^2}\,dx.$

16. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\,dx.$

17. $\int \sqrt{5+2x+x^2}\,dx.$

18. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\,dx.$

19. $\int \sqrt{4-2x-x^2}\,dx.$

20. $\int \sqrt{x^2-2x+8}\,dx.$

134. Integración de diferenciales trigonométricas. Consideraremos ahora la integración de algunas diferenciales trigonométricas que se presentan con frecuencia y que pueden integrarse fácilmente, transformándose en integrales inmediatas por medio de reducciones trigonométricas sencillas.

Caso I. *Integrales de la forma* $\int sen^m\, u\, cos^n\, u\, du$.

En el caso de qũe m o n sean un número entero positivo impar, no importa lo que sea el otro, esa integración puede practicarse por medio de transformaciones sencillas y aplicando la fórmula (4),

$$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C.$$

Por ejemplo, si m es impar, escribimos

$$\operatorname{sen}^m u = \operatorname{sen}^{m-1} u \operatorname{sen} u.$$

Entonces, puesto que $m - 1$ es par, el primer término del segundo miembro será una potencia de $\operatorname{sen}^2 u$ y podremos expresarlo en potencias de $\cos^2 u$ sustituyendo

$$\operatorname{sen}^2 u = 1 - \cos^2 u.$$

Entonces la integral toma la forma

$$(1) \qquad \int (\textit{suma de términos que contienen } \cos \mathrm{u}) \ \operatorname{sen} \mathrm{u}\, d\mathrm{u}.$$

Puesto que $\operatorname{sen} u\, du = -d(\cos u)$, cada término que se debe integrar tiene la forma $v^n\, dv$ siendo $v = \cos u$.

Análogamente, si es n el que es impar, basta escribir

$$\cos^n u = \cos^{n-1} u \cos u,$$

y emplear la sustitución $\cos^2 u = 1 - \operatorname{sen}^2 u$. Entonces la integral se convierte en

$$(2) \qquad \int (\textit{suma de términos que contienen } \operatorname{sen} \mathrm{u}) \ \cos \mathrm{u}\, d\mathrm{u}.$$

EJEMPLO 1. Hallar $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx$.

Solución. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \cos x\, dx$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx \qquad \text{según (2) del Art. 2}$$

$$= \int (\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x) \cos x\, dx$$

$$= \int (\operatorname{sen} x)^2 \cos x\, dx - 2 \int (\operatorname{sen} x)^4 \cos x\, dx + \int (\operatorname{sen} x)^6 \cos x\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} - \frac{2 \operatorname{sen}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sen}^7 x}{7} + C. \qquad \text{Según (4)}$$

Aquí $v = \operatorname{sen} x$, $dv = \cos x\, dx$ y $n = 2$, 4 y 6 respectivamente.

EJEMPLO 2. Demostrar que $\int \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} x\, dx = \frac{2}{3} \cos^3 \frac{1}{2} x - 2 \cos \frac{1}{2} x + C$.

Demostración. Sea $\frac{1}{2} x = u$. Entonces $x = 2u$, $dx = 2\, du$. Sustituyendo,

$$(3) \qquad \int \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2} x\, dx = 2 \int \operatorname{sen}^3 u\, du.$$

Ahora bien,

$$\int \operatorname{sen}^3 u\,du = \int \operatorname{sen}^2 u \cdot \operatorname{sen} u\,du = \int (1 - \cos^2 u)\operatorname{sen} u\,du$$

$$= \int \operatorname{sen} u\,du - \int \cos^2 u \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + \tfrac{1}{3}\cos^3 u + C.$$

Empleando este resultado en el segundo miembro de (3), y sustituyendo $u = \frac{1}{2}x$, tenemos la solución.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$

2. $\int \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta\,d\theta = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 \theta + C.$

3. $\int \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi\,d\phi = -\frac{1}{3}\cos^3 \phi + C.$

4. $\int \operatorname{sen}^3 6x \cos 6x\,dx = \frac{1}{24}\operatorname{sen}^4 6x + C.$

5. $\int \cos^3 2\theta \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta = -\frac{1}{8}\cos^4 2\theta + C.$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C.$

7. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 \phi}{\cos^2 \phi}\,d\phi = \sec \phi + \cos \phi + C.$

8. $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$

9. $\int \operatorname{sen}^5 x\,dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$

10. $\int \cos^5 x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.$

11. $\int \frac{\operatorname{sen}^5 y}{\sqrt{\cos y}}\,dy = -2\sqrt{\cos y}\left(1 - \frac{2}{5}\cos^2 y + \frac{1}{9}\cos^4 y\right) + C.$

12. $\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} t}}\,dt = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{2/3} t\left(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{7}\operatorname{sen}^4 t\right) + C.$

Calcular cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

13. $\int \operatorname{sen}^3 2\theta\,d\theta.$

14. $\int \cos^3 \frac{\theta}{2}\,d\theta.$

15. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx.$

16. $\int \operatorname{sen}^3 t \cos^3 t\,dt.$

17. $\int \cos^3 \frac{\phi}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2}\, d\phi.$

18. $\int \operatorname{sen}^3 mt \cos^2 mt\, dt.$

19. $\int \operatorname{sen}^5 nx\, dx.$

20. $\int \cos^3 (a + bt)\, dt.$

21. $\int \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{\operatorname{sen} \theta}}\, d\theta.$

22. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}\, dx.$

Caso II. *Integrales de la forma* $\int tg^n\, u\, du$ *o* $\int ctg^n\, u\, du.$

Cuando n es un número entero, estas formas se integran fácilmente. El método no difiere mucho del usado en los ejemplos anteriores.

El primer paso es escribir

$$\operatorname{tg}^n u = \operatorname{tg}^{n-2} u \operatorname{tg}^2 u = \operatorname{tg}^{n-2} u (\sec^2 u - 1);$$

o $$\operatorname{ctg}^n u = \operatorname{ctg}^{n-2} u \operatorname{ctg}^2 u = \operatorname{ctg}^{n-2} u (\csc^2 u - 1).$$ Según (2), Art. 2

Los ejemplos ilustrarán los pasos subsecuentes.

EJEMPLO 1. Hallar $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx.$

Solución.
$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tg}^2 x\, dx$$
$$= \int (\operatorname{tg} x)^2\, d(\operatorname{tg} x) - \int (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$ Según (4) y (10)

EJEMPLO 2. Demostrar que

$$\int \operatorname{ctg}^3 2x\, dx = -\tfrac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 2x - \tfrac{1}{2} \ln \operatorname{sen} 2x + C.$$

Demostración. Sea $2x = u$. Entonces $x = \frac{1}{2} u$, $dx = \frac{1}{2} du$; Sustituyendo,

(4) $$\int \operatorname{ctg}^3 2x\, dx = \tfrac{1}{2} \int \operatorname{ctg}^3 u\, du.$$

Ahora bien, $\int \operatorname{ctg}^3 u\, du = \int \operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{ctg}^2 u\, du$
$$= \int \operatorname{ctg} u (\csc^2 u - 1)\, du$$
$$= \int \operatorname{ctg} u \csc^2 u\, du - \int \operatorname{ctg} u\, du$$
$$= -\tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 u - \ln \operatorname{sen} u + C.$$ Según (4) y (15)

Empleando este resultado en el segundo miembro de (4) y sustituyendo $u = 2x$ tenemos la solución.

Caso III. *Integrales de la forma* $\int sec^n\, u\, du$ *o* $\int csc^n\, u\, du$.

Las integrales de esta forma se calculan fácilmente cuando n es número entero positivo par. El primer paso es escribir

$$\sec^n u = \sec^{n-2} u \sec^2 u = (\operatorname{tg}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 u;$$

o $$\csc^n u = \csc^{n-2} u \csc^2 u = (\operatorname{ctg}^2 u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \csc^2 u. \quad \text{Según (2), Art. 2}$$

El ejemplo muestra los pasos subsecuentes.

EJEMPLO 3. Demostrar que

$$\int \sec^4 \tfrac{1}{2} x\, dx = \tfrac{2}{3} \operatorname{tg}^3 \tfrac{1}{2} x + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x + C.$$

Demostración. Hagamos $\frac{1}{2} x = u$. Entonces $x = 2u$, $dx = 2\, du$. Sustituyendo,

(5) $$\int \sec^4 \tfrac{1}{2} x\, dx = 2 \int \sec^4 u\, du.$$

Ahora bien, $$\int \sec^4 u\, du = \int \sec^2 u \cdot \sec^2 u\, du$$

$$= \int (\operatorname{tg}^2 u + 1) \sec^2 u\, du \quad \text{según (2), Art. 2}$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 u \sec^2 u\, du + \int \sec^2 u\, du$$

$$= \tfrac{1}{3} \operatorname{tg}^3 u + \operatorname{tg} u + C. \quad \text{Según (4) y (10)}$$

Sustituyendo en el segundo miembro de (5) y haciendo $u = \frac{1}{2} x$, encontramos la solución.

EJERCICIO. Hacer $\sec^2 u = 1 + \operatorname{tg}^2 u$ en el segundo miembro de (5); elevar al cuadrado, y seguir el ejemplo 1, pág. 260.

Caso IV. *Integrales de la forma*

$$\int tg^m\, u\, sec^n\, u\, du \quad o \quad \int ctg^m\, u\, csc^n\, u\, du.$$

Cuando n es número entero positivo par, procedemos como en el caso III.

EJEMPLO 4. Hallar $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$.

Solución. $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x \, dx = \int \text{tg}^6 x (\text{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \, dx$. Según la fórmula (2), del Art. 2

$$= \int (\text{tg}\, x)^8 \sec^2 x \, dx + \int \text{tg}^6 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \frac{\text{tg}^9 x}{9} + \frac{\text{tg}^7 x}{7} + C. \qquad \text{Según (4)}$$

Aquí $v = \text{tg}\, x$, $dv = \sec^2 x \, dx$, etc.

Cuando m es impar, se procede como se indica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5. Hallar $\int \text{tg}^5 x \sec^3 x \, dx$.

Solución. $\int \text{tg}^5 x \sec^3 x \, dx = \int \text{tg}^4 x \sec^2 x \sec x \,\text{tg}\, x \, dx$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \sec x \,\text{tg}\, x \, dx \quad \text{según (2)}$$

del Art. 2

$$= \int (\sec^6 x - 2 \sec^4 x + \sec^2 x) \sec x \,\text{tg}\, x \, dx$$

$$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{2 \sec^5 x}{5} + \frac{\sec^3 x}{3} + C. \quad \text{Según (4)}$$

Aquí $v = \sec x$, $dv = \sec x \,\text{tg}\, x \, dx$, etc.

Evidentemente, los métodos que se han empleado en los casos anteriores son de aplicación limitada. Fallan, por ejemplo, en el caso siguiente:

$$\int \sec^3 u \, du = \int \sec u \sec^2 u \, du$$

$$= \int \sec u \,\text{tg}^2 u \, du + \ln (\sec u + \text{tg}\, u).$$

En efecto, no podemos seguir adelante con las formas elementales ordinarias. Más tarde se desarrollarán otros métodos de aplicación más general.

PROBLEMAS

Demostrar las siguientes integraciones:

1. $\int \text{tg}^3 x \, dx = \frac{1}{2} \text{tg}^2 x + \ln \cos x + C.$

2. $\int \text{ctg}^3 \frac{x}{3} dx = -\frac{3}{2} \text{ctg}^2 \frac{x}{3} - 3 \ln \text{sen} \frac{x}{3} + C.$

3. $\int \operatorname{ctg}^3 2x \csc 2x\, dx = \frac{1}{2} \csc 2x - \frac{1}{6} \csc^3 2x + C.$

4. $\int \csc^4 \frac{x}{4}\, dx = -\frac{4}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{4} - 4 \operatorname{ctg} \frac{x}{4} + C.$

5. $\int \operatorname{tg}^5 3\theta\, d\theta = \frac{1}{12} \operatorname{tg}^4 3\theta - \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 3\theta + \frac{1}{3} \ln \sec 3\theta + C.$

6. $\int \frac{\operatorname{sen}^2 \phi\, d\phi}{\cos^4 \phi} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \phi + C.$

7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x} = \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 2x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x + C.$

8. $\int \frac{\cos^4 x\, dx}{\operatorname{sen}^6 x} = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C.$

9. $\int \frac{\operatorname{sen}^{3/2} x\, dx}{\cos^{11/2} x} = \frac{2}{5} \operatorname{tg}^{5/2} x + \frac{2}{9} \operatorname{tg}^{9/2} x + C.$

10. $\int \operatorname{tg}^3 \alpha \sec^{5/2} \alpha\, d\alpha = \frac{2}{9} \sec^{9/2} \alpha - \frac{2}{5} \sec^{5/2} \alpha + C.$

11. $\int \left(\frac{\sec ax}{\operatorname{tg} ax}\right)^4 dx = -\frac{1}{a}\left(\operatorname{ctg} ax + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 ax\right) + C.$

12. $\int (\operatorname{ctg}^2 2\theta + \operatorname{ctg}^4 2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{6} \operatorname{ctg}^3 2\theta + C.$

13. $\int (\operatorname{tg} bt - \operatorname{ctg} bt)^3\, dt = \frac{1}{2b}[\operatorname{tg}^2 bt + \operatorname{ctg}^2 bt] + \frac{4}{b} \ln \operatorname{sen} 2bt + C.$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

14. $\int \operatorname{ctg}^5 ax\, dx.$

15. $\int \sec^6 \theta\, d\theta.$

16. $\int \csc^6 \frac{x}{2}\, dx.$

17. $\int \frac{\sec^4 t\, dt}{\operatorname{tg}^3 t}.$

18. $\int \frac{\sec^4 x\, dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

19. $\int \left(\frac{\csc ax}{\operatorname{ctg} ax}\right)^4 dx.$

20. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} \sec^3 \frac{x}{3}\, dx.$

21. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x}.$

22 $\int \left(\frac{\csc bx}{\operatorname{tg} bx}\right)^2 dx.$

23. $\int \left(\frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{ctg} \phi}\right)^3 d\phi.$

24. $\int \left(\frac{\operatorname{tg} at}{\cos at}\right)^4 dt.$

25. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x\, dx}{\sqrt{\sec x}}.$

26. $\int \operatorname{tg}^n x \sec^4 x\, dx.$

27. $\int \frac{\operatorname{tg}^5 2\theta\, d\theta}{\sec^3 2\theta}.$

Caso V. *Cálculo de integrales de la forma* $\int \text{sen}^m u \cos^n u\, du$ *por medio de ángulos múltiplos.*

Cuando m o n son números impares, enteros y positivos, el método más corto es el del caso I. Cuando m y n son ambos números pares, enteros y positivos, la expresión diferencial dada puede transformarse, por sustituciones trigonométricas, en una expresión que contiene los senos y cosenos de ángulos múltiplos, que se integrará fácilmente. Con este fin emplearemos las siguientes fórmulas:

$$\text{sen}\, u \cos u = \tfrac{1}{2} \text{sen}\, 2u, \qquad \text{según (5), Art. 2}$$
$$\text{sen}^2 u = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2u, \qquad \text{según (5), Art. 2}$$
$$\cos^2 u = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cos 2u. \qquad \text{según (5), Art. 2}$$

EJEMPLO 1. Hallar $\int \cos^2 u\, du$.

Solución. $\int \cos^2 u\, du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u\right) du$

$$= \frac{1}{2} \int du + \frac{1}{2} \int \cos 2u\, du = \frac{u}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}\, 2u + C.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx$.

Solución. $\int \text{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int \text{sen}^2 2x\, dx$ según (5), Art. 2

$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx \quad \text{por (5), Art. 2}$$
$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \text{sen}\, 4x + C.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$.

Solución. $\int \text{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int (\text{sen}\, x \cos x)^2 \text{sen}^2 x\, dx$

$$= \int \tfrac{1}{4} \text{sen}^2 2x \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \text{sen}^2 2x\, dx - \tfrac{1}{8} \int \text{sen}^2 2x \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{1}{8} \int \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 4x\right) dx$$
$$- \frac{1}{8} \int \text{sen}^2 2x \cos 2x\, dx$$
$$= \frac{x}{16} - \frac{\text{sen}\, 4x}{64} - \frac{\text{sen}^3 2x}{48} + C.$$

Caso VI. *Integrales de la forma*

$$\int sen\ mx\ cos\ nx\ dx\,,\quad \int sen\ mx\ sen\ nx\ dx$$

o

$$\int cos\ mx\ cos\ nx\ dx\,,\quad cuando\ m \neq n\,.$$

Según (6) del Art. 2,

$$\text{sen}\ mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\ \text{sen}\ (m+n)x + \tfrac{1}{2}\ \text{sen}\ (m-n)x.$$

Por tanto,

$$\int \text{sen}\ mx \cos nx\, dx = \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\ (m+n)x\, dx + \tfrac{1}{2}\int \text{sen}\ (m-n)x\, dx$$

$$= -\frac{\cos (m+n)x}{2\,(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2\,(m-n)} + C.$$

Análogamente, obtenemos

$$\int \text{sen}\ mx\ \text{sen}\ nx\, dx = -\frac{\text{sen}\ (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}\ (m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\text{sen}\ (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}\ (m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

PROBLEMAS

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $\int \text{sen}^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\ 2x}{4} + C.$

2. $\int \text{sen}^4 x\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen}\ 2x}{4} + \frac{\text{sen}\ 4x}{32} + C.$

3. $\int \cos^4 x\, dx = \frac{3x}{8} + \frac{\text{sen}\ 2x}{4} + \frac{\text{sen}\ 4x}{32} + C.$

4. $\int \text{sen}^6 x\, dx = \frac{5x}{16} - \frac{\text{sen}\ 2x}{4} + \frac{\text{sen}^3 2x}{48} + \frac{3\ \text{sen}\ 4x}{64} + C.$

5. $\int \cos^6 x\, dx = \frac{5x}{16} + \frac{\text{sen}\ 2x}{4} - \frac{\text{sen}^3 2x}{48} + \frac{3\ \text{sen}\ 4x}{64} + C.$

6. $\int \text{sen}^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\ 2ax}{4a} + C.$

7. $\int \text{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\text{sen}\ 2x}{16} + C.$

8. $\int \text{sen}^4 ax\, dx = \frac{3x}{8} - \frac{\text{sen}\ 2ax}{4a} + \frac{\text{sen}\ 4ax}{32a} + C.$

9. $\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x\, dx = \frac{x}{16} + \frac{\operatorname{sen}^3 4x}{96} - \frac{\operatorname{sen} 8x}{128} + C.$

10. $\int (2 - \operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta = \frac{9\theta}{2} + 4\cos\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + C.$

11. $\int (\operatorname{sen}^2\phi + \cos\phi)^2\, d\phi = \frac{7\phi}{8} + \frac{2\operatorname{sen}^3\phi}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4\phi}{32} + C.$

12. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x\, dx = \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C.$

13. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 5x}{10} + C.$

14. $\int \cos 4x \cos 3x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 7x}{14} + C.$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

15. $\int \cos^2 ax\, dx.$

16. $\int \cos^4 ax\, dx.$

17. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx.$

18. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

19. $\int \operatorname{sen}^4 2\alpha \cos^4 2\alpha\, d\alpha.$

20. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^6 x\, dx.$

21. $\int (1 + \cos x)^3\, dx.$

22. $\int (\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta} - \cos 2\theta)^2\, d\theta.$

23. $\int (\sqrt{\cos\theta} - 2\operatorname{sen}\theta)^2\, d\theta.$

24. $\int (\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 3x)^2\, dx.$

25. $\int (\operatorname{sen} x + \cos 2x)^2\, dx.$

26. $\int (\cos x + 2\cos 2x)^2\, dx.$

135. Integración, por sustitución trigonométrica, de expresiones que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ o $\sqrt{u^2 \pm a^2}$. En muchos casos, el método más corto de integrar tales expresiones es efectuar un cambio de variable como sigue:

Cuando ocurre $\sqrt{a^2 - u^2}$, hágase $u = a \operatorname{sen} z$.

Cuando ocurre $\sqrt{a^2 + u^2}$, hágase $u = a \operatorname{tg} z$.

Cuando ocurre $\sqrt{u^2 - a^2}$, hágase $u = a \sec z$.

Estas sustituciones se han empleado en los Artículos 132 y 133. En cada caso el signo radical desaparece.

En efecto,

(1) $\sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 z} = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 z} = a \cos z$:

(2) $\sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 z} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = a \sec z$;

(3) $\sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} = a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a \operatorname{tg} z$.

EJEMPLO 1. Hallar $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}}$.

Solución. Hagamos $u = a \operatorname{sen} z$; entonces $du = a \cos z\, dz$, y empleando (1),

$$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}} = \int \frac{a \cos z\, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{a^2}\int \sec^2 z\, dz$$

$$= \frac{\operatorname{tg} z}{a^2} + C = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C.$$

En efecto, puesto que $\operatorname{sen} z = \frac{u}{a}$, trácese un triángulo rectángulo y márquense los lados como se indica en la figura 101. Entonces, $\operatorname{tg} z = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}}$.

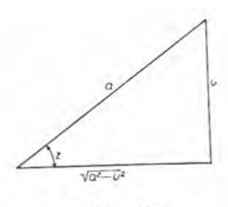


Fig. 101

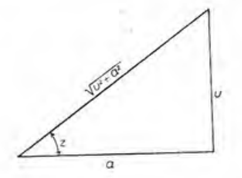


Fig. 102

EJEMPLO 2. Demostrar que $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x} + C$.

Solución. Haciendo $u = 2x$ y $a = 3$, resulta $\sqrt{4x^2 + 9} = \sqrt{u^2 + a^2}$
Por tanto, si hacemos $2x = u$, entonces $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$. Sustituyendo,

(4) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Hagamos $u = a \operatorname{tg} z$. Entonces $du = a \sec^2 z\, dz$, y empleando (2), resulta

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2 z\, dz}{a \operatorname{tg} z \cdot a \sec z} = \frac{1}{a}\int \frac{\sec z\, dz}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$$

$$= \frac{1}{a}\int \csc z\, dz = \frac{1}{a} \ln(\csc z - \operatorname{ctg} z) + C.$$

Puesto que $\operatorname{tg} z = \frac{u}{a}$, trácese un triángulo rectángulo y márquense los lados como se indica en la figura 102. Entonces,

$$\csc z = \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{a}{u}.$$

Luego $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{u^2+a^2} - a}{u} + C.$$

Sustituyendo en (4), y haciendo $u = 2x$, $a = 3$, tenemos la solución.

PROBLEMAS

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $$\int \frac{dx}{(x^2+2)^{3/2}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+2}} + C.$$

2. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-6}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-6} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2-6}\right) + C.$$

3. $$\int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + C.$$

4. $$\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + 2 \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{2} + C.$$

5. $$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+8)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2+8}\right) + C.$$

6. $$\int \frac{u^2\,du}{(9-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{9-u^2}} - \operatorname{arc\,sen} \frac{u}{3} + C.$$

7. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x}{2+\sqrt{x^2+4}}\right) + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{x}{5+\sqrt{25-x^2}}\right) + C.$$

9. $$\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-7}} = \frac{\sqrt{y^2-7}}{7y} + C.$$

10. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + C.$$

11. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + \frac{1}{54} \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{3} + C.$$

12. $$\int \frac{\sqrt{16-t^2}\,dt}{t^2} = -\frac{\sqrt{16-t^2}}{t} - \operatorname{arc\,sen} \frac{t}{4} + C.$$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

13. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}\,dx}{x}$.

14. $\int \frac{\sqrt{y^2-9}\,dy}{y}$.

15. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{4-x^2}}$.

16. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}\,dx}{x^2}$.

17. $\int \frac{\sqrt{100-u^2}\,du}{u}$.

18. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

19. $\int \frac{dv}{(v^2-3)^{3/2}}$.

20. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

21. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-5}}$.

22. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}\,dx}{x^6}$.

136. Integración por partes. Si u y v son funciones de la misma variable independiente, tenemos, según la fórmula para la diferenciación de un producto (V, Art. 94),

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

o sea, trasponiendo,

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Integrando, resulta la fórmula inversa,

$$(A) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

que se llama **fórmula de integración por partes.** Tal vez no podamos integrar $u\,dv$ directamente; pero esta fórmula hace que su integración dependa de la de dv y $v\,du$, que pueden ser formas fáciles de integrar. Este método de *integración por partes* es uno de los más útiles del Cálculo integral.

Para aplicar esta fórmula en un caso dado, debe descomponerse la diferencial dada en dos factores, a saber, u y dv. No pueden darse instrucciones generales para la elección de esos factores, pero son útiles las siguientes:

a) dx *es siempre una parte de* dv;

b) *debe ser posible integrar* dv;

c) *cuando la expresión para integrar es el producto de dos funciones, ordinariamente es mejor elegir la de apariencia más complicada, con tal que pueda integrarse, como parte* dv.

Los siguientes ejemplos enseñarán en detalle cómo se aplica la fórmula:

EJEMPLO 1. Hallar $\int x \cos x \, dx$.

Solución. Sean $u = x$ y $dv = \cos x \, dx$;

entonces $du = dx$ y $v = \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$.

Sustituyendo en (A),

$$\int \overbrace{x}^{u} \overbrace{\cos x \, dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u} \overbrace{\operatorname{sen} x}^{v} - \int \overbrace{\operatorname{sen} x}^{v} \overbrace{dx}^{du} = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int x \ln x \, dx$.

Solución. Sea $u = \ln x$ y $dv = x \, dx$;

entonces $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$.

Sustituyendo en (A),

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\int xe^{ax} \, dx$.

Solución. Sean $u = e^{ax}$ y $dv = x \, dx$;

entonces $du = e^{ax} \cdot a \, dx$ y $v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$.

Sustituyendo en (A),

$$\int xe^{ax} \, dx = e^{ax} \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^{ax} a \, dx$$

$$= \frac{x^2 e^{ax}}{2} - \frac{a}{2} \int x^2 e^{ax} \, dx.$$

Pero integrar $x^2 e^{ax} \, dx$ es menos sencillo que integrar $xe^{ax} \, dx$. Este hecho indica que no hemos elegido nuestros factores convenientemente. En lugar de eso, sean

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = e^{ax} \, dx;$$

entonces $du = dx$ y $v = \int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

Sustituyendo en (A),

$$\int xe^{ax} \, dx = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx$$

$$= \frac{xe^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C.$$

En algunos casos es necesario aplicar la fórmula de integración por partes más de una vez, como en el ejemplo que sigue.

EJEMPLO 4. Hallar $\int x^2 e^{ax}\,dx$.

Solución. Sean $u = x^2$ y $dv = e^{ax}\,dx$;

entonces $du = 2\,x\,dx$ y $v = \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$.

Sustituyendo en (A),

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = x^2 \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot 2\,x\,dx$$

(1) $$= \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2}{a}\int x e^{ax}\,dx.$$

La integral del segundo miembro puede hallarse aplicando otra vez la fórmula (A). De esta manera obtenemos

$$\int x e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C.$$

Sustituyendo este resultado en (1), se tiene

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{x^2 e^{ax}}{a} - \frac{2\,e^{ax}}{a^2}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2\,x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C.$$

EJEMPLO 5. Demostrar que

$$\int \sec^3 z\,dz = \tfrac{1}{2}\sec z\ \mathrm{tg}\ z + \tfrac{1}{2}\ln\,(\sec z + \mathrm{tg}\ z) + C.$$

Demostración. Hagamos $u = \sec z$ y $dv = \sec^2 z\,dz$;

entonces $du = \sec z\ \mathrm{tg}\ z\,dz$ y $v = \mathrm{tg}\ z$.

Sustituyendo en (A),

$$\int \sec^3 z\,dz = \sec z\ \mathrm{tg}\ z - \int \sec z\ \mathrm{tg}^2\, z\,dz.$$

En la nueva integral, efectuemos la sustitución $\mathrm{tg}^2\, z = \sec^2 z - 1$. Entonces, obtenemos

$$\int \sec^3 z\,dz = \sec z\ \mathrm{tg}\ z - \int \sec^3 z\,dz + \ln\,(\sec z + \mathrm{tg}\ z) + C.$$

Trasponiendo al primer miembro la integral del segundo miembro y dividiendo por 2, tenemos el resultado buscado.

EJEMPLO 6. Demostrar que

$$\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\ nx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\ \mathrm{sen}\ nx - n\cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$$

Demostración. Sean $u = e^{ax}$ y $dv = \operatorname{sen} nx\, dx$;

entonces $du = ae^{ax}\, dx$ y $v = -\frac{\cos nx}{n}$.

Sustituyendo en la fórmula (A), el resultado es

$$(2) \qquad \int e^{ax} \operatorname{sen} nx\, dx = -\frac{e^{ax}\cos nx}{n} + \frac{a}{n}\int e^{ax}\cos nx\, dx.$$

Integremos por partes la nueva integral.

Sea $u = e^{ax}$ y $dv = \cos nx\, dx$;

entonces $du = ae^{ax}\, dx$ y $v = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$.

Luego, según (A),

$$(3) \qquad \int e^{ax}\cos nx\, dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} nx}{n} - \frac{a}{n}\int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx.$$

Sustituyendo en (2), obtenemos

$$(4) \qquad \int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{e^{ax}}{n^2}\left(a \operatorname{sen} nx - n \cos nx\right) - \frac{a^2}{n^2}\int e^{ax}\operatorname{sen} nx\, dx.$$

Las dos integrales de (4) son idénticas. Trasponiendo la del segundo miembro, y despejando la integral se obtiene el resultado buscado.

Entre las aplicaciones más importantes del método de integración por partes se encuentra la integración de

a) *diferenciales que contienen productos,*

b) *diferenciales que contienen logaritmos,*

c) *diferenciales que contienen funciones trigonométricas inversas.*

PROBLEMAS

Demostrar las siguientes integraciones.

1. $\int x \operatorname{sen} x\, dx = \operatorname{sen} x - x \cos x + C.$

2. $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C.$

3. $\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx = 4 \operatorname{sen} \frac{x}{2} - 2x \cos \frac{x}{2} + C.$

4. $\int x \cos nx\, dx = \frac{\cos nx}{n^2} + \frac{x \operatorname{sen} nx}{n} + C.$

5. $\int u \sec^2 u\, du = u \operatorname{tg} u + \ln \cos u + C.$

6. $\int v \operatorname{sen}^2 3v\, dv = \frac{1}{4} v^2 - \frac{1}{12} v \operatorname{sen} 6v - \frac{1}{72} \cos 6v + C.$

7. $\int y^2 \operatorname{sen} ny\, dy = \frac{2 \cos ny}{n^3} + \frac{2y \operatorname{sen} ny}{n^2} - \frac{y^2 \cos ny}{n} + C.$

8. $\int xa^x\, dx = a^x \left[\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a}\right] + C.$

9. $\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

10. $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$

11. $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C.$

12. $\int \operatorname{arc\,ctg} y\, dy = y \operatorname{arc\,ctg} y + \frac{1}{2} \ln (1 + y^2) + C.$

13. $\int \operatorname{arc\,cos} 2x\, dx = x \operatorname{arc\,cos} 2x - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4x^2} + C.$

14. $\int \operatorname{arc\,sec} y\, dy = y \operatorname{arc\,sec} y - \ln (y + \sqrt{y^2 - 1}) + C.$

15. $\int \operatorname{arc\,csc} \frac{t}{2}\, dt = t \operatorname{arc\,csc} \frac{t}{2} + 2 \ln (t + \sqrt{t^2 - 4}) + C.$

16. $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + C.$

17. $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx = (x+1) \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

18. $\int x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(2 + 2x + x^2) + C.$

19. $\int e^\theta \cos \theta\, d\theta = \frac{e^\theta}{2} (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta) + C.$

20. $\int \frac{\ln x\, dx}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1} \ln x - \ln (x+1) + C.$

21. $\int x^2 \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arc\,sen} x + \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + C.$

22. $\int \frac{\ln (x+1)\, dx}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x+1}\, [\ln (x+1) - 2] + C.$

23. $\int \frac{xe^x\, dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C.$

24. $\int e^{-t} \cos \pi t\, dt = \frac{e^{-t}(\pi \operatorname{sen} \pi t - \cos \pi t)}{\pi^2 + 1} + C.$

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

25. $\int x \sec^2 \frac{x}{2}\, dx.$

26. $\int x \cos^2 2x\, dx.$

27. $\int x^2 \cos x\, dx.$

28. $\int \operatorname{arc\,sen} mx\, dx.$

29. $\int \operatorname{arc\,ctg} \frac{x}{2}\, dx.$

30. $\int \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x}\, dx.$

31. $\int \operatorname{arc\,sec} \frac{1}{y}\, dy.$

32. $\int \operatorname{arc\,csc} nt\, dt.$

33. $\int \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{x}{2}}\, dx.$

34. $\int x^3 \operatorname{arc\,sen} x\, dx.$

35. $\int \frac{x \operatorname{arc\,sen} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

36. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx}{x^2}.$

37. $\int x^3 \operatorname{arc\,tg} x\, dx.$

38. $\int (e^x + 2x)^2\, dx.$

39. $\int (2^x + x^2)^2\, dx.$

40. $\int e^{-\theta} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

41. $\int e^{\frac{t}{5}} \operatorname{sen} \pi t\, dt.$

42. $\int e^{3x} \cos \frac{x}{3}\, dx.$

43. $\int e^{-\frac{t}{2}} \cos 2t\, dt.$

44. $\int e^{\frac{t}{4}} \cos \pi t\, dt.$

45. $\int e^{-\frac{t}{4}} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4}\, dt.$

46. $\int \csc^3 \theta\, d\theta.$

137. Observaciones. La integración es, en general, una operación más difícil que la diferenciación. En efecto, una integral tan sencilla en aspecto como

$$\int \sqrt{x} \operatorname{sen} x\, dx$$

no se puede calcular; es decir, no hay ninguna función elemental cuya derivada sea $\sqrt{x} \operatorname{sen} x$. Para ayudar en el cálculo de integrales se han preparado tablas extensas de integrales ya resueltas. El Capítulo XXVII de este libro es una tabla de esta clase. El uso de esa tabla se explica más adelante, en el Artículo 176. Aquí basta señalar que los métodos hasta ahora presentados son adecuados para muchos problemas. En capítulos posteriores se desarrollarán otros métodos.

PROBLEMAS DIVERSOS

Hallar el valor de cada una de las siguientes integrales, y comprobar los resultados por diferenciación.

1. $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{5-2x^2}}$.

2. $\int \frac{3x\,dx}{5-2x^2}$.

3. $\int \frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{c^2-x^2}}$.

4. $\int x \cos 2x\,dx$.

5. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{x^2+4x+8}$.

6. $\int \frac{(4x+3)\,dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

7. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

8. $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$.

9. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

10. $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

11. $\int (e^{2x}+2e^{-x})^2\,dx$.

12. $\int (e^{2x}-2x)^2\,dx$.

13. $\int \frac{dx}{e^x-4e^{-x}}$.

14. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos ax\,dx$.

15. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\,dx$.

16. $\int \ln(1-\sqrt{x})dx$.

17. $\int (2 \operatorname{tg} 2\theta - \operatorname{ctg}\theta)^2\,d\theta$.

18. $\int \frac{4x\,dx}{1-4x^4}$.

19. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

20. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

21. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

22. $\int \frac{x^3\,dx}{x-1}$.

23. $\int \frac{4x\,dx}{\sqrt{1-4x^4}}$.

24. $\int e^{2t}\cos 3t\,dt$.

25. $\int \operatorname{sen}^5 \frac{\theta}{4}\,d\theta$.

26. $\int \operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{5}\,d\theta$.

27. $\int \frac{(t-\csc^2 2t)\,dt}{t^2+\operatorname{ctg} 2t}$.

28. $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{1-x^2}}\,dx$.

29. $\int \frac{5\,dx}{x^2-x+1}$.

30. $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

31. $\int x^3 \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}\,dx$.

32. $\int (e^x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$.

33. $\int (x - \cos x)^2 \, dx.$

34. $\int (1 + \operatorname{tg} x)^3 dx.$

35. $\int \frac{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}{(1 - \cos \theta)^3}.$

36. $\int \frac{(1 + \operatorname{sen} t)^3 \, dt}{\cos t}.$

37. $\int e^{-t} \operatorname{sen} 2\, t \, dt.$

38. $\int \operatorname{sen} 2\, \theta \cos 3\, \theta \, d\theta.$

39. $\int \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} 4\, \phi \, d\phi.$

40. $\int \cos \alpha \cos 2\, \alpha \, d\alpha.$

CAPITULO XIII

CONSTANTE DE INTEGRACION

138. Determinación de la constante de integración por medio de condiciones iniciales. Como se ha indicado en el Artículo 127, la constante de integración puede hallarse, en un caso dado, cuando conocemos el valor de la integral para algún valor particular de la variable. En realidad, para poder determinar la constante de integración es necesario tener algunos datos además de la expresión diferencial que se ha de integrar. Ilustremos esto con un ejemplo.

EJEMPLO. Hallar una función cuya primera derivada sea $3x^2 - 2x + 5$, y tenga el valor 12 cuando $x = 1$.

Solución. $(3x^2 - 2x + 5)\,dx$ es la expresión diferencial por integrar.

Ahora bien,

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\,dx = x^3 - x^2 + 5x + C,$$

siendo C la constante de integración. Por las condiciones de nuestro problema, este resultado debe ser igual a 12 cuando $x = 1$; es decir, que

$$12 = 1 - 1 + 5 + C, \text{ o sea, que } C = 7.$$

Por tanto, $x^3 - x^2 + 5x + 7$ es la función buscada.

139. Significado geométrico. Ilustraremos con ejemplos el significado geométrico de la constante de integración.

EJEMPLO 1. Determinar la ecuación de la curva cuya tangente en cada punto tenga de pendiente $2x$.

Solución. Puesto que la pendiente de la tangente a una curva en un punto cualquiera es $\frac{dy}{dx}$, tenemos, por hipótesis,

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

o sea,

$$dy = 2x\,dx.$$

Integrando, $y = 2 \int x\,dx$, o sea,

(1) $y = x^2 + C$,

siendo C la constante de integración. Ahora bien: si damos a C varios valores, digamos 6, 0, -3, entonces (1) da las ecuaciones

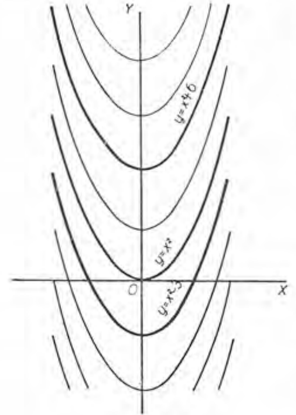


Fig. 103

$$y = x^2 + 6, \quad y = x^2, \quad y = x^2 - 3,$$

cuyos lugares geométricos son parábolas (figura 103) con sus ejes en el eje de las y y que cortan a este eje a las distancias 6, 0, -3, respectivamente, del origen.

Todas las parábolas (1) tienen el mismo valor de $\frac{dy}{dx}$; es decir, tienen la misma dirección (o pendiente) para el mismo valor de x. Se advertirá también que la diferencia de sus ordenadas permanece la misma para todos los valores de x. Por tanto, todas las parábolas pueden obtenerse trasladando una cualquiera de ellas a lo largo del eje de las y, puesto que en este caso el valor de C no afecta la pendiente de la curva.

Si en este ejemplo imponemos la condición adicional de que la curva pase por el punto (1, 4), entonces las coordenadas de ese punto deben satisfacer (1), lo que da $4 = 1 + C$, o sea, $C = 3$. Luego la curva particular que se pide es la parábola $y = x^2 + 3$.

EJEMPLO 2. Hallar la ecuación de una curva tal que en un punto cualquiera de ella la pendiente de la tangente sea igual a la razón de la abscisa a la ordenada, cambiada de signo.

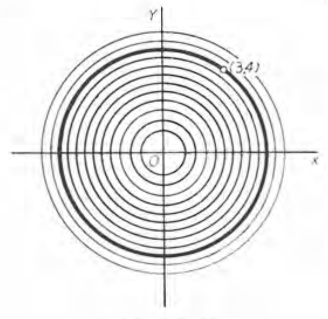


Fig. 104

Solución. La condición del problema se expresa por la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

o sea, separando las variables,

$$y\,dy = -x\,dx.$$

Integrando,

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,$$

o sea, $\quad x^2 + y^2 = 2\,C.$

Esta ecuación representa una familia de circunferencias concéntricas (fig. 104) con el centro en el origen.

Si se impone la condición de que la curva debe pasar por el punto (3, 4), entónces $9 + 16 = 2\,C$. Luego la curva particular que se pide es la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

PROBLEMAS

Las siguientes expresiones se han obtenido derivando ciertas funciones. En cada caso, hállese la función para los valores dados de la variable y de la función.

	Derivada de la función	Valor de la variable	Valor correspondiente de la función	Solución
1.	$x - 3$	2	9	$\frac{1}{2} x^2 - 3x + 13$.
2.	$3 + x - 5x^2$	6	-20	$304 + 3x + \frac{1}{2} x^2 - \frac{5}{3} x^3$.
3.	$y^3 - b^2 y$	2	0	$\frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{2} b^2 y^2 + 2b^2 - 4$.
4.	$\operatorname{sen} \theta + \cos \theta$	$\frac{1}{2}\pi$	2	$\operatorname{sen} \theta - \cos \theta + 1$.
5.	$\frac{1}{t} - \frac{1}{2 - t}$	1	0	$\ln(2t - t^2)$.
6.	$\sec^2 \phi + \operatorname{tg} \phi$	0	5	$\operatorname{tg} \phi + \ln \sec \phi + 5$.
7.	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	a	$\frac{\pi}{2a}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + \frac{\pi}{4a}$.
8.	$bx^3 + ax + 4$	b	10	
9.	$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$	4	0	
10.	$\operatorname{ctg} \theta - \csc^2 \theta$	$\frac{1}{2}\pi$	3	
11.	$3te^{2t^2}$	0	4	

Hallar la ecuación de la familia de curvas tales que la pendiente de la tangente en un punto cualquiera tiene el valor que se indica.

12. m. *Sol.* Rectas, $y = mx + C$.
13. x. Parábolas, $y = \frac{1}{2} x^2 + C$.
14. $\frac{1}{y}$. Parábolas, $\frac{1}{2} y^2 = x + C$.
15. $\frac{x^2}{y}$. Parábolas semicúbicas, $\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C$.
16. $\frac{x}{y^2}$. Parabolas semicúbicas, $\frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{2} x^2 + C$.
17. $3x^2$. Parábolas cúbicas, $y = x^3 + C$.
18. $\frac{1}{y^2}$. Parábolas cúbicas, $\frac{1}{3} y^3 = x + C$.
19. $\frac{x}{y}$. Hipérbolas equiláteras, $y^2 - x^2 = C$.
20. $-\frac{y}{x}$. Hipérbolas equiláteras, $xy = C$.
21. $\frac{b^2 x}{a^2 y}$. Hipérbolas, $b^2 x^2 - a^2 y^2 = C$.
22. $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$. Elipses, $b^2 x^2 + a^2 y^2 = C$.
23. $\frac{1 + x}{1 - y}$. Circunferencias, $x^2 + y^2 + 2x - 2y = C$

En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la función dada de las coordenadas, y que pasa por el punto particular asignado.

24. x; $(1, 1)$. *Sol.* $2y = x^2 + 1$.

25. $4y$; $(1, 1)$. $\ln y = 4x - 4$.

26. $2xy$; $(3, 1)$. $\ln y = x^2 - 9$.

27. $-xy$; $(0, 2)$. $y = 2e^{-\frac{x^2}{2}}$.

28. $\dfrac{x+1}{y+1}$; $(0, 1)$. $(y+1)^2 = (x+1)^2 + 3$.

29. $\dfrac{h-x}{y-k}$; $(0, 0)$. $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$.

30. $\dfrac{y}{x^2}$; $(1, 1)$. $x \ln y = x - 1$.

31. $y\sqrt{x}$; $(4, 1)$. $3 \ln y = 2(x\sqrt{x} - 8)$.

32. $\dfrac{4xy}{4x^2 - 15}$; $(2, 1)$. $4x^2 - y^2 = 15$.

33. $\dfrac{y^2}{x}$; $(1, 4)$.

34. $x\sqrt{y}$; $(1, 9)$.

35. $\dfrac{x-3}{1-y}$; $(3, 0)$.

36. $\dfrac{xy}{x^2+4}$; $(1, 2)$.

37. $\dfrac{4-x}{2y-3}$; $(4, 2)$.

38. $\sqrt{\dfrac{2+x}{3+y}}$; $(2, 6)$.

39. $\sqrt{\dfrac{y-1}{x-2}}$; $(3, 5)$.

40. $x\cos^2 y$; $(4, \frac{1}{4}\pi)$.

41. Se dan $dy = (2x+1)\,dx$, $y = 7$ cuando $x = 1$. Hallar el valor de y cuando $x = 3$. *Sol.* 17.

42. Se dan $dA = \sqrt{2px}\,dx$, $A = \dfrac{p^2}{3}$ cuando $x = \dfrac{p}{2}$. Hallar el valor de A cuando $x = 2p$. *Sol.* $\frac{8}{3}p^2$.

43. Se dan $dy = x\sqrt{100 - x^2}\,dx$, $y = 0$ cuando $x = 0$. Hallar el valor de y cuando $x = 8$. *Sol.* $\frac{784}{3}$.

44. Se dan $d\varrho = \cos 2\theta\,d\theta$, $\varrho = 6$ cuando $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Hallar el valor de ϱ cuando $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

45. Se dan $ds = t\sqrt{4t+1}\,dt$, $s = 0$ cuando $t = 0$. Hallar el valor de s cuando $t = 2$.

46. En cada punto de cierta curva es $y'' = x$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $(3, 0)$ y tiene en ese punto la pendiente $\frac{7}{2}$.
Sol. $6y = x^3 - 6x - 9$.

47. En cada punto de cierta curva es $y'' = \frac{12}{x^3}$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (1, 0) y es tangente en ese punto a la recta $6x + y = 6$. *Sol.* $xy + 6x = 6$.

48. En cada punto de cierta curva es $y'' = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (1, 1) y tiene una inclinación de 45° en ese punto.

49. En cada punto de cierta curva es $y'' = \frac{1}{x}$. La curva pasa por el punto (1, 0) con inclinación de 135°. Hallar su ecuación.

50. Hallar la ecuación de la curva cuya subnormal es constante e igual a $2a$.
Sol. $y^2 = 4ax + C$, una parábola.

SUGESTION. Según (4) del Artículo 43, la subnormal es igual a $y\frac{dy}{dx}$.

51. Hallar la curva cuya subtangente es constante e igual a a (véase (3) del Artículo 43). *Sol.* $a \ln y = x + C$.

52. Hallar la curva cuya subnormal es igual a la abscisa del punto de contacto. *Sol.* $y^2 - x^2 = 2C$, una hipérbola equilátera.

53. Hallar la curva cuya normal es constante $(= R)$, suponiendo que $y = R$ cuando $x = 0$. *Sol.* $x^2 + y^2 = R^2$, un círculo.

SUGESTION. Según el Artículo 43, la longitud de la normal es igual a

$$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{o sea,} \quad dx = \pm (R^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}\, y\, dy.$$

54. Hallar las ecuaciones de las curvas en las que la longitud de la subnormal es proporcional al cuadrado de la ordenada. *Sol.* $y = Ce^{kx}$.

55. Hallar la ecuación de la curva en la que el ángulo que forman el radio vector y la tangente es la mitad del ángulo polar. *Sol.* $\rho = c(1 - \cos\theta)$.

56. Hallar las ecuaciones de las curvas en las que el ángulo que forman el radio vector y la tangente en un punto cualquiera es n veces el ángulo polar.
Sol. $\rho^n = c \operatorname{sen} n\theta$.

140. Significado físico de la constante de integración. Los siguientes ejemplos ilustrarán lo que se entiende por significado físico de la constante de integración.

EJEMPLO 1. Hallar las leyes que rigen el movimiento de un punto que se mueve en línea recta con aceleración constante.

Solución. Puesto que la aceleración $\left[=\frac{dv}{dt}\text{, según } (A) \text{ del Artículo 59}\right]$ es constante, digamos f, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = f,$$

o sea, $dv = f\,dt$. Integrando.

(1) $$v = ft + C.$$

Para determinar C, supongamos que la velocidad *inicial* sea v_0; es decir, sea $v = v_0$ cuando $t = 0$.

Esos valores, sustituidos en (1), dan

$$v_0 = 0 + C,$$

o sea, $C = v_0$.

Luego (1) se convierte en

(2) $$v = ft + v_0.$$

Condiciones iniciales		
t	v	s
0	v_0	s_0

Puesto que $v = \frac{ds}{dt}$ ((C) del Art. 51), obtenemos de (2)

$$\frac{ds}{dt} = ft + v_0,$$

o sea, $ds = ft\,dt + v_0\,dt$. Integrando,

(3) $$s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + C.$$

Para determinar C, supongamos que la distancia *inicial* sea s_0, es decir, sea $s = s_0$ cuando $t = 0$.

Esos valores, sustituidos en (3), dan

$$s_0 = 0 + 0 + C, \text{ o sea, } C = s_0.$$

Luego (3) se convierte en

(4) $$s = \tfrac{1}{2} ft^2 + v_0 t + s_0.$$

Sustituyendo en (2) y (4) los valores $f = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$, obtenemos las leyes del movimiento de un cuerpo que cae en el vacío partiendo del reposo, a saber,

$$v = gt \quad \text{y} \quad h = \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Eliminando t entre estas ecuaciones, tenemos $v = \sqrt{2gh}$.

EJEMPLO 2. Estudiar el movimiento de un proyectil que tiene una velocidad inicial v_0, siendo α el angulo de tiro y despreciando la resistencia del aire.

Solución. Tomemos el plano XOY como el plano del movimiento, OX como horizontal y OY como vertical; y supongamos que el proyectil parte del origen.

Supongamos que sólo la fuerza de la gravedad influye en el proyectil. En este caso la aceleración será cero en el sentido horizontal y $-g$ en el sentido vertical. Luego, según (F) del Artículo 84,

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv_y}{dt} = -g.$$

Integrando, $\qquad v_x = C_1 \quad \text{y} \quad v_y = -gt + C_2.$

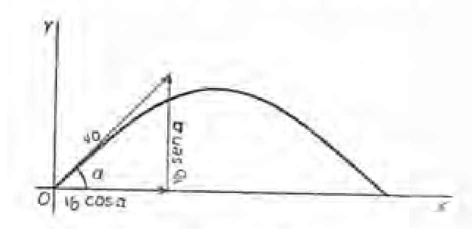


Fig. 105

Pero $\quad v_0 \cos\alpha$ = componente horizontal de la velocidad inicial,

y $\qquad v_0 \operatorname{sen}\alpha$ = componente vertical de la velocidad inicial.

Luego, $\qquad C_1 = v_0 \cos\alpha \quad \text{y} \quad C_2 = v_0 \operatorname{sen}\alpha,$ lo que da

(5) $\qquad v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{y} \quad v_y = -gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha.$

Pero, según (C) y (D) del Art. 83, $v_x = \frac{dx}{dt}$ y $v_y = \frac{dy}{dt}$; por tanto (5) da

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha,$$

o sea, $\qquad dx = v_0 \cos\alpha\, dt \;\text{y}\; dy = -gt\, dt + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, dt.$

Integrando, obtenemos

(6) $\quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t + C_3 \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t + C_4.$

Para determinar C_3 y C_4, observamos que cuando $t = 0$, $x = 0$ y $y = 0$. Sustituyendo esos valores en (6), tenemos $C_3 = 0$ y $C_4 = 0$. Luego,

(7) $\qquad x = v_0 \cos\alpha \cdot t,\quad$ y

(8) $\qquad y = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t.$

Eliminando t entre (7) y (8), obtenemos

(9) $$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\, v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Esta ecuación, que representa una parábola, es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil.

PROBLEMAS

En los siguientes problemas se da la relación entre v y t. Hallar la relación entre s y t, si $s = 2$ cuando $t = 1$.

1. $v = a + bt.$ $\qquad$ *Sol.* $s = a(t - 1) + \frac{1}{2} b(t^2 - 1) + 2.$

2. $v = \sqrt{t - 1}.$ $\qquad$ 3. $v = t^2 + \frac{1}{t^2}.$

En los siguientes problemas se da la expresión para la aceleración. Hallar la relación entre v y t, si $v = 2$ cuando $t = 3$.

4. $4 - t^2$. *Sol.* $v = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1$.

5. $\sqrt{t} + 3$.

6. $\frac{1}{t^2} - t$.

En los siguientes problemas se da la expresión para la aceleración. Hallar la relación entre s y t si $s = 0$, $v = 20$ cuando $t = 0$.

7. -32. *Sol.* $s = 20t - 16t^2$.

8. $4 - t$.

9. $-16 \cos 2t$.

10. ¿Con qué velocidad dará una piedra en el suelo si se deja caer desde lo alto de un edificio de 40 metros de altura? ($g = 9{,}8$.)
Sol. 28 m por segundo.

11. ¿Con qué velocidad dará la piedra del problema 10 en el suelo si se ha arrojado hacia abajo con velocidad de 5 m por segundo? ¿y si se ha arrojado hacia arriba con velocidad de 5 m por segundo? *Sol.* 28,44 m por segundo.

12. Una piedra se dejó caer desde un globo que ascendía a la velocidad de 5 metros por segundo. La piedra llegó al suelo en 8 segundos. ¿Qué altura tenía el globo cuando la piedra se dejó caer? *Sol.* 273,6 m.

13. En el problema 12, si el globo hubiese estado bajando a la velocidad de 5 m por segundo, ¿cuánto tiempo hubiera tardado la piedra en llegar al suelo?
Sol. 7 segundos.

14. Un tren parte de una estación de ferrocarril. Si su aceleración es de $0{,}15 + 0{,}006\,t$ m por segundo por segundo, ¿qué distancia recorrerá en 20 segundos? *Sol.* 38 metros.

15. Un cuerpo que se desliza hacia abajo sobre cierto plano inclinado está sujeto a una aceleración de 1,2 m por segundo por segundo. Si se pone en movimiento hacia arriba en el plano con velocidad de 1,8 m por segundo, *a*) ¿a qué distancia llegará en t segundos? *b*) ¿a qué distancia llegará antes de deslizarse hacia atrás? *Sol.* 1,35 metros.

16. Si el plano inclinado del problema 15 tiene 6 m de largo, y el cuerpo se pone en movimiento desde lo más bajo, ¿cuál debe ser la velocidad inicial para que el cuerpo llegue justamente hasta lo más alto?
Sol. $1{,}2\sqrt{10}$ m por segundo.

17. Una pelota se lanza del suelo hacia arriba. En un segundo llega hasta una altura de 25 m. ¿Cuál será la máxima altura alcanzada?

18. Un proyectil se dispara contra una pared vertical situada a una distancia de 147 m. La velocidad inicial es 49 m por segundo.

a) Si $\alpha = 45°$, hallar la altura del impacto del proyectil en la pared.
Sol. 58,8 m.

b) Hallar α de manera que el impacto del proyectil esté en la base de la pared. *Sol.* 18° ó 72°.

c) Hallar α de manera que el proyectil dé en la pared a la altura de 24,5 m. *Sol.* 29° ó 70°.

d) Hallar α para la máxima altura del impacto en la pared, y calcular esa altura. *Sol.* 59°; 78,4 m.

19. Un cuerpo se mueve con velocidad variable v; su aceleración es $-kv^2$, siendo k constante. Si v_0 es la velocidad cuando $t = 0$, demostrar que

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt.$$

20. Dentro de ciertas limitaciones de velocidad, la resistencia del aire en un automóvil es proporcional a la velocidad. Por tanto, si F es la fuerza neta generada por el motor, tenemos $M\frac{dv}{dt} = F - kv$. Expresar la velocidad en función de t, sabiéndose que $v = 0$ cuando $t = 0$.

Sol. $v = \frac{F}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{M}}\right)$.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. En un cuarto a la temperatura de 20° se observa que un líquido tiene una temperatura de 70°; después de 5 minutos, de 60°. Suponiendo que la rapidez de enfriamiento sea proporcional a la diferencia de las temperaturas del líquido y del cuarto, hallar la temperatura del líquido 30 minutos después de la primera observación. *Sol.* 33,1°.

2. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(a, 0)$ y cuya subtangente en coordenadas polares es n veces la longitud del radio vector correspondiente.

Sol. $\rho = ae^{\frac{\theta}{n}}$.

3. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto $(a, 0)$ y cuya subnormal polar es n veces la longitud del radio vector correspondiente.

Sol. $\rho = ae^{n\theta}$.

4. Una partícula se mueve en el plano xy de manera que las componentes de la velocidad paralelas al eje de las x y al eje de las y son, respectivamente, ky y kx. Demostrar que la trayectoria es una hipérbola equilátera.

5. Un cuerpo que se lanza desde lo alto de una torre bajo un ángulo de 45° arriba del plano horizontal, cae al suelo en 5 segundos, en un punto cuya distancia horizontal del pie de la torre es igual a la altura de ésta. Hallar la altura de la torre $(g = 9.8)$. *Sol.* 61,25 m.

6. Un móvil parte del origen de coordenadas, y después de t segundos la componente x de su velocidad es $t^2 - 4$ y la componente y es $4t$.

a) Hallar la posición del móvil después de t segundos.

Sol. $x = \frac{1}{3}t^3 - 4t,\ y = 2t^2$.

b) Hallar la distancia recorrida en la trayectoria. *Sol.* $s = \frac{1}{3}t^3 + 4t$.

c) Hallar la ecuación de la trayectoria. *Sol.* $72x^2 = y^3 - 48y^2 + 576y$.

7. Obtener la ecuación de una curva en la que la longitud de la tangente (Art. 43) sea constante $(= c)$.

SUGESTION. Elegir el signo menos en el problema 2 (*a*) de la página 104 y suponer que $y = c$ cuando $x = 0$.

$$Sol. \quad x = c \ln\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\right) - \sqrt{c^2 - y^2}.$$

8. Para cierta curva es $a^2\, ds = \rho^3\, d\theta$ (Art. 96): la curva pasa por el punto $(a, 0)$. Obtener su ecuación. *Sol.* $\rho^2 = a^2 \sec 2\theta$.

CAPITULO XIV

INTEGRAL DEFINIDA

141. Diferencial del área bajo una curva. Consideremos la función continua $\phi(x)$, y sea

$$y = \phi(x)$$

la ecuación de la curva AB. Sea CD (fig. 106) una ordenada fija, MP una ordenada variable, y u la medida del área $CMPD$. Cuando x toma un incremento pequeño Δx, u toma un incremento Δu ($=$ área $MNQP$). Completando los rectángulos $MNRP$ y $MNQS$, vemos que

Area $MNRP <$ área $MNQP <$ área $MNQS$,

o sea, $MP \cdot \Delta x < \Delta u < NQ \cdot \Delta x$;

y, dividiendo por Δx,

$$MP < \frac{\Delta u}{\Delta x} < NQ. \text{ *}$$

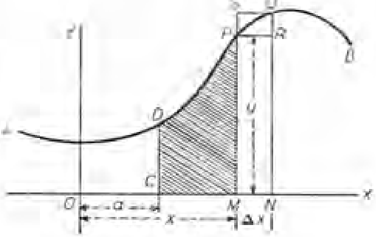


Fig. 106

Ahora bien, hágase tender Δx hacia cero; entonces, puesto que MP queda fija y NQ tiende hacia MP como límite (puesto que y es una función continua de x), obtenemos

$$\frac{du}{dx} = y \ (= MP),$$

o sea, empleando diferenciales,

$$du = y \, dx.$$

---

* En la figura, MP es menor que NQ; si MP es mayor que NQ, no se necesita más que invertir los signos de desigualdad.

Teorema. *La diferencial del área limitada por una curva cualquiera, el eje de las* x, *una ordenada fija y una ordenada variable es igual al producto de la ordenada variable por la diferencial de la abscisa correspondiente.*

142. La integral definida. Del teorema del Artículo 141 se sigue que si la curva AB es el lugar geométrico de $y = \phi(x)$, entonces $du = y\,dx$, o sea,

$$(1) \qquad du = \phi(x)\,dx,$$

siendo du la diferencial del área entre la curva, el eje de las x y dos ordenadas. Integrando, obtenemos



$$u = \int \phi(x)dx.$$

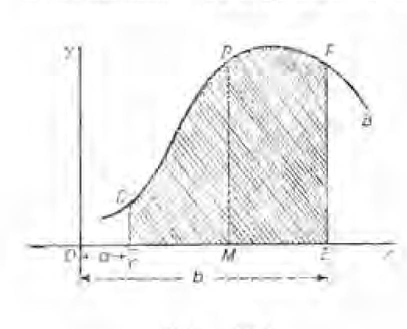


Fig. 107

Si designamos

$$\int \phi(x)dx \text{ por } f(x) + C,$$

resulta

$$(2) \qquad u = f(x) + C.$$

Para determinar C, observamos que $u = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos

$$0 = f(a) + C,$$

de donde,

$$C = -f(a).$$

Luego (2) se convierte en

$$(3) \qquad u = f(x) - f(a).$$

El área $CEFD$ que se pide es el valor de u en (3) cuando $x = b$. Luego tenemos

$$(A) \qquad \textbf{Area } CEFD = f(b) - f(a).$$

Teorema. *La diferencia de los valores de* $\int$ y dx *para* x = a *y* x = b *da el área limitada por la curva cuya ordenada es* y, *el eje de las* x *y las ordenadas que corresponden a* x = a *y* x = b.

Esta diferencia se representa por el símbolo *

$$(4) \qquad \int_a^b y\,dx \quad \text{o} \quad \int_a^b \phi(x)dx,$$

---

* Esta notación se debe a Joseph Fourier (1768-1830).

que se lee "la integral desde a hasta b de $y\,dx$". La operación se llama *integración entre límites;* a es el límite *inferior*, b el límite *superior*. *

Puesto que (4) tiene siempre un valor *definido*, o puesto que los límites a y b *definen* un valor determinado, se llama *integral definida*. En efecto, si

$$\int \phi(x)dx = f(x) + C,$$

entonces

$$\int_a^b \phi(x)dx = \Big[f(x) + C \Big]_a^b = [\, f(b) + C\,] - [\, f(a) + C\,],$$

o sea,

$$\int_a^b \phi(x)dx = f(b) - f(a),$$

desapareciendo la *constante de integración*.

Por consiguiente, *podemos definir el símbolo*

$$\int_a^b \phi(x)dx \quad \text{o} \quad \int_a^b y\,dx$$

como la medida numérica del área limitada por la curva $y = \phi(x)$, ** *el eje de las* x *y las ordenadas de la curva en* $x = a$ *y* $x = b$. *Esta definición presupone que esas líneas limiten un área; es decir que la curva no tome valores infinitos y no atraviese el eje de las* x, *y que* a *y* b *sean ambos finitos*.

143. Cálculo de una integral definida. El procedimiento puede resumirse como sigue:

PRIMER PASO. *Integrar la expresión diferencial dada*.

SEGUNDO PASO. *Reemplazar la variable en esta integral indefinida en primer lugar por el límite superior, después por el inferior, y restar el segundo resultado del primero*.

No es necesario tener en cuenta la constante de integración, puesto que siempre desaparece en la sustracción.

---

* La palabra "límite" usada en este caso no representa más que el valor de la variable en un extremo de su intervalo de variación (valor extremo), y no debe confundirse con el significado de la misma palabra en la teoría de los límites. Algunos autores, para evitar confusiones, prefieren emplear las palabras "extremo inferior" y "extremo superior".

** $\phi(x)$ es continua y uniforme en todo el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 1. Hallar $\int_1^4 x^2\,dx$.

Solución. $\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21.$

EJEMPLO 2. Hallar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \left[-(-1)\right] - \left[-1\right] = 2.$

EJEMPLO 3. Demostrar que $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4\,a}$.

Solución. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4\,a}.$

EJEMPLO 4. Demostrar que $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4\,x^2-9} = -\frac{1}{12}\ln 5 = 0{,}134.$

Solución. Comparando con (19) o (19 a) del Artículo 128,

$$v = 2\,x, \quad a = 3, \quad dv = 2\,dx.$$

Para decidir si se debe emplear (19) o (19 a), consideremos los límites. Los valores de x aumentan desde -1 hasta 0.

Por tanto, $v\ (=2\,x)$ aumenta desde -2 hasta 0.

Luego $v^2 \leq 4$. Pero $a^2 = 9$. Por consiguiente, $v^2 < a^2$, y tenemos que emplear (19 a). Así,

$$(1)\qquad \int_{-1}^0 \frac{dx}{4\,x^2-9} = -\int_{-1}^0 \frac{dx}{9-4\,x^2} = -\frac{1}{12}\left[\ln\frac{3+2\,x}{3-2\,x}\right]_{-1}^0. \quad \text{Por (19 } a)$$

Determinando los valores en (1), obtenemos la solución. El resultado es negativo porque la curva y las ordenadas que limitan el área están debajo del eje de las x.

144. Cambio de límites correspondiente a un cambio de la variable. Cuando se integra por sustitución de una variable, a veces es algo engorroso retransformar el resultado en función de la variable primitiva. Sin embargo, cuando integramos entre límites podemos evitar el procedimiento de reponer la variable primitiva, cambiando los límites de manera de hacerlos corresponder a la nueva variable. Ilustraremos este procedimiento con un ejemplo.

EJEMPLO. Calcular $\int_0^{16} \frac{x^{\frac{3}{4}}\,dx}{1+x^{\frac{1}{2}}}$.

Solución. Supóngase que $x = z^4$.

Entonces $dx = 4\,z^3\,dz$, $x^{\frac{1}{2}} = z^2$, $x^{\frac{1}{4}} = z$. Además, para cambiar los límites observamos que cuando

$$x = 0, \quad z = 0,$$

y cuando $\qquad x = 16, \quad z = 2.$

Por tanto,

$$\int_0^{16} \frac{x^{\frac{1}{4}}\,dx}{1+x^{\frac{1}{2}}} = \int_0^2 \frac{z \cdot 4\,z^3\,dz}{1+z^2} = 4\int_0^2 \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2}\right) dz$$

$$= 4\int_0^2 z^2\,dz - 4\int_0^2 dz + 4\int_0^2 \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= \left[\frac{4\,z^3}{3} - 4\,z + 4 \operatorname{arc\,tg} z\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} + 4 \operatorname{arc\,tg} 2.$$

La relación entre la variable primitiva y la nueva debe ser tal que para cada valor de la una, dentro de los límites de la integración, haya siempre un valor finito de la otra y sólo uno. Cuando la una se da como una función multiforme de la otra, debe tenerse cuidado de elegir los valores que convienen.

PROBLEMAS

1. Demostrar que $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

Verificar las siguientes integraciones:

2. $\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx = \frac{a^4}{4}.$

3. $\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2\,x}} = \sqrt{3} - 1.$

5. $\int_2^3 \frac{2\,t\,dt}{1+t^2} = \ln 2.$

6. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x+1} = \frac{8}{3} - \ln 3.$

7. $\int_0^r \frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}.$

8. $\int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\,dx = \frac{a^2}{6}.$

9. $\int_0^4 \frac{x^2\,dx}{x+1} = 5{,}6094.$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{3x}} = 0{,}3167.$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\,d\phi = 1.$

12. $\int_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta = 4.$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}.$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta\,d\theta = \frac{4}{3}.$

Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales definidas:

15. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{9-2\,x}}.$

16. $\int_0^3 \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+16}}.$

17. $\int_0^2 \frac{y\,dy}{\sqrt{25-4\,y^2}}.$

18. $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

19. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$.

20. $\int_0^1 xe^{-x^2}\, dx$.

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$.

22. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta$.

23. $\int_{-1}^2 \frac{x^2\, dx}{x+2}$.

24. $\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{x^2+1}$.

145. Cálculo de áreas. En el Artículo 142 se demostró que el área entre una curva, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$, viene dada por la fórmula

$$(B) \qquad \text{Area} = \int_a^b y\, dx,$$

sustituyéndose el valor de y en términos de x obtenido de la ecuación de la curva dada.

EJEMPLO 1. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = 2$ y $x = 4$ (fig. 108).

Solución. Sustituyendo en la fórmula, resulta

$$\text{Area } ABDC = \int_2^4 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3} = 18\tfrac{2}{3}.$$

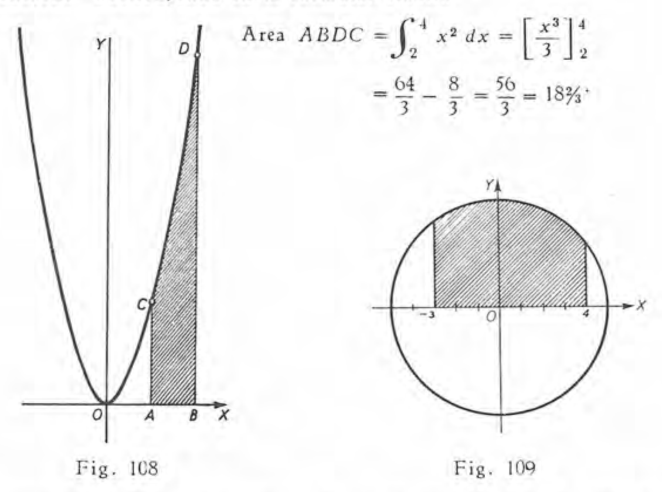


Fig. 108

Fig. 109

EJEMPLO 2. Hallar el área limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 25$, el eje de las x y las ordenadas $x = -3$, $x = 4$ (fig. 109).

Solución. Despejando y, tendremos: $y = \sqrt{25 - x^2}$. Por tanto,

$$\text{Area} = \int_{-3}^4 \sqrt{25 - x^2}\, dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{5}\right]_{-3}^4 \quad \text{por (22)}$$

$$= 6 + \frac{25}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{4}{5} + 6 - \frac{25}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{3}{5}\right) = 31{,}6.$$

La solución debe compararse con el área del semicírculo, que es

$$\frac{1}{2}(25\pi) = 39{,}3.$$

EJEMPLO 3. *Area bajo una parábola de eje paralelo al eje de las* y. En la figura 110, el punto P', del arco parabólico PP'' está elegido de manera que $AO = OB$. Las ordenadas de P, P', P'' son respectivamente y, y', y''. Demostrar que el área entre la parábola, el eje de las x y las ordenadas de P y P'' es igual a $\frac{1}{3}h(y + 4y' + y'')$ si $2h$ es la distancia entre las ordenadas de P y P''.

Solución. Tomemos para eje de las y la ordenada de P' como en la figura. Entonces, $AB = 2h$. La ecuación de una parábola de eje paralelo al eje de las y es, según (7) del Artículo 3, $(x - h)^2 = 2p(y - k)$. Si de esta ecuación despejamos el valor de y, se obtiene una ecuación de la forma

$$(1) \qquad y = ax^2 + 2bx + c.$$

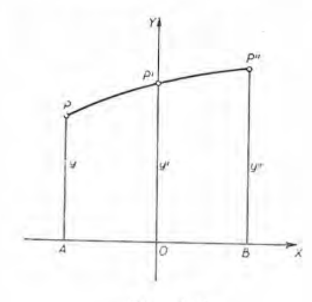


Fig. 110

El área $APP''B$ $(= u)$ que se pide es, según (B)

$$(2) \qquad u = \int_{-h}^{h} (ax^2 + 2bx + c)\,dx = \tfrac{2}{3}ah^3 + 2ch.$$

Según (1), si $x = -h$, $y = AP = ah^2 - 2bh + c$;

si $x = 0$, $y' = OP' = c$;

si $x = h$, $y'' = BP'' = ah^2 + 2bh + c$.

Por tanto, $\frac{1}{3}h(y + 4y' + y'') = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch = u$, c. s. q. d.

146. Cálculo del área cuando las ecuaciones de la curva se dan en forma paramétrica. * Sean las ecuaciones de la curva en la forma paramétrica

$$x = f(t), \quad y = \phi(t).$$

* El lector puede ver en tratados de Cálculo más avanzados, la demostración rigurosa de esta sustitución.

Entonces tenemos $y = \phi(t)$ y $dx = f'(t)dt$. Por tanto,

$$\text{(1)} \qquad \text{Area} = \int_a^b y\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\,f'(t)dt,$$

en donde $t = t_1$ cuando $x = a$ y $t = t_2$ cuando $x = b$.

EJEMPLO. Hallar el área de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas (Artículo 81) son

$$x = a \cos \phi, \quad y = b \text{ sen } \phi.$$

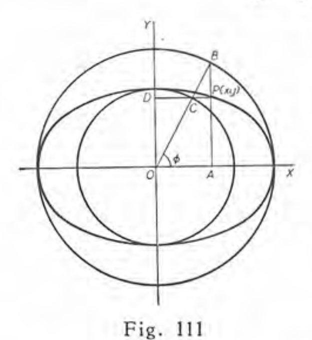


Fig. 111

Solución. Aquí

$$y = b \text{ sen } \phi,$$

y

$$dx = -\,a \text{ sen } \phi\; d\phi.$$

Cuando $x = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$;
y cuando $x = a$, $\phi = 0$.

Sustituyendo estos valores en (1), obtenemos

$$\frac{\text{Area}}{4} = \int_0^a y\,dx$$
$$= -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} ab \text{ sen}^2 \phi\; d\phi = \frac{\pi ab}{4}.$$

Luego el área total es igual a πab.

PROBLEMAS

1. Calcular por integración el área del triángulo limitado por la recta $y = 2x$, el eje de las x y la ordenada $x = 4$. Verificar el resultado, obteniendo el área como la mitad del producto de la base por la altura.

2. Hallar por integración el área del trapecio limitado por la recta $x + y = 10$, el eje de las x y las ordenadas $x = 1$ y $x = 8$. Verificar el resultado, obteniendo el área como la semisuma de las bases por la altura.

Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las x y las ordenadas dadas.

3. $y = x^3$; $x = 0$, $x = 4$. *Sol.* 64.

4. $y = 9 - x^2$; $x = 0$, $x = 3$. 18.

5. $y = x^3 + 3x^2 + 2x$; $x = -3$, $x = 3$. 54.

6. $y = x^2 + x + 1$; $x = 2$, $x = 3$. $9\frac{5}{6}$.

7. $xy = k^2$; $x = a$, $x = b$. $k^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

8. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$; $x = 1$, $x = 4$. $15\frac{3}{4}$.

9. $y = \dfrac{10}{\sqrt{x+4}}$; $x = 0$, $x = 5$. *Sol.* 20.

10. $ay = x\sqrt{a^2 - x^2}$; $x = 0$, $x = a$. $\frac{1}{3}a^2$.

11. $y^2 + 4x = 0$; $x = -1$, $x = 0$.

12. $y^2 = 4x + 16$; $x = -2$, $x = 0$.

13. $y = x^2 + 4x$; $x = -4$, $x = -2$.

14. $y = 4x - x^2$; $x = 1$, $x = 3$.

15. $y^2 = 9 - x$; $x = 0$, $x = 8$.

16. $2y^2 = x^3$; $x = 0$, $x = 2$.

Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las y y las rectas dadas.

17. $y^2 = 4x$; $y = 0$, $y = 4$. *Sol.* $5\frac{1}{3}$.

18. $y = 4 - x^2$; $y = 0$, $y = 3$. $4\frac{2}{3}$.

19. $x = 9y - y^3$; $y = 0$, $y = 3$.

20. $xy = 8$; $y = 1$, $y = 4$.

21. $y^3 = a^2x$; $y = 0$, $y = a$.

22. $ay^2 = x^3$; $y = 0$, $y = a$.

Bosquejar cada una de las siguientes curvas y hallar el área de una arcada.

23. $y = 2\cos x$. *Sol.* 4.

24. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi x$. $\dfrac{8}{\pi}$.

25. $y = \cos 2x$. 1.

26. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$. 4.

27. Hallar el área limitada por los ejes coordenados y la parábola

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

28. Demostrar que el area de un segmento cualquiera de parábola obtenido cortando la curva por una cuerda perpendicular al eje, es dos tercios del rectángulo circunscrito.

29. P y Q son dos puntos cualesquiera de la misma rama de una hipérbola equilatera $xy = k$. Demostrar que el area de la superficie limitada por el arco PQ, las ordenadas de P y Q y el eje de las x, es igual al area limitada por PQ, las abscisas de P y Q y el eje de las y.

30. Hallar el área de la superficie limitada por la catenaria

$$y = \tfrac{1}{2}\, a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

el eje de las x y las rectas $x = a$ y $x = -a$. *Sol.* $a^2\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$.

31. Hallar el área de la superficie comprendida entre las dos parábolas

$$y^2 = 2\,px \;\text{ y }\; x^2 = 2\,py.$$

Sol. $\frac{4}{3}\,p^2$.

32. Hallar el área de la superficie comprendida entre las dos parábolas

$$y^2 = ax \;\text{ y }\; x^2 = by.$$

Sol. $\frac{1}{3}\,ab$.

33. Hallar el área de la superficie encerrada por el lazo de la curva cuya ecuación es $4\,y^2 = x^2\,(4 - x)$,

Sol. $\frac{128}{15}$.

34. Hallar el área de la superficie limitada por la curva cuya ecuación es $y^2 = x^2\,(x^2 - 1)$ y por la recta $x = 2$. *Sol.* $2\sqrt{3}$.

35. Hallar el area de la superficie encerrada por el lazo de la curva cuya ecuación es $y^2 = x^2\,(9 - x)$.

Sol. $\frac{648}{5}$.

36. Hallar el área de la superficie limitada por la curva cuya ecuación es $y^2 = x^3 - x^2$ y la recta $x = 2$.

Sol. $\frac{32}{15}$.

37. Hallar el área de la superficie encerrada por el lazo de la curva cuya ecuación es $y^2 = x\,(x - 2)^2$.

Sol. $\frac{32}{15}\sqrt{2}$.

38. Hallar el área de la superficie encerrada por el lazo de la curva cuya ecuación es $4\,y^2 = x^4\,(4 - x)$.

Sol. $\frac{2\,048}{105}$.

39. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ y la recta $x = 2\,a$.

Sol. $a^2[\,2\sqrt{3} - \ln\,(2 + \sqrt{3})\,]$.

40. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $x^2 - 4\,y^2 = 4$ y la recta $x = 6$.

41. Hallar el área de la superficie limitada por una arcada de la cicloide $x = a\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a\,(1 - \cos\theta)$ y el eje de las x. *Sol.* $3\,\pi a^2$.

42. Hallar el área de la cardioide

$$x = a\,(2\,\cos t - \cos 2\,t),$$

$$y = a\,(2\,\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2\,t).$$

Sol. $6\,\pi a^2$.

43. El lugar geométrico representado en la figura 112 se llama "la compañera de la cicloide". Sus ecuaciones son

$$x = a\theta, \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

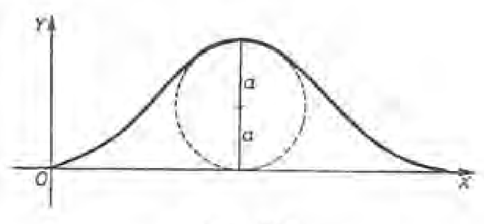


Fig. 112

Hallar el área de una arcada. *Sol.* $2\pi a^2$.

44. Hallar el área de la hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$, siendo θ el parámetro.

Sol. $\frac{3\pi a^2}{8}$; es decir, $\frac{3}{8}$ del área del círculo circunscrito.

147. Representación geométrica de una integral. En lo anterior la integral definida ha aparecido como área. Esto no significa necesariamente que toda integral definida sea un área, porque la interpretación física del resultado depende de la naturaleza de las magnitudes que representen la abscisa y la ordenada. Así, si x y y se consideran como coordenadas de un punto fijo, entonces la integral en (B) del Artículo 145 es realmente un área. Pero supóngase que la ordenada represente la velocidad de un punto móvil, y que la abscisa correspondiente represente el tiempo cuando el punto tiene esa velocidad; entonces la gráfica es la curva de la velocidad del movimiento, y el área bajo ella entre dos ordenadas representa la distancia recorrida en el intervalo de tiempo correspondiente. Es decir, el *número* que representa el área es igual al número que representa la distancia (o el valor de la integral). Asimismo una integral definida que significa volumen, superficie, masa, fuerza, etc., puede ser representada geométricamente por un área.

148. Integración aproximada. Fórmula de los trapecios. Ahora demostraremos dos reglas para determinar *aproximadamente* el valor de

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Estas reglas son útiles cuando la integración en (1) es difícil o no se puede efectuar en términos de funciones elementales.

El valor numérico *exacto* de (1) es la medida del área de la superficie limitada por la curva

$$(2) \qquad y = f(x),$$

el eje de las x y las ordenadas $x = a$, $x = b$. El valor de esa área puede determinarse, aproximadamente, sumando trapecios, como sigue:

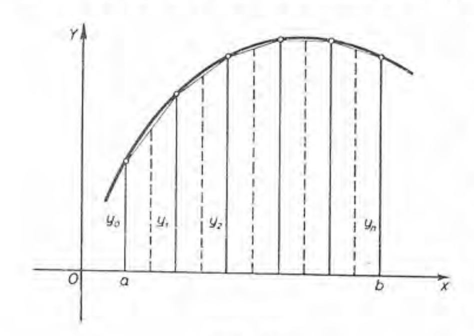


Fig. 113

Divídase el segmento $b - a$ de OX (fig. 113) en n partes iguales; sea Δx la longitud de una parte. Sean las abscisas sucesivas de los puntos de división

$$x_0 (= a), \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots\ldots \quad x_n (= b).$$

Levántense en estos puntos las ordenadas correspondientes de la curva (2). Sean éstas

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n).$$

Unanse las extremidades de las ordenadas consecutivas por líneas rectas (cuerdas); de esta manera se formarán trapecios. Entonces, como que el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}(y_0 + y_1)\Delta x = \text{área del primer trapecio},$$

$$\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\Delta x = \text{área del segundo trapecio},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\tfrac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)\Delta x = \text{área del enésimo trapecio}.$$

Sumando, obtenemos la **fórmula de los trapecios,**

$$(T) \qquad \text{Area} = \left(\frac{1}{2}\, y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}\, y_n\right) \Delta x.$$

Es evidente que cuanto mayor sea el número de intervalos (es decir, cuanto más pequeño sea Δx), tanto más se acercará la suma de las áreas de los trapecios al área bajo la curva.

EJEMPLO 1. Calcular $\int_1^{12} x^2\,dx$ por la fórmula de los trapecios, dividiendo de $x = 1$ a $x = 12$ en once intervalos.

Solución. Aquí $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{12-1}{11} = 1$. El área de que se trata está bajo la curva $y = x^2$. Sustituyendo en esta ecuación las abscisas

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 12,$$

obtenemos las ordenadas $y = 1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ 144.$ Luego, según (T),

$$\text{Area} = (\tfrac{1}{2} + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \tfrac{1}{2}\cdot 144)\cdot 1 = 577\tfrac{1}{2}.$$

Por integración,

$$\int_1^{12} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{12} = 575\tfrac{2}{3}.$$

Luego, en este ejemplo el error de la fórmula de los trapecios es menor que una parte entre trescientos.

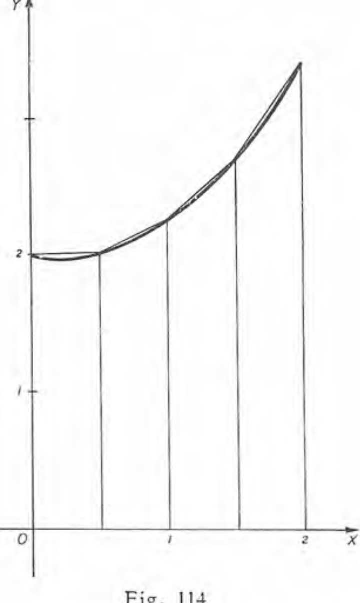


Fig. 114

EJEMPLO 2. Hallar el valor aproximado de

$$I = \int_0^2 \sqrt{4 + x^3}\,dx$$

según (T), tomando $n = 4$.

Solución. Sea $y = \sqrt{4 + x^3}$.

En este caso, $\Delta x = 0{,}5$.

Hágase una tabla de valores de x y y como la que se muestra.

x	y
0	$2{,}000 = y_0$
0,5	$2{,}031 = y_1$
1	$2{,}236 = y_2$
1,5	$2{,}716 = y_3$
2	$3{,}464 = y_4$

Aplicando (T),

$$I = (1{,}000 + 2{,}031 + 2{,}236 + 2{,}716 + 1{,}732) \times 0{,}5 = 4{,}858.$$

Si tomamos $n = 10$, obtenemos $I = 4{,}826$, mejor aproximación.

PROBLEMAS

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales por la fórmula de los trapecios, empleando los valores indicados de n. Verificar los resultados efectuando las integraciones.

1. $\int_3^{10} \frac{dx}{x}$; $n = 7$.

2. $\int_0^5 x\sqrt{25 - x^2}\,dx$; $n = 10$.

3. $\int_4^8 \sqrt{64 - x^2}\,dx$; $n = 8$.

4. $\int_0^3 \sqrt{16 + x^2}\,dx$; $n = 6$.

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales por la fórmula de los trapecios, empleando los valores indicados de n.

5. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^3}}$; $n = 4$. *Sol.* 1,227.

6. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$; $n = 4$. 3,283.

7. $\int_0^{10} \sqrt[3]{125-x^2}\,dx$; $n = 5$. 44,17.

8. $\int_1^5 \sqrt{126-x^3}\,dx$; $n = 4$. 34,78.

9. $\int_2^8 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{4+x^2}}$; $n=6$. *Sol.* 9,47.

10. $\int_{-2}^3 \sqrt{20+x^4}\,dx$; $n = 5$.

11. $\int_0^2 x^2\sqrt{16-x^4}\,dx$; $n = 4$.

12. $\int_1^6 \sqrt[3]{x^2+3x}\,dx$; $n = 5$.

13. $\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{10+x^3}}$; $n = 6$.

14. $\int_2^4 \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{10+x^2}}$; $n = 4$.

149. Fórmula de Simpson (fórmula parabólica). En vez de unir las extremidades de las ordenadas sucesivas por cuerdas y formar trapecios, podemos obtener una mayor aproximación del área uniéndolas por arcos de parábolas y sumando las áreas bajo esos arcos. Una parábola con eje vertical puede hacerse pasar por tres puntos cualesquiera de una curva, y una serie de tales arcos se ajustará más estrechamente a la curva que la línea quebrada formada por las cuerdas. La ecuación de tal parábola es de la forma (1) dada en el ejemplo 3 del Artículo 145, y los valores de las constantes a, b y c pueden determinarse de manera que esta parábola pase por tres puntos dados. Pero esto no es necesario en la presente investigación.

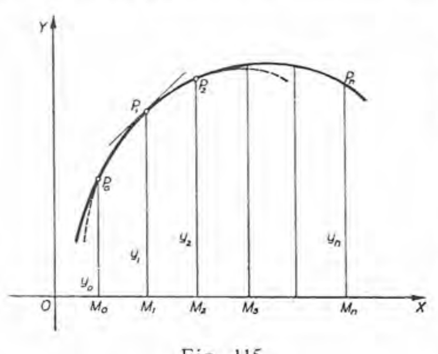


Fig. 115

Dividamos el intervalo desde $x = a = OM_0$ hasta $x = b = OM_n$ en un número *par* ($= n$) de partes, cada una igual a Δx. Por cada serie de tres puntos sucesivos P_0, P_1, P_2; P_2, P_3, P_4; etc., se trazan arcos de parábolas con ejes verticales. Las ordenadas de esos

puntos son y_0, y_1, y_2, ..., y_n, como se indica en la figura. Así, se reemplaza el área $M_0P_0P_2 \ldots P_nM_n$ por una serie de "tiras parabólicas dobles" como $M_0P_0P_1P_2M_2$, cuya extremidad superior es en cada caso un arco parabólico (1) del ejemplo 3 del Artículo 145. El área de cada una de esas tiras se obtiene empleando la fórmula

$$u = \tfrac{1}{3} h(y + 4\,y' + y'')$$

de ese ejemplo.

Para la primera, $h = \Delta x$, $y = y_0$, $y' = y_1$, $y'' = y_2$. Luego

$$\text{área de la primera tira } M_0P_0P_1P_2M_2 = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4\,y_1 + y_2).$$

Análogamente,

$$\text{segunda tira} = \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4\,y_3 + y_4),$$

$$\text{tercera tira} = \frac{\Delta x}{3}(y_4 + 4\,y_5 + y_6),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{última tira} = \frac{\Delta x}{3}(y_{n-2} + 4\,y_{n-1} + y_n).$$

Sumando, obtenemos la **fórmula de Simpson** (siendo n par),

$$(S) \quad \text{Area} = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4\,y_1 + 2\,y_2 + 4\,y_3 + 2\,y_4 + \ldots + y_n).$$

Como en el caso de la fórmula de los trapecios, cuanto mayor sea el número de partes en que se divide M_0M_n, tanto más se acercará el resultado al área bajo la curva.

EJEMPLO 1. Calcular $\int_0^{10} x^3\,dx$ por la fórmula de Simpson, tomando diez intervalos.

Solución. Aquí $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-0}{10} = 1$. El área en cuestión es bajo la curva $y = x^3$. Sustituyendo las abscisas $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$ en $y = x^3$, obtenemos las ordenadas $y = 0, 1, 8, 27, \ldots, 1\,000$. Luego, según (S),

$$\text{Area} = \tfrac{1}{3}(0 + 4 + 16 + 108 + 128 + 500 + 432$$
$$+ 1\,372 + 1\,024 + 2\,916 + 1\,000) = 2\,500.$$

Por integración, $\int_0^{10} x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 2\,500$, de manera que en este ejemplo la fórmula de Simpson da un resultado exacto.

EJEMPLO 2. Hallar el valor aproximado de

$$I = \int_0^2 \sqrt{4 + x^3}\, dx$$

según (S), tomando $n = 4$.

Solución. La tabla de valores se da en el ejemplo ilustrativo 2 del Artículo 148. Por tanto,

$$I = (2{,}000 + 8{,}124 + 4{,}472 + 10{,}864 + 3{,}464) \times \frac{0{,}5}{3} = 4{,}821.$$

Compárese el resultado dado por (T) cuando $n = 10$; a saber, 4,826.

En este caso la fórmula (S) da mejor aproximación que (T) cuando $n = 4$.

PROBLEMAS

Calcular, por la fórmula de Simpson, los valores aproximados de las siguientes integrales, empleando los valores de n indicados. Verificar los resultados efectuando las integraciones.

1. $\int_3^6 \frac{x\, dx}{4 + x^2}$; $n = 6$.

2. $\int_0^4 x\sqrt{25 - x^2}\, dx$; $n = 4$.

3. $\int_2^8 \sqrt{64 - x^2}\, dx$; $n = 6$.

4. $\int_1^7 \sqrt{16 + x^2}\, dx$; $n = 6$.

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales según la fórmula de Simpson, empleando los valores de n indicados.

5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 + x^3}}$; $n = 4$. *Sol.* 1,236.

6. $\int_0^2 \sqrt{1 + x^3}\, dx$; $n = 4$. 3,239.

7. $\int_1^5 \sqrt{126 - x^3}\, dx$; $n = 4$. 35,68.

8. $\int_2^8 \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{4 + x^2}}$; $n = 6$. 9,49.

9. $\int_1^5 \sqrt[3]{6 + x^2}\, dx$; $n = 4$.

10. $\int_2^5 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 + x^3}}$; $n = 6$.

11. $\int_1^5 \sqrt[3]{x^3 - x}\, dx$; $n = 4$.

12. $\int_2^4 \frac{x\, dx}{\sqrt{5 + x^3}}$; $n = 4$.

Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales según ambas fórmulas, la de los trapecios y la de Simpson. Si se puede hallar la integral indefinida, calcular también el valor exacto de la integral.

13. $\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\, dx; \quad n = 4.$

14. $\int_2^4 x\sqrt{16 - x^2}\, dx; \quad n = 4.$

15. $\int_3^7 \frac{x\, dx}{\sqrt{64 - x^2}}; \quad n = 4.$

16. $\int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{64 - x^2}}; \quad n = 4.$

17. $\int_2^8 \frac{x\, dx}{\sqrt{3 + x^3}}; \quad n = 6.$

18. $\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx; \quad n = 4.$

19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{10\, d\theta}{\sqrt{2 + \operatorname{sen}^2 \theta}}; \quad n = 6.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - \cos^2 \theta}\, d\theta; \quad n = 6.$

21. $\int_0^2 \frac{10\, d\theta}{\sqrt{1 + \cos^2 \frac{1}{4}\pi\theta}}; \quad n = 4.$

22. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4 - 3 \operatorname{sen}^2 \pi\theta}\, d\theta; \quad n = 8.$

150. Intercambio de límites. Puesto que

$$\int_a^b \phi(x)dx = f(b) - f(a),$$

y

$$\int_b^a \phi(x)dx = f(a) - f(b) = -[f(b) - f(a)],$$

tenemos

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = -\int_b^a \phi(x)\, dx.$$

Teorema. *Intercambiar los límites de una integral definida es equivalente a cambiar el signo de la integral.*

151. Descomposición del intervalo de integración en una integral definida. Puesto que

$$\int_a^{x_1} \phi(x)dx = f(x_1) - f(a), \qquad (a < x_1 < b)$$

y

$$\int_{x_1}^b \phi(x)dx = f(b) - f(x_1),$$

obtenemos, por adición,

$$\int_a^{x_1} \phi(x)dx + \int_{x_1}^b \phi(x)dx = f(b) - f(a).$$

Pero,

$$\int_a^b \phi(x)dx = f(b) - f(a);$$

por tanto, comparando las últimas dos expresiones, obtenemos

$$(C) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \int_a^{x_1} \phi(x)\,dx + \int_{x_1}^b \phi(x)\,dx.$$

Interpretando este teorema geométricamente como en el Artículo 142, vemos que la integral del primer miembro representa el área entera $CEFD$ (fig. 116), la primera integral del segundo miembro el área $CMPD$ y la segunda integral el área $MEFP$. Luego el teorema es obvio.

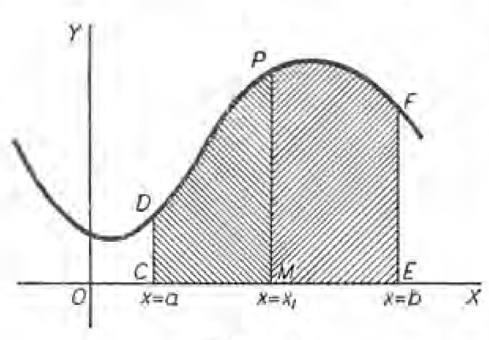


Fig. 116

Evidentemente, de esta manera, la integral definida puede descomponerse en un número cualquiera de integrales definidas separadas.

152. La integral definida es una función de sus límites. En efecto, de

$$\int_a^b \phi(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

vemos que la integral definida es función de sus límites. Así, $\int_a^b \phi(z)\,dz$ tiene exactamente el mismo valor que $\int_a^b \phi(x)\,dx$.

Teorema. *Una integral definida es función de sus límites.*

153. Integrales impropias. Limites infinitos. Hasta aquí se ha supuesto que los límites de la integral son finitos. Sin embargo, aun en el trabajo elemental, a veces conviene quitar esta restricción y considerar integrales con límites infinitos. En ciertos casos esto puede hacerse sirviéndonos de las siguientes *definiciones*.

Cuando el límite superior es infinito,

$$\int_a^{+\infty} \phi(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b \phi(x)dx,$$

y cuando el límite inferior es infinito,

$$\int_{-\infty}^b \phi(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b \phi(x)dx,$$

con tal que existan los límites.

EJEMPLO 1. Hallar $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Solución. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1 \right] = 1.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int_0^{+\infty} \frac{8\,a^3\,dx}{x^2 + 4\,a^2}$.

Solución. $\int_0^{+\infty} \frac{8\,a^3\,dx}{x^2 + 4\,a^2} = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{8\,a^3\,dx}{x^2 + 4\,a^2} = \lim_{b \to +\infty} \left[4\,a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2\,a} \right]_0^b$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[4\,a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2\,a} \right] = 4\,a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\,\pi a^2.$$

Interpretemos este resultado geométricamente. La gráfica de nuestra función es la curva llamada la bruja, o curva de Agnesi (fig. 117), dada por la ecuación

$$y = \frac{8\,a^3}{x^2 + 4\,a^2}.$$

$$\text{Area } OPQb = \int_0^b \frac{8\,a^3\,dx}{x^2 + 4\,a^2} = 4\,a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{2\,a}.$$

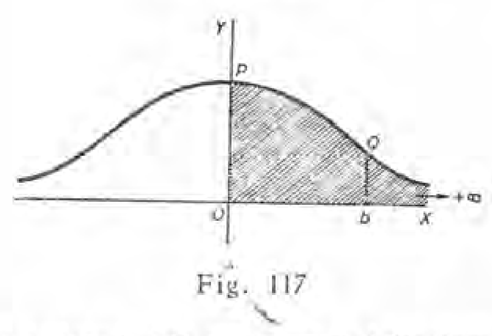


Fig. 117

Luego, cuando la ordenada bQ se mueve indefinidamente hacia la derecha, el área $OPQb$ tiende hacia un límite finito $2\,\pi a^2$.

EJEMPLO 3. Hallar $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Solución. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} (\ln b)$.

No existe el límite de $\ln b$ cuando b aumenta sin límite; por tanto, la integral no tiene significado en este caso.

154. Integrales impropias. Cuando $y = \phi(x)$ es discontinua. Consideremos ahora casos donde la función para integrar es discontinua para valores aislados de la variable dentro de los límites de integración.

Consideremos, en primer lugar, el caso en que la función para integrar es continua para todos los valores de x entre los límites a y b, con excepción de $x = a$.

Si $a < b$ y ε es positivo, empleamos la siguiente *definición:*

$$(1) \qquad \int_a^b \phi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b \phi(x)dx,$$

e igualmente, cuando $\phi(x)$ es continua salvo en $x = b$, *definimos*

$$(2) \qquad \int_a^b \phi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \phi(x)dx,$$

con tal que existan los límites.

EJEMPLO 1. Calcular $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Solución. Aquí $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ se vuelve infinita para $x = a$. Luego, según (2),

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\text{arc sen } \frac{x}{a} \right]_0^{a-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\text{arc sen} \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} \right) \right] = \text{arc sen } 1 = \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 2. Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución. Aquí $\frac{1}{x^2}$ se vuelve infinita para $x = 0$. Luego, según (1),

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right).$$

En este caso no hay límite y, por esto, la integral no existe.

Si c está entre a y b y $\phi(x)$ es continua salvo en $x = c$, entonces, siendo ε y ε' números positivos, la integral entre a y b *se define* por

$$(3) \qquad \int_a^b \phi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} \phi(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{c+\varepsilon'}^b \phi(x)\,dx,$$

con tal que exista cada uno de los límites.

EJEMPLO 3. Calcular $\int_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2 - a^2)^{2/3}}$.

Solución. Aquí la función por integrar se hace discontinua para $x = a$; es decir, para un valor de x entre los límites de integración 0 y $3a$. Luego debe emplearse la definición (3).

Así, $$\int_0^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[3(x^2-a^2)^{1/3}\Big]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\Big[3(x^2-a^2)^{1/3}\Big]_{a+\varepsilon'}^{3a}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\,[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2}+3a^{2/3}] + \lim_{\varepsilon'\to 0}\,[3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2}\,]$$

$$= 3a^{2/3} + 6a^{2/3} = 9a^{2/3}.$$

Para interpretar geométricamente este resultado, tracemos la gráfica (figura 118), es decir, el lugar geométrico, representado por la ecuación

$$y = \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}}$$

y notemos que $x = a$ es una asíntota.

$$\text{Area } OPE = \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}} = 3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2} + 3a^{2/3}.$$

Luego, cuando PE se mueve hacia la derecha acercándose a la asíntota (es decir, cuando ε tiende a cero), el área OPE tiende a $3a^{2/3}$ como límite. Asimismo,

$$\text{Area } E'QRG = \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x\,dx}{(x^2-a^2)^{2/3}} = 3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2-a^2}$$

tiende a $6a^{2/3}$ como límite cuando QE' se mueve hacia la izquierda acercándose a la asíntota (es decir, cuando ε' tiende a cero). Sumando estos resultados, obtenemos $9a^{2/3}$.

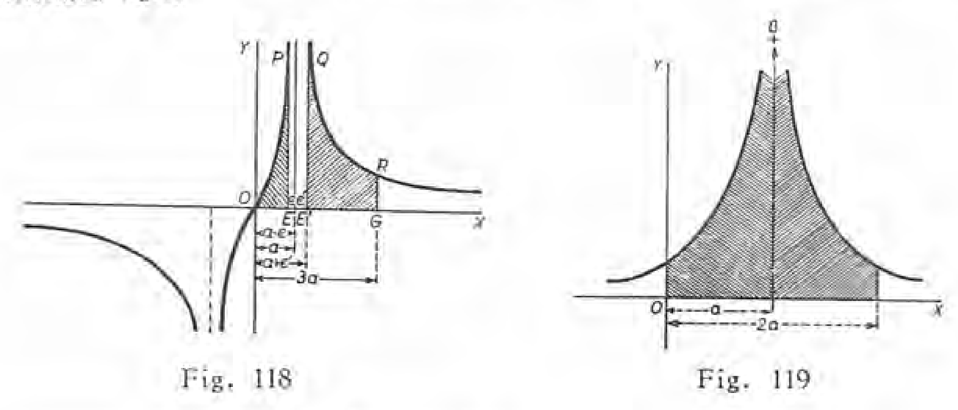


Fig. 118 Fig. 119

EJEMPLO 4. Calcular $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$.

Solución. También esta función se vuelve infinita entre los límites de la integración. Por tanto, según (3),

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{a+\varepsilon'}^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[-\frac{1}{x-a}\Big]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0}\Big[-\frac{1}{x-a}\Big]_{a+\varepsilon'}^{2a}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{a}\Big) + \lim_{\varepsilon'\to 0}\Big(-\frac{1}{a}+\frac{1}{\varepsilon'}\Big).$$

En este caso los límites no existen, y la integral no tiene significado.

Si trazamos la gráfica de esta función (fig. 119), parece que todo es casi como en el ejemplo anterior. Pero vemos que los limites no existen; en esto está la diferencia.

La importancia de observar si la función dada se vuelve infinita dentro de los límites de la integración, o no, aparecerá inmediatamente si aplicamos nuestra fórmula de integración sin hacer aquella investigación previa. Así,

$$\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \left[-\frac{1}{x-a}\right]_0^{2a} = -\frac{2}{a},$$

resultado que es absurdo en vista de la discusión anterior.

PROBLEMAS

Verificar cada una de las siguientes integraciones.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \frac{\pi}{4}.$

3. $\displaystyle\int_1^{5} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x}} = \frac{44}{3}.$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}.$

5. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}.$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}.$

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}.$

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^{3/2}} = \sqrt{2}.$

9. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{4}\pi a^2.$

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} = \pi.$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}.$

12. $\displaystyle\int_a^{2a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = 2{,}39\,a^2.$

CAPITULO XV

LA INTEGRACION COMO SUMA

155. Introducción. Hasta ahora hemos definido la integración como *la operación inversa de la derivación*. Pero en muchas aplicaciones del Cálculo integral es preferible definir la integración como un *procedimiento de suma*. De hecho, el Cálculo integral se inventó con el fin de calcular el área de las superficies limitadas por curvas, suponiéndose la superficie dada dividida en "un número infinito de partes infinitamente pequeñas que se llamaban *elementos*, siendo la suma de las áreas de todos estos elementos el área buscada". Históricamente, el signo integral no es otra cosa que la S larga, empleada por los primeros autores para indicar la palabra suma.

Esta nueva definición, que se desarrolla en el artículo siguiente, es de importancia fundamental, y es indispensable que el lector comprenda a fondo lo que se quiere decir, para que pueda aplicar el Cálculo integral a los problemas prácticos.

156. Teorema fundamental del Cálculo integral. Si $\phi(x)$ es la derivada de $f(x)$, se ha demostrado, en el Artículo 142, que el valor de la integral definida

$$(1) \qquad \int_a^b \phi(x)\, dx = f(b) - f(a)$$

da el área de la superficie limitada por la curva $y = \phi(x)$, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$.

Ahora bien, a propósito de esta área hagamos la siguiente construcción. Dividamos el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$ en un número n de partes iguales, tracemos las ordenadas en los puntos de división y completemos los rectángulos trazando líneas horizontales por las extremidades de las ordenadas, como se indica en la

figura 120. Es evidente que la suma de las áreas de estos n rectángulos (el área sombreada) es un valor aproximado del área que consideramos. Además es también evidente que el *límite* de la suma de las áreas de estos rectángulos, cuando se aumenta indefinidamente su número n, será *igual* al área bajo la curva.

Ahora efectuemos la siguiente construcción más general. Dividamos el intervalo en n partes, *que no serán necesariamente iguales*, y levantemos ordenadas en los puntos de división. Elijamos *de cualquier modo* un punto dentro de cada parte, levantemos ordenadas en estos puntos y tracemos por sus extremidades líneas horizontales de manera de formar rectángulos, como se indica en la figura 121. Entonces, como antes, la suma de las áreas de estos n rectángulos (el área sombreada) es igual, aproximadamente, al área bajo la curva; y *el límite de esta suma* cuando n tiende a infinito y cada parte tiende a cero es, precisamente, el área bajo la curva. De estas consideraciones vemos que la integral definida (1) puede mirarse como *el límite de una suma*. Ahora formulemos este resultado.

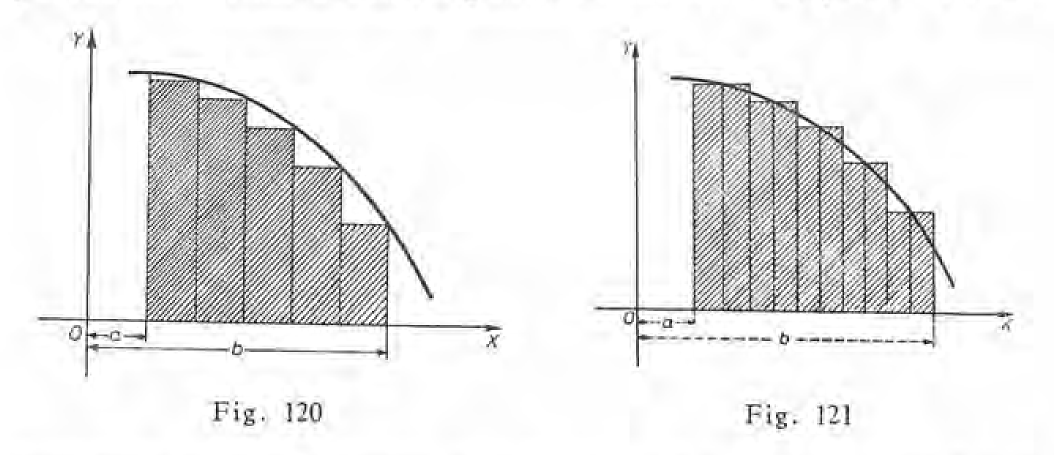


Fig. 120 Fig. 121

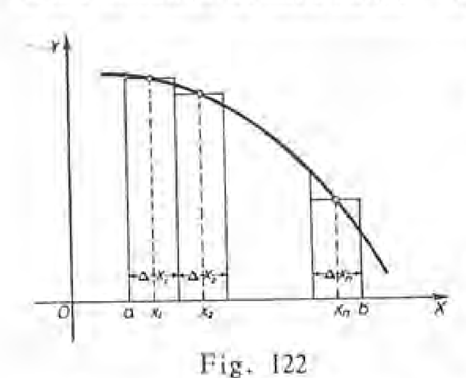


Fig. 122

a) Designemos las longitudes de las divisiones sucesivas por

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \ldots,\ \Delta x_n.$$

b) Designemos las abscisas de los puntos elegidos en cada una de las divisiones por

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n.$$

Entonces las ordenadas de la curva en esos puntos son

$$\phi(x_1),\ \phi(x_2),\ \phi(x_3),\ \ldots,\ \phi(x_n).$$

c) Las áreas de los rectángulos sucesivos son, evidentemente,

$$\phi(x_1)\Delta x_1,\quad \phi(x_2)\Delta x_2,\quad \phi(x_3)\Delta x_3,\quad \ldots,\quad \phi(x_n)\Delta x_n.$$

d) Por tanto, el área bajo la curva es igual a

$$\lim_{n\to\infty}[\phi(x_1)\Delta x_1+\phi(x_2)\Delta x_2+\phi(x_3)\Delta x_3+\ldots+\phi(x_n)\Delta x_n].$$

Pero según (1) el área bajo la curva $=\int_a^b \phi(x)dx.$

Luego,

$$(A)\qquad \int_a^b \phi(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}[\phi(x_1)\Delta x_1+\phi(x_2)\Delta x_2+\ldots+\phi(x_n)\Delta x_n].$$

Esta igualdad se ha deducido sirviéndonos de la noción de área. La intuición nos ha ayudado en establecer el resultado. Ahora consideremos la igualdad (*A*) *simplemente como un teorema de Análisis matemático*, que se puede formular como sigue:

Teorema fundamental del Cálculo integral. *Sea* $\phi(x)$ *una función continua en el intervalo desde* $x=a$ *hasta* $x=b$. *Divídase este intervalo en* n *subintervalos cuyas longitudes son* $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, *y elíjanse puntos, uno en cada subintervalo, que tengan las abscisas* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *respectivamente. Considérese la suma*

$$(2)\qquad \phi(x_1)\Delta x_1+\phi(x_2)\Delta x_2+\ldots+\phi(x_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Delta x_i.$$

Entonces, el valor límite de esta suma cuando n *tiende a infinito, y cada subintervalo tiende a cero, es igual al valor de la integral definida*

$$\int_a^b \phi(x)dx.$$

La igualdad (*A*) puede abreviarse como sigue:

$$(3)\qquad \int_a^b \phi(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)\Delta x_i.$$

La importancia de este teorema resulta del hecho que así *podemos calcular, por integración, una magnitud que sea el límite de una suma de la forma* (2).

Puede observarse que cada término de la suma (2) es una expresión *diferencial*, puesto que las longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ tienden a cero. Además, cada término se llama un *elemento* de la magnitud que se trata de calcular.

La siguiente regla será muy útil en la aplicación de este teorema a los problemas prácticos.

Regla para aplicar el teorema fundamental

Primer paso. *Se divide la magnitud buscada en partes semejantes de manera que sea claro que el resultado deseado se encuentra tomando el límite de una suma de esas partes.*

Segundo paso. *Para las magnitudes de estas partes se hallan expresiones tales que su suma sea de la forma* (2).

Tercer paso. *Elegidos los límites apropiados,* $x = a$ y $x = b$, *se aplica el teorema fundamental*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i = \int_a^b \phi(x)dx$$

y se integra.

157. Demostración analítica del teorema fundamental. Como en el Artículo 156, dividamos el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$ en cualquier número n de subintervalos, que no necesitan ser iguales, y representemos las abscisas de los puntos de división por

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1},$$

y las longitudes de los subintervalos por Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n. Hagamos ahora que x'_1, x'_2, ..., x'_n representen abscisas, una en cada intervalo, determinadas por el teorema del valor medio (Art. 116); levantemos las ordenadas en los extremos de estas abscisas y tracemos por los extremos de las ordenadas líneas horizontales para formar rectángulos, como se indica en la figura 123.

Fig. 123

Obsérvese que aquí $\phi(x)$ reemplaza a $f'(x)$. Aplicando **(B)** del Artículo 116 al primer intervalo ($a = a$, $b = b_1$ y x'_1 está entre a y b_1), tenemos

$$\frac{f(b_1) - f(a)}{b_1 - a} = \phi(x'_1),$$

o sea, puesto que $$b_1 - a = \Delta x_1,$$

$$f(b_1) - f(a) = \phi(x'_1)\Delta x_1.$$

Igualmente,

$$f(b_2) - f(b_1) = \phi(x'_2)\Delta x_2, \text{ para el segundo intervalo},$$
$$f(b_3) - f(b_2) = \phi(x'_3)\Delta x_3, \text{ para el tercer intervalo},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f(b) - f(b_{n-1}) = \phi(x'_n)\Delta x_n, \text{ para el enésimo intervalo}.$$

Sumando éstos, obtenemos

(1) $$f(b) - f(a) = \phi(x'_1)\Delta x_1 + \phi(x'_2)\Delta x_2 + \ldots + \phi(x'_n)\Delta x_n.$$

Pero $\phi(x'_1)\cdot\Delta x_1 =$ área del primer rectángulo,

$\phi(x'_2)\cdot\Delta x_2 =$ área del segundo rectángulo, etc.

Luego el segundo miembro de (1) es igual a la suma de las áreas de los rectángulos. Pero según (1) del Artículo 156 el primer miembro de (1) es igual al área entre la curva $y = \phi(x)$, el eje de las x y las ordenadas en $x = a$ y $x = b$. Entonces, la suma

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \phi(x'_i)\Delta x_i$$

es igual a esa área. Y si bien la suma correspondiente

(3) $$\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i$$ (en donde x_i es una abscisa *cualquiera* del subintervalo Δx_i)

(formada como en el Artículo 156) no da igualmente el área, sin embargo podemos demostrar que las dos sumas (2) y (3) tienden a ser iguales cuando n tiende a infinito y cada subintervalo tiende a cero. En efecto, la diferencia $\phi(x'_i) - \phi(x_i)$ no excede en valor numérico a la diferencia de las ordenadas más grande y más pequeña dentro de Δx_i. Y además siempre es posible * hacer que todas estas diferencias sean, en valor numérico, menores que un número positivo cualquiera ε dado de antemano, por pequeño que sea este número, si continuamos suficientemente el proceso de la subdivisión; es decir, si elegimos n suficientemente grande. Por tanto, para tal elección de n la diferencia de las sumas (2) y (3) es menor que $\varepsilon(b - a)$ en valor numérico; es decir, es menor que una cantidad positiva cualquiera dada de antemano, por pequeña que se la suponga. Por consiguiente, cuando

* La demostración puede verse en obras superiores de Cálculo infinitesimal.

n aumenta indefinidamente, las sumas (2) y (3) tienden hacia el mismo límite, y puesto que (2) es siempre igual al área, se sigue el resultado fundamental

$$\int_a^b \phi\ (x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \phi\ (x_i)\Delta x_i,$$

en donde el intervalo $[a, b]$ se subdivide de cualquier modo y x_i es una abscisa cualquiera del subintervalo correspondiente.

158. Areas de superficies limitadas por curvas planas; coordenadas rectangulares. Como ya se ha explicado, el área entre una curva, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$ viene dada por la fórmula

$$(B) \qquad \text{Area} = \int_a^b y\, dx,$$

sustituyéndose de la ecuación de la curva el valor de y en términos de x.

La fórmula (B) es fácil de recordar observando que el elemento de área es un rectángulo como CR (fig. 124) de base dx y altura y. El área buscada $ABQP$ es el límite de la suma de todos esos rectángulos (tiras) entre las ordenadas AP y BQ.

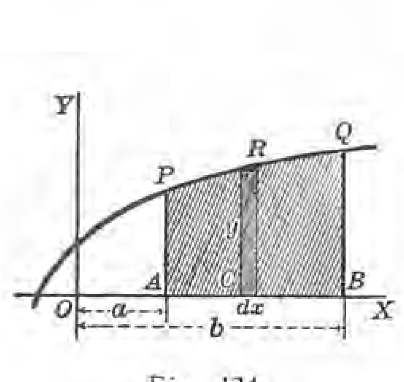


Fig. 124

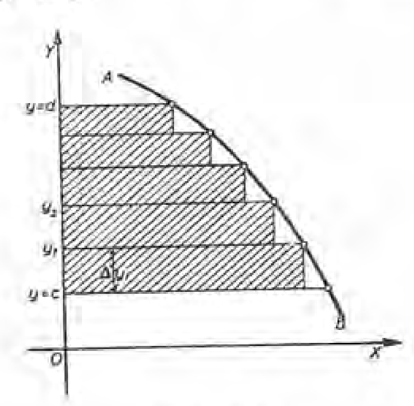


Fig. 125

Apliquemos ahora el teorema fundamental (Art. 156) al cálculo del área de la superficie limitada por la curva $x = \phi\ (y)$ (AB en la figura 125), el eje de las y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$.

PRIMER PASO. Construiremos los n rectángulos como en la figura. Evidentemente, el área que se busca es el límite de la suma de las áreas de estos rectángulos cuando su número tiende a infinito y la altura de cada uno tiende a cero.

Segundo paso. Representaremos las alturas por Δy_1, Δy_2, etc. Tomaremos en cada intervalo un punto en la extremidad superior y designaremos las ordenadas de estos puntos por y_1, y_2, etc. Entonces las bases son $\phi(y_1)$, $\phi(y_2)$, etc., y la suma de las áreas de los rectángulos es

$$\phi(y_1)\Delta y_1 + \phi(y_2)\Delta y_2 + \ldots + \phi(y_n)\Delta y_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\Delta y_i .$$

Tercer paso. Aplicando el teorema fundamental se obtiene

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)\Delta y_i = \int_c^d \phi(y)dy .$$

Luego el área entre una curva, el eje de las y y las líneas horizontales $y = c$ y $y = d$ viene dada por la fórmula

$$(C) \qquad \text{Area} = \int_c^d x\, dy,$$

sustituyéndose de la ecuación de la curva el valor de x en términos de y. La fórmula (C) se recuerda pensando en el límite de la suma de todas las tiras horizontales (rectángulos) dentro del área buscada, puesto que x y dy son la base y la altura, respectivamente, de una tira cualquiera. El elemento de área es uno de estos rectángulos.

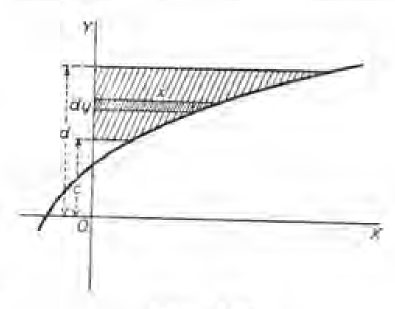


Fig. 126

Significado del signo negativo delante de una área. En la fórmula (B), a es menor que b. Puesto que ahora interpretamos el primer miembro como el límite de la suma de n términos que resultan de $y_i\Delta x_i$ haciendo $i=1, 2, \ldots, n$, se sigue que cuando y es *negativo* cada término de esa suma será negativo, y (B) dará el área con signo antepuesto. Esto significa que el área está debajo del eje de las x.

Ejemplo 1. Hallar el área de una arcada de la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ (figura 127).

Solución. Haciendo $y = 0$ y despejando el valor de x, encontramos

$$x = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad \text{etc.}$$

Sustituyendo en (B),

$$\text{Area } OAB = \int_a^b y\,dx = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2.$$

Además, $$\text{Area } BCD = \int_a^b y\,dx = \int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -2.$$

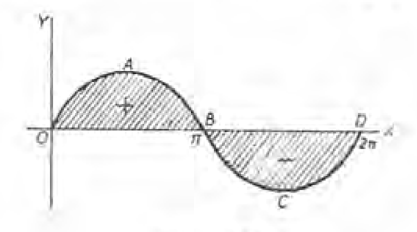


Fig. 127

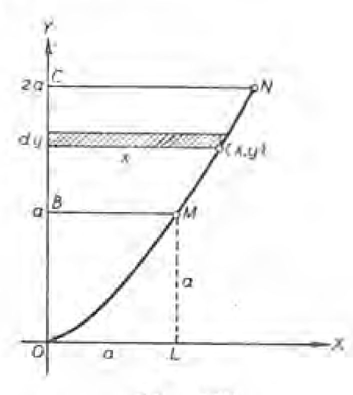


Fig. 128

EJEMPLO 2. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$, el eje de las y y las rectas $y = a$ y $y = 2a$.

Solución. Según (C) y la figura 128, el elemento de área es

$$x\,dy = a^{1/3}y^{2/3}\,dy,$$

sustituyendo de la ecuación de la curva MN el valor de x. De aquí,

$$\text{Area } BMNC = \int_a^{2a} a^{1/3}y^{2/3}\,dy = \frac{3}{5}\,a^2\left(\sqrt[3]{32} - 1\right) = 1.304\ a^2.$$

Obsérvese que a^2 = área $OLMB$.

En el área dada por (B), uno de los límites es el eje de las x. En (C), uno es el eje de las y. Consideremos ahora el área limitada por dos curvas.

EJEMPLO 3. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 2x$ y la recta $x - y = 4$ (fig. 129).

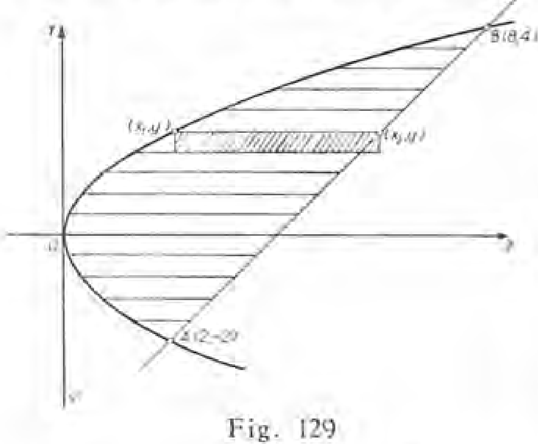


Fig. 129

Solución. Las curvas se cortan en $A\ (2, -2)$, $B\ (8, 4)$. Dividiremos la superficie en tiras horizontales por un sistema de paralelas a OX equidistantes, trazadas desde la parábola AOB hasta la recta AB. Sea dy la distancia de una paralela a otra. Consideremos la tira (véase la figura) cuyo lado superior tiene por extremos los puntos (x_1, y), (x_2, y). De estos puntos tracemos perpendiculares al lado inferior. Así se forma un rectángulo; su área es

$$(1) \qquad dA = (x_2 - x_1)\,dy. \qquad (x_2 > x_1)$$

Este es el elemento de área. En efecto, el área buscada es, evidentemente, el límite de la suma de todos estos rectángulos. Es decir, según el teorema fundamental,

$$\text{(2)} \qquad \text{Area} = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dy,$$

en donde, x_2 y x_1 son funciones de y, determinadas por las ecuaciones de las líneas que limitan la superficie. Así, en este ejemplo, de $x - y = 4$ encontramos $x = x_2 = 4 + y$; de $y^2 = 2x$ se obtiene $x = x_1 = \frac{1}{2}y^2$. Luego, según (1), tenemos,

$$\text{(3)} \qquad dA = \left(4 + y - \frac{1}{2}y^2\right)dy.$$

Esta fórmula es aplicable al rectángulo formado por cualquier tira. Los límites son $c = -2$ (en A), $d = 4$ (en B). Por tanto,

$$\text{Area} = \int_{-2}^{4}\left(4 + y - \frac{1}{2}y^2\right)dy = 18.$$

En este ejemplo también es posible dividir la superficie en tiras por un sistema de paralelas a OY equidistantes. Sea Δx la distancia de una paralela a otra. El extremo *superior* de cada recta estará en el arco de parábola OB. Pero el extremo *inferior* estará en el arco de parábola OA, si se ha trazado a la izquierda de A, y en la recta AB si se ha trazado a la derecha de A. Si (x, y_2) es el extremo superior y (x, y_1) la inferior, el rectángulo cuya área es

$$\text{(4)} \qquad dA = (y_2 - y_1)\,dx \qquad (y_2 > y_1)$$

es el elemento de área. Pero en este ejemplo no es posible obtener de (4) una fórmula *única* para representar el área de cada uno de los rectángulos. En efecto, mientras que $y_2 = \sqrt{2x}$, tenemos que $y_1 = -\sqrt{2x}$ o $y_1 = x - 4$ según que la esquina inferior de dA esté en la parábola o en AB. Así, de (4) tenemos dos formas de dA, y se necesitan dos integraciones.

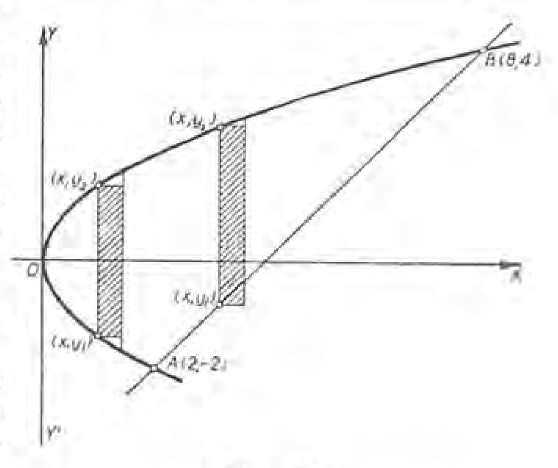


Fig. 130

Luego en un problema cualquiera las tiras deben construirse de manera que sólo se obtenga *una* fórmula para el elemento de área. La fórmula (4) se emplea cuando las tiras se construyen trazando paralelas al eje de las y.

En el teorema fundamental, los elementos $\phi(x_i)\Delta x_i$, o algunos de ellos, pueden ser negativos. Por tanto, el límite de su suma (la integral definida) puede ser nulo o negativo. Por ejemplo, si

$$\phi(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0, \quad b = 2\pi,$$

la integral definida (3) del Artículo 156 es cero. La interpretación de este resultado, cuando se trata de áreas, aparece en el ejemplo 1, tratado antes.

PROBLEMAS

1. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $xy = a^2$, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = 2a$. *Sol.* $a^2 \ln 2$.

2. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = \ln x$, el eje de las x y la recta $x = 10$. *Sol.* 14,026.

3. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = xe^x$, el eje de las x y la recta $x = 4$. *Sol.* 164,8.

4. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y los ejes de coordenadas. *Sol.* $\frac{1}{6}a^2$.

5. Hallar el área total de la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Sol.* $\frac{3}{8}\pi a^2$

Hallar las áreas de las superficies limitadas por las siguientes curvas. En cada problema trazar la figura, mostrando el elemento de área.

6. $y^2=6x$, $x^2=6y$. *Sol.* 12.
7. $y^2=4x$, $x^2=6y$. 8.
8. $y^2=4x$, $2x-y=4$. 9.
9. $y=4-x^2$, $y=4-4x$. $10\frac{2}{3}$.
10. $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$.
11. $y = 6x - x^2$, $y = x$.
12. $y = x^3 - 3x$, $y = x$.
13. $y^2 = 4x$, $x = 12 + 2y - y^2$.

14. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $y = 6 + 4x - x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-2, -6)$ y $(4, 6)$. *Sol.* 36.

15. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola semicúbica $y^3=x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1, 1)$ y $(8, 4)$. *Sol.* 2,7.

16. Hallar una fórmula para el área de la superficie limitada por la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, el eje de las x y una recta trazada del origen a cualquier punto (x, y) de la curva.

Sol. $\frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x + y}{a}\right)$.

17. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = x(1 \pm \sqrt{x})$ y la recta $x = 4$. *Sol.* $\frac{128}{5}$.

18. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $x^2y = x^2 - 1$ y las rectas $y = 1$, $x = 1$ y $x = 4$. *Sol.* $\frac{3}{4}$.

19. Hallar el área de la superficie limitada por la curva

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7,$$

el eje de las y y la recta $y = 29$. *Sol.* 108.

Los ejes de coordenadas y las coordenadas del punto (1, 1) forman un cuadrado. Calcular la razón de la mayor a la menor de las áreas en las que es dividido por cada una de las siguientes curvas.

20. $y = x^2$. *Sol.* 2.

21. $y = x^3$. 3.

22. $y = x^4$. 4.

23. $y^3 = x^2$. $\frac{3}{2}$.

24. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. 5.

25. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. $\frac{32 - 3\pi}{3\pi}$.

26. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$. *Sol.* $\frac{2}{\pi - 2}$.

27. $y = xe^{x-1}$.

28. $y = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$.

29. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$.

Para cada una de las siguientes curvas, calcular el área de la superficie del primer cuadrante limitada por el arco de curva que va desde el eje de las y hasta la primera intersección con el eje de las x.

30. $x + y + y^2 = 2$. *Sol.* $1\frac{1}{6}$.

31. $y = x^3 - 8x^2 + 15x$. $15\frac{3}{4}$.

32. $y = e^x \operatorname{sen} x$. 12,07.

33. $y^2 = (4 - x)^3$.

34. $y = e^{\frac{x}{2}} \cos 2x$.

35. $y = 4e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{1}{2}\pi x$.

36. $y = \operatorname{sen}(x + 1)$.

159. Areas de curvas planas; coordenadas polares. Se pide que hallemos el área limitada por una curva y dos de sus radios vectores.

Supongamos que la ecuación de la curva sea

$$\rho = f(\theta),$$

y OP_1 y OD los dos radios vectores. Designemos por α y β los ángulos que forman estos radios y el eje polar. Apliquemos el teorema fundamental dado en el Artículo 156.

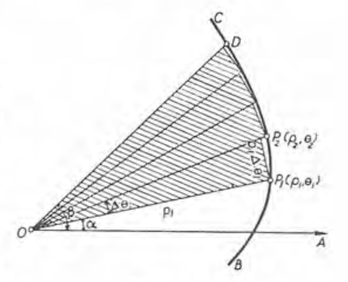


Fig. 131

PRIMER PASO. Evidentemente, el área pedida es el límite de la suma de sectores circulares construídos tal como se indica en la figura 131.

SEGUNDO PASO. Sean los ángulos centrales de los sectores $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$, etc., y sus radios ρ_1, ρ_2, etc. Entonces la suma de las áreas de los sectores es

$$\tfrac{1}{2}\rho_1^2\,\Delta\theta_1 + \tfrac{1}{2}\rho_2^2\,\Delta\theta_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}\rho_n^2\,\Delta\theta_n = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\rho_i^2\,\Delta\theta_i,$$

puesto que el área de un sector circular = $\frac{1}{2}$ radio $\times$ arco. Luego el área del primer sector = $\frac{1}{2}\varrho_1 \cdot \varrho_1 \Delta\theta_1 = \frac{1}{2}\varrho_1^2 \Delta\theta_1$, etc.

TERCER PASO. Aplicando el teorema fundamental,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2}\varrho_i^2 \Delta\theta_i = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}\varrho^2\, d\theta .$$

Por tanto, el área barrida por el radio vector de la curva cuando pasa de la posición OP_1 a la posición OD se da por la fórmula

$$(D) \qquad \textbf{Area} = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2\, d\theta,$$

sustituyéndose de la ecuación de la curva el valor de ϱ en términos de θ.

El elemento de área para **(D)** es un sector circular de radio ϱ y ángulo central $d\theta$. Luego su área es $\frac{1}{2}\varrho^2\, d\theta$.

EJEMPLO. Hallar el área total de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

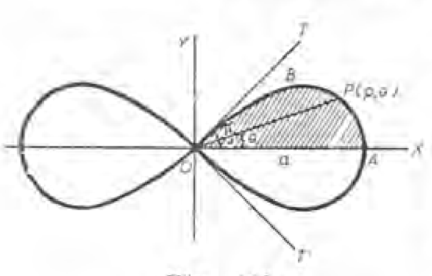


Fig. 132

Solución. Puesto que la figura es simétrica con respecto a OX y a OY, el área total = 4 veces el área de OAB (fig. 132).

Puesto que $\varrho = 0$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, vemos que si θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$, el radio vector OP describe el área OAB. Por tanto, sustituyendo en (D), tendremos:

$$\text{Area total} = 4 \times \text{área } OAB = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \varrho^2\, d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = a^2;$$

es decir, el área de ambos bucles es igual al área de un cuadrado construido sobre OA como lado.

PROBLEMAS

1. Hallar el área de la superficie limitada por el círculo $\varrho = a\cos\theta$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 60°$. *Sol.* $0{,}37\, a^2$.

2. Hallar el área total de la superficie limitada por la curva $\varrho = a \operatorname{sen} 2\theta$. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi a^2$.

Calcular el área de la superficie encerrada por cada una de las siguientes curvas.

3. $\varrho^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$. *Sol.* 4. **5.** $\varrho = a(1 - \cos\theta)$. *Sol.* $\frac{3}{2}\pi a^2$.

4. $\varrho = a\cos 3\theta$. $\frac{1}{4}\pi a^2$. **6.** $\varrho = 2 - \cos\theta$. $\frac{9}{2}\pi$.

Calcular el área de la superficie encerrada por cada una de las siguientes curvas:

7. $\varrho = \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$. *Sol.* $\frac{3}{8}\pi$.

8. $\varrho = \frac{1}{2} + \cos 2\,\theta$. $\frac{3}{4}\pi$.

9. $\varrho = 2 + \operatorname{sen} 3\,\theta$. $\frac{9}{2}\pi$.

10. $\varrho = 3 + \cos 3\,\theta$.

11. $\varrho = a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta$.

12. $\varrho = 2\cos^2 \dfrac{\theta}{2}$.

13. $\varrho = a \operatorname{sen} n\theta$.

14. $\varrho = \cos 3\,\theta - \cos\theta$.

15. $\varrho = \cos 3\,\theta - 2\cos\theta$.

16. Hallar el área de la superficie limitada por la parábola $\varrho(1 + \cos\theta) = a$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 120°$. *Sol.* $0{,}866\,a^2$.

17. Hallar el área de la superficie limitada por la hipérbola $\varrho^2 \cos 2\,\theta = a^2$ y las rectas $\theta = 0$ y $\theta = 30°$. *Sol.* $0{,}33\,a^2$.

18. Demostrar que el área de la superficie engendrada por el radio vector de la espiral $\varrho = e^{\theta}$ es igual a un cuarto del área del cuadrado construído sobre el radio vector.

19. Hallar el área de la parte de la parábola $\varrho = a \sec^2 \dfrac{\theta}{2}$ que es interceptada entre la curva y el lado recto, o sea, la cuerda trazada por el foco, perpendicular al eje de simetría. *Sol.* $\frac{8}{3}a^2$.

20. Demostrar que el área de la superficie limitada por dos radios vectores cualesquiera de la espiral hiperbólica $\varrho\theta = a$, es proporcional a la diferencia de las longitudes de esos radios.

21. Hallar el área de la elipse $\varrho^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}$. *Sol.* πab.

22. Hallar el área total de la superficie limitada por la curva

$$\varrho = a(\operatorname{sen} 2\,\theta + \cos 2\,\theta).$$ *Sol.* πa^2.

23. Hallar el área bajo OX dentro de la curva $\varrho = a \operatorname{sen}^3 \dfrac{\theta}{3}$.

Sol. $\frac{1}{64}(10\pi + 27\sqrt{3})\,a^2$.

24. Hallar el área de la superficie limitada por $\varrho^2 = a^2 \operatorname{sen} 4\,\theta$. *Sol.* a^2.

Hallar las áreas de las superficies limitadas por las siguientes curvas y las rectas dadas.

25. $\varrho = \operatorname{tg}\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

26. $\varrho = e^{\frac{1}{2}\theta}$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

27. $\varrho = \sec\theta + \operatorname{tg}\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

28. $\varrho = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$; $\theta = 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

Calcular el área que tienen en común cada uno de los siguientes pares de curvas:

29. $\varrho = 3 \cos \theta, \quad \varrho = 1 + \cos \theta.$ *Sol.* $\frac{5}{4}\pi.$

30. $\varrho = 1 + \cos \theta, \quad \varrho = 1.$ $\frac{5}{4}\pi - 2.$

31. $\varrho = 1 - \cos \theta, \quad \varrho = \operatorname{sen} \theta.$ $\frac{1}{2}\pi - 1.$

32. $\varrho^2 = 2 \cos 2\theta, \quad \varrho = 1.$ $\frac{1}{3}\pi + 2 - \sqrt{3}.$

33. $\varrho^2 = \cos 2\theta, \quad \varrho^2 = \operatorname{sen} 2\theta.$ $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

34. $\varrho = \sqrt{6} \cos \theta, \quad \varrho^2 = 9 \cos 2\theta.$ $\frac{1}{2}(\pi + 9 - 3\sqrt{3}).$

35. $\varrho = \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta, \quad \varrho^2 = \cos 2\theta.$ $\frac{1}{6}(\pi + 3 - 3\sqrt{3}).$

36. $\varrho = \sqrt{2} \cos \theta, \quad \varrho^2 = \sqrt{3} \operatorname{sen} 2\theta.$

37. Hallar el área de la superficie interior al círculo $3\varrho = \sqrt{3} \cos \theta$ y al bucle de la curva $\varrho = \cos 2\theta$ desde $\theta = -\frac{\pi}{4}$ hasta $\theta = \frac{\pi}{4}$.

38. Idem id. a las curvas $3\varrho = \sqrt{6} \operatorname{sen} 2\theta, \quad \varrho^2 = \cos 2\theta.$

39. Hallar el área del lazo interior de la trisectriz $\varrho = a(1 - 2\cos\theta)$. Para la figura, véase el caracol de Pascal, Capítulo XXVI.

Sol. $\frac{1}{2}a^2(2\pi - 3\sqrt{3}).$

160. Volúmenes de sólidos de revolución. Designemos por V el volumen del sólido engendrado haciendo girar el recinto plano $ABCD$ alrededor del eje de las x, siendo la ecuación de la curva plana DC

$$y = f(x).$$

Primer paso. Dividamos el segmento AB en n partes cuyas longitudes sean $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ y hagamos pasar por cada punto de división un plano perpendicular al eje de las x. Estos planos dividirán el sólido en n placas circulares. Si dentro del recinto $ABCD$ se construyen rectángulos con las bases $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, entonces cada rectángulo engendra un cilindro de revolución cuando el recinto $ABCD$ se hace girar. Así se forma un cilindro corres-

pondiente a cada una de las placas circulares. (En la figura 133 $n = 4$ y se ven dos cilindros). El límite de la suma de estos n cilindros ($n \to \infty$) es el volumen buscado.

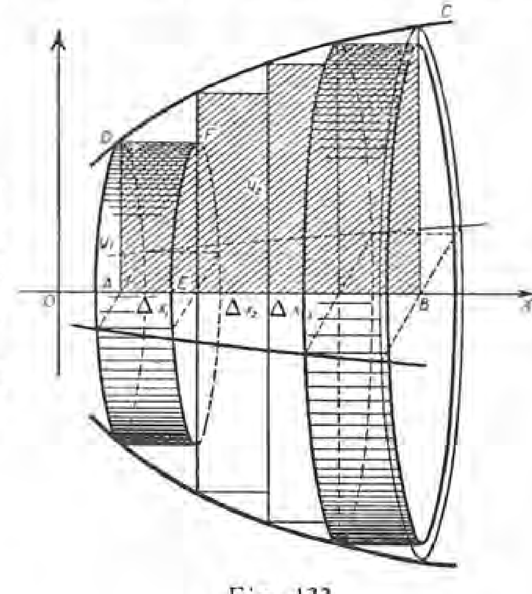


Fig. 133

SEGUNDO PASO. Sean

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n$$

las ordenadas de la curva DC en los puntos de división en el eje de las x. Entonces el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo $AEFD$ será $\pi y_1^2 \Delta x_1$, y la suma de los volúmenes de todos estos cilindros es

$$\pi y_1^2 \, \Delta x_1 + \pi y_2^2 \, \Delta x_2 + \ldots$$

$$\ldots + \pi y_n^2 \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \, \Delta x_i .$$

TERCER PASO. Aplicando el teorema fundamental (empleando los límites $OA = a$ y $OB = b$),

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi y_i^2 \, \Delta x_i = \int_a^b \pi y^2 \, dx .$$

Por tanto, el volumen que se engendra haciendo girar alrededor del eje de las x la superficie limitada por la curva, el eje de las x y las ordenadas $x = a$ y $x = b$ viene dado por la fórmula

$$(E) \qquad V_x = \pi \int_a^b y^2 \, dx,$$

en la que se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de y en términos de x.

Esta fórmula se recuerda fácilmente si consideramos una rebanada o placa delgada del sólido formado por dos planos perpendiculares al eje de revolución y miramos esta placa circular como, aproximadamente, un cilindro de altura dx y base de área πy^2. Evidentemente, el volumen de un tal cilindro es $\pi y^2 \, dx$. Este cilindro es el elemento de volumen.

Análogamente, cuando OY es el eje de revolución empleamos la fórmula

$$(F) \qquad V_y = \pi \int_c^d x^2 \, dy,$$

en la que se ha de sustituir, deducido de la ecuación de la curva dada, el valor de x en función de y.

EJEMPLO 1. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor del eje de las x la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución. Puesto que $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, y que el volumen buscado es dos veces el volumen engendrado por OAB, obtenemos, sustituyendo en (E),

$$\frac{V_x}{2} = \pi \int_0^a y^2\,dx = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi ab^2}{3}.$$

$$\therefore \quad V_x = \frac{4\pi ab^2}{3}.$$

A fin de verificar este resultado, sea $b = a$. Entonces $V_x = \frac{4\pi a^3}{3}$, el volumen de una esfera, que no es otra cosa que un caso especial del elipsoide. Cuando la elipse gira alrededor de su eje mayor, el sólido engendrado se llama esferoide alargado; cuando gira alrededor de su eje menor, esferoide achatado. En ambos casos se les llama también elipsoides de revolución.

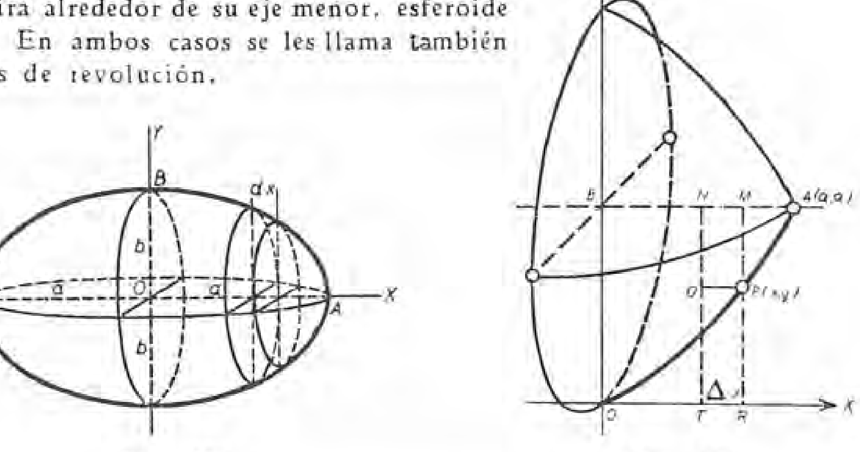


Fig. 134 Fig. 135

EJEMPLO 2. La superficie limitada por la parábola semicúbica

$$(1) \qquad ay^2 = x^3,$$

el eje de las y y la recta $AB\ (y = a)$ (fig. 135) gira alrededor de AB. Hallar el volumen del sólido de revolución engendrado.

Solución. En la figura, $OPAB$ es el área que se hace girar. Divídase el segmento AB en n partes iguales de longitud Δx. En la figura, MN es una de esas partes. El rectángulo $NMPQ$, girando alrededor de AB, engendra un cilindro de revolución, cuyo volumen es un elemento del volumen buscado. Por tanto

$$\text{Elemento de volumen} = \pi r^2 h = \pi(a - y)^2\,\Delta x,$$

puesto que

$$r = PM = RM - RP = a - y$$

y

$$h = NM = \Delta x.$$

Entonces, según el teorema fundamental,

(2) Volumen del sólido $= V = \pi \int_0^a (a - y)^2 \, dx$

$$= \pi \int_0^a (a^2 - 2\,ay + y^2)\, dx,$$

puesto que los límites son $x = 0$ y $x = AB = a$. Reemplazando y por su valor según (1), la solución es $V = 0{,}45\,\pi a^3$.

Este resultado debe compararse con el volumen del cono de revolución con altura AB $(= a)$ y base de radio OB $(= a)$. Volumen del cono $= \frac{1}{3}\,\pi a^3$.

Si las ecuaciones de la curva CD de la figura 133 se dan en forma paramétrica,

$$x = f(t), \quad y = \phi(t),$$

entonces se debe sustituir en **(E)** los valores $y = \phi(t)$, $dx = f'(t)dt$, y cambiar los límites en t_1 y t_2, si

$$t = t_1 \text{ cuando } x = a, \quad t = t_2 \text{ cuando } x = b.$$

Volumen de un sólido de revolución hueco. Cuando una superficie plana gira alrededor de un eje situado en el mismo plano, y este eje no corta a la superficie, se forma un sólido de revolución hueco. Considérese, por ejemplo, el sólido que se obtiene haciendo girar alrededor del eje de las x el recinto $ACBDA$ de la figura 136. Hagamos pasar por el sólido un sistema de planos equidistantes perpendiculares al eje de revolución OX. Sea Δx la distancia entre uno y otro. Entonces, el sólido se divide en placas circulares huecas de espesor Δx. Si uno de los planos que dividen el sólido pasa por M, la placa circular hueca con una base en este plano es, aproximadamente, un cilindro circular hueco cuyos radios interior y exterior son, respectivamente, MP_1 $(= y_1)$ y MP_2 $(= y_2)$. Por tanto, su volumen es $\pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x$. Sean n cilindros huecos, siendo $b - a = n \cdot \Delta x$. El límite de la suma de estos n cilindros huecos cuando $n \to \infty$ es el volumen del sólido de revolución hueco. Por tanto,

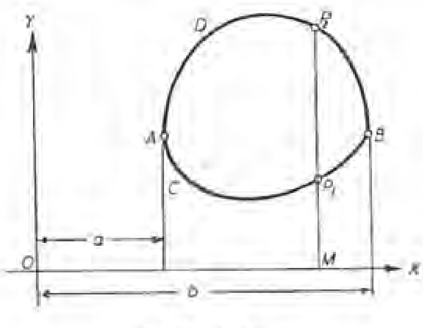


Fig. 136

(3) $$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx. \qquad (y_2 > y_1)$$

El elemento de volumen en (3) es un cilindro circular hueco con radio interior y_1, radio exterior y_2 y altura Δx. Los radios y_1 y y_2 son funciones de x $(= OM)$ que se obtienen de las ecuaciones de las curvas que limitan (o la ecuación de la curva que limita) a la superficie que gira.

EJEMPLO 3. Hallar el volumen del sólido anular (*toro* o *argolla*) que se forma al hacer girar un círculo de radio a alrededor de un eje situado en su plano y exterior al círculo, que dista de su centro b unidades $(b > a)$.

Solución. Sea la ecuación del círculo

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

y sea el eje de las x el eje de revolución.

Despejando y, tenemos

$$y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\therefore \quad dV = \pi(y_2^2 - y_1^2)\Delta x = 4\pi b\sqrt{a^2 - x^2}\,\Delta x.$$

Según (3), $V_x = 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b.$

Un sólido de revolución puede dividirse en cáscaras cilíndricas haciendo pasar por él un sistema de cilindros circulares cuyo eje común es el eje de revolución. Si el área $ACBD$ de la figura 137 gira alrededor del eje de las y, puede demostrarse que

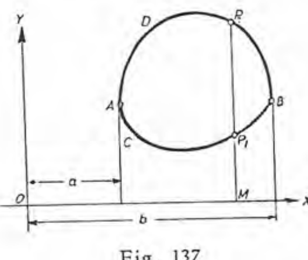


Fig. 137

$$(4) \qquad V_y = 2\pi \int_a^b (y_2 - y_1)x\,dx,$$

en donde

$$OM = x, \quad MP_1 = y_1, \quad MP_2 = y_2.$$

El elemento dV es ahora una cáscara cilíndrica de radio r, altura $y_2 - y_1$ y espesor Δx. El ejemplo 3 puede resolverse también, utilizando la fórmula (4).

PROBLEMAS

1. Hallar el volumen de la esfera que se engendra haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro. *Sol.* $\frac{4}{3}\pi r^3$.

2. Hallar por integración el volumen del cono truncado que se engendra haciendo girar alrededor de OX la superficie limitada por las rectas

$$y = 6 - x, \quad y = 0, \quad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4.$$

Comprobar el resultado con la fórmula obtenida en Geometría.

3. Hallar el volumen del paraboloide de revolución cuya superficie se engendra haciendo girar alrededor de su eje el arco de la parábola $y^2 = 2\,px$ comprendido entre el origen y el punto (x_1, y_1).

Sol. $\pi p x_1^2 = \frac{1}{2}\pi y_1^2 x_1$; es decir, la mitad del volumen del cilindro circunscrito.

4. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor de OY el arco del problema 3. *Sol.* $\frac{1}{5}\pi x_1^2 y_1$; es decir, un quinto del cilindro de altura y_1 y radio de la base x_1.

Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar alrededor de OX la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

5. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$. *Sol.* $\frac{128}{7}\pi$.

6. $ay^2 = x^3$, $y = 0$, $x = a$. $\frac{1}{4}\pi a^3$.

7. La parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$. $\frac{1}{15}\pi a^3$.

8. La hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

9. Una arcada de $y = \operatorname{sen} x$. $\frac{1}{2}\pi^2$.

10. Una arcada de $y = \cos 2\,x$. $\frac{1}{4}\pi^2$.

11. $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$. $\frac{1}{2}\pi(1 - e^{-10})$.

12. $9\,x^2 + 16\,y^2 = 144$. $48\,\pi$.

13. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$. $\frac{1}{4}\pi(e^2 - 1)$.

14. La bruja $(x^2 + 4\,a^2)\,y = 8\,a^3$, $y = 0$. $4\,\pi^2 a^3$.

15. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. $\frac{32}{35}\pi ab^2$.

16. $y^2(2\,a - x) = x^3$, $y = 0$, $x = a$. $0{,}2115\,\pi a^3$.

17. $y = x^2 - 6\,x$, $y = 0$.

18. $y^2 = (2 - x)^3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

19. $y^2(4 + x^2) = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \infty$.

20. $(x - 1)\,y = 2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$.

Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor de OY, la superficie limitada por los siguientes lugares geométricos:

21. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$. *Sol.* $\frac{64}{5}\pi$.

22. $2\,y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$. $\frac{32}{7}\pi$.

23. $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$. $2\,\pi$.

24. $9\,x^2 + 16\,y^2 = 144$. $64\,\pi$.

25. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$ *Sol.* $\frac{4}{5}\pi a^2 b.$

26. $y^2 = 9 - x, \quad x = 0.$

27. $x^2 = 16 - y, \quad y = 0.$

28. $y^2 = ax, \quad y = 0, \quad x = a.$

29. La ecuación de la curva OA de la figura 138 es $y^2 = x^3$. Hallar el volumen del sólido que se engendra cuando la superficie

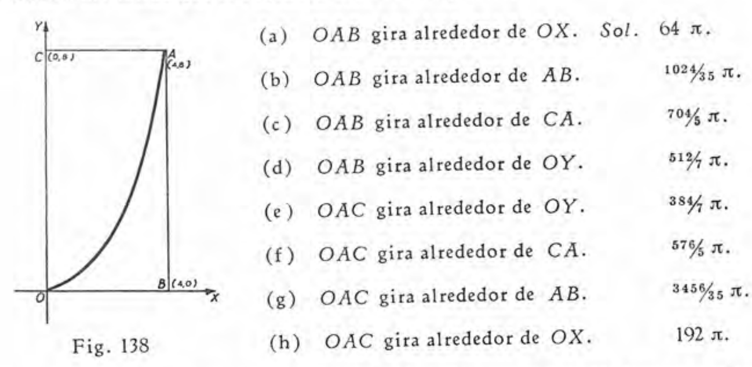


Fig. 138

(a) OAB gira alrededor de OX. *Sol.* 64π.

(b) OAB gira alrededor de AB. $\frac{1024}{35}\pi$.

(c) OAB gira alrededor de CA. $\frac{704}{5}\pi$.

(d) OAB gira alrededor de OY. $\frac{512}{7}\pi$.

(e) OAC gira alrededor de OY. $\frac{384}{7}\pi$.

(f) OAC gira alrededor de CA. $\frac{576}{5}\pi$.

(g) OAC gira alrededor de AB. $\frac{3456}{35}\pi$.

(h) OAC gira alrededor de OX. 192π.

30. Hallar el volumen del esferoide achatado que se engendra haciendo girar alrededor del eje de las y la superficie limitada por la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. *Sol.* $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

31. De una esfera de radio r se corta un segmento de una base de espesor h. Demostrar, por integración, que su volumen es $\frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$.

Calcular el volumen del sólido que se engendra haciendo girar alrededor de cada una de las siguientes rectas la superficie que corta de la curva correspondiente.

32. $y = 3; \quad y = 4x - x^2.$ *Sol.* $\frac{16}{15}\pi$.

33. $x = 4; \quad y^2 = x^3.$ $\frac{2048}{35}\pi$.

34. $y = -4; \quad y = 4 + 6x - 2x^2.$ $\frac{1250}{3}\pi$.

35. $y = x; \quad y = x^2.$ $\frac{1}{60}\pi\sqrt{2}$

36. $y = x; \quad y = 3x - x^2.$ $\frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$.

37. $4y = 4x + 33; \quad y = 9 - x^2.$ $\frac{8}{15}\pi\sqrt{2}$.

38. $x + y = 1; \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$ $\frac{1}{15}\pi\sqrt{2}$.

39. $x + y = 7; \quad xy = 6.$

40. Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar una arcada de la cicloide

$$x = r \text{ arc vers } \frac{y}{r} - \sqrt{2\,ry - y^2}$$

alrededor de su base OX.

SUGESTION. Sustituir $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2\,ry - y^2}}$ y los límites $y = 0$, $y = 2\,r$, en (E) del Artículo 160. *Sol.* $5\,\pi^2 r^3$.

41. Hallar el volumen del sólido que se engendra haciendo girar la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ alrededor del eje de las x desde $x = 0$ hasta $x = b$.

Sol. $\frac{\pi a^3}{8}\left(e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}}\right) + \frac{\pi a^2 b}{2}$.

42. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar la cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2\,a - x}$ alrededor de su asíntota $x = 2\,a$. *Sol.* $2\,\pi^2 a^3$.

43. Dada la pendiente de la tangente a la tractriz, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$, hallar el volumen del sólido que se engendra haciéndola girar alrededor de OX.

Sol. $\frac{2}{3}\,\pi a^3$.

44. Demostrar que el volumen de un casquete cónico de altura a cortado del sólido engendrado haciendo girar la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor de OX, es igual al volumen de una esfera de radio a.

45. Empleando las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide

$$x = a \cos^3 \theta,$$
$$y = a \operatorname{sen}^3 \theta,$$

hallar el volumen del sólido que se engendra haciéndola girar alrededor de OX.

Sol. $\frac{32}{105}\,\pi a^3$.

46. Hallar el volumen del sólido engendrado haciendo girar una arcada de la cicloide

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$
$$y = a(1 - \cos \theta)$$

alrededor de su base OX. *Sol.* $5\,\pi^2 a^3$.

Demostrar que si la arcada gira alrededor de OY, el volumen que se engendra es $6\,\pi^3 a^3$.

47. Hallar el volumen que se engendra si la superficie limitada por la curva $y = \sec \frac{1}{2}\pi x$, el eje de las x y las rectas $x = \pm\frac{1}{2}$ gira alrededor del eje de las x. *Sol.* 4.

48. El área debajo de la curva $y = e^x \operatorname{sen} x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi$, gira alrededor del eje de las x. Hallar el volumen del sólido que se engendra.

49. Dada la curva $x = t^2$, $y = 4t - t^3$, hallar: *a*) el área del lazo, y *b*) el volumen del sólido engendrado por la superficie interior del lazo, cuando gira alrededor del eje de las x. *Sol.* *a*) $^{256}/_{15}$; *b*) 67,02.

50. Hágase girar alrededor de cada eje la superficie limitada por las dos parábolas $y^2 = 4x$ y $y^2 = 5 - x$. Calcular los volúmenes respectivos.

Sol. Alrededor de OX, 10π; alrededor de OY, $^{176}/_{3}\pi$.

51. Hágase girar alrededor del eje polar la parte de la cardioide $\rho = 4 + 4\cos\theta$ que está entre las rectas $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$. Calcular el volumen. *Sol.* 160π.

161. Longitud de un arco de curva. Por *longitud de una recta* queremos decir, ordinariamente, el número de veces que podemos colocar sucesivamente sobre ella un segmento rectilíneo que se toma como unidad de longitud; así, por ejemplo, el carpintero mide la longitud de una tabla aplicando a ella repetidas veces el metro, u otra unidad de longitud.

Puesto que es imposible hacer que un segmento rectilíneo coincida con un arco de curva, no podemos medir las líneas curvas de la misma manera que las rectas. Entonces procedemos como sigue.

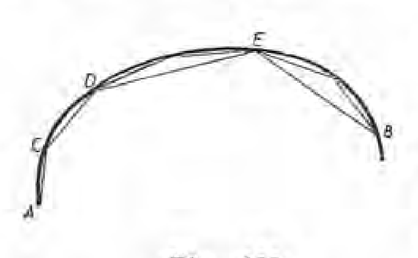


Fig. 139

Dividimos el arco de la curva, figura 139, (como AB) en cualquier número de partes de una manera cualquiera (como en C, D, E) y unimos los puntos sucesivos de división (como AC, CD, DE, EB) formando una poligonal.

La longitud de un arco de curva se define como el límite de la suma de los lados de la poligonal cuando el número de los puntos de división tiende a infinito, al mismo tiempo que cada uno de los lados tiende a cero.

Puesto que ese límite será también la medida de la longitud de algún segmento rectilíneo, el hallar la longitud de un arco de curva se llama también "rectificar la curva".

En Geometría el estudiante ya se ha servido de esta definición de la longitud de un arco de curva. Así, la longitud de la circunferencia se define como el límite común de los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos cuando el número de los lados aumenta infinitamente.

El método del Artículo 162 para determinar la longitud de un arco de curva plana se funda en esta definición. El estudiante debe observar cuidadosamente cómo se aplica.

162. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas rectangulares. Ahora vamos a expresar en forma analítica la definición de artículo anterior, sirviéndonos del teorema fundamental.

Dada la curva

$$y = f(x)$$

y en ella los puntos $P'(a, c)$ y $Q(b, d)$; hallar la longitud del arco $P'Q$.

Primer paso. Tomemos cualquier número n de puntos sobre la curva entre P' y Q, y tracemos las cuerdas que unen los puntos adyacentes, tal como se indica en la figura 140. Evidentemente, la longitud buscada del arco $P'Q$ es el límite de la suma de las longitudes de estas cuerdas.

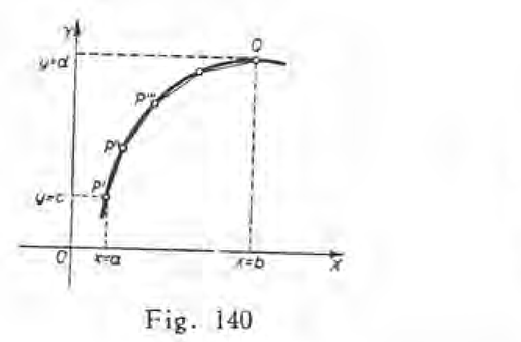


Fig. 140

Fig. 141

Segundo paso. Consideremos una de estas cuerdas, $P'P''$ por ejemplo, y sean las coordenadas de P' y P''

$$P'(x', y') \quad \text{y} \quad P''(x' + \Delta x', \; y' + \Delta y').$$

Entonces, como en el Artículo 95,

$$P'P'' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2},$$

o sea,

$$P'P'' = \left[1 + \left(\frac{\Delta y'}{\Delta x'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta x'.$$

[Dividiendo dentro del radical por $(\Delta x')^2$ y multiplicando fuera de él por $\Delta x'$.]

Pero, según el teorema del valor medio (Art. 116), obtenemos (si $f(b) - f(a)$ se representa por $\Delta y'$ y $b - a$ por $\Delta x'$),

$$\frac{\Delta y'}{\Delta x'} = f'(x_1), \qquad (x' < x_1 < x' + \Delta x')$$

siendo x_1 la abscisa de un punto P_1 de la curva *entre* P' y P'', en el cual la tangente es paralela a la cuerda.

Sustituyendo, $P'P'' = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x'$
= longitud de la primera cuerda.

Análogamente, $P''P''' = [1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x''$
= longitud de la segunda cuerda.

. . . .

$P^{(n)}Q = [1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x^{(n)}$
= longitud de la enésima cuerda.

Entonces la longitud de la poligonal inscrita que une P' y Q (la suma de las cuerdas) es la suma de estas expresiones, a saber,

$$[1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x' + [1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x'' + \ldots + [1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x^{(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x^{(i)}.$$

Tercer paso. Aplicando el teorema fundamental, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}}\Delta x^{(i)} = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Por esto, designando la longitud del arco $P'Q$ por s, resulta, para la longitud del arco, la fórmula

$$s = \int_a^b [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}}\, dx, \text{ o sea,}$$

$$(G) \qquad s = \int_a^b [1 + y'^2]^{\frac{1}{2}}\, dx,$$

en donde $y' = \frac{dy}{dx}$ se obtiene en función de x de la ecuación de la curva dada.

A veces es más cómodo emplear y como variable independiente. A fin de deducir una fórmula aplicable a este caso, sabemos, según el Artículo 39, que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\,; \text{ luego } dx = x'\, dy.$$

Sustituyendo estos valores en (*G*), y observando que los límites de y correspondientes son c y d, obtenemos también, como fórmula para la longitud del arco,

$$(H) \qquad s = \int_c^d [x'^2 + 1]^{\frac{1}{2}}\, dy,$$

en donde $x' = \frac{dx}{dy}$ se obtiene en función de y de la ecuación de la curva dada.

La fórmula **(G)** puede deducirse de otra manera. En efecto, la fórmula **(D)** del Artículo 95,

$$(1) \qquad ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

da la diferencial del arco de una curva. Si a partir de (1) procedemos como en el Artículo 142, obtenemos **(G)**. Igualmente, **(H)** se deduce de **(E)** del Artículo 95. Por último, si la curva está definida por ecuaciones paramétricas

$$(2) \qquad x = f(t), \quad y = \phi(t),$$

conviene emplear la fórmula

$$(3) \qquad s = \int (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{t_1}^{t_2} [\, f'^2(t) + \phi'^2(t)\,]^{\frac{1}{2}}\, dt,$$

puesto que, según (2), $dx = f'(t)dt$, $dy = \phi'(t)dt$.

EJEMPLO 1. Hallar la longitud de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Solución. Derivando, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Sustituyendo en (G),

$$\text{Arco } BA = \int_0^r \left[1 + \frac{x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int_0^r \left[\frac{y^2 + x^2}{y^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^r \left[\frac{r^2}{r^2 - x^2}\right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

[Sustituyendo $y^2 = r^2 - x^2$, según la ecuación de la circunferencia, a fin de tener todo en términos de x.]

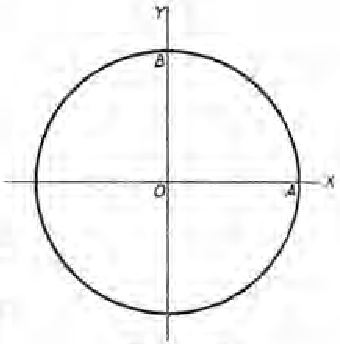


Fig. 142

$$\therefore \quad \text{arco } BA = r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\pi r}{2}.$$ (Véase el ejemplo 1 del Artículo 154.)

Luego la longitud total es igual a $2\pi r$.

EJEMPLO 2. Hallar la longitud del arco de una arcada de la cicloide

$$x = a(\theta - \text{sen}\,\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta).$$

Véase el ejemplo 2, Art. 81.

Solución. $dx = a(1 - \cos\theta)\,d\theta, \quad dy = a \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$

Luego $dx^2 + dy^2 = 2a^2(1 - \cos\theta)\,d\theta^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta^2$. Según (5), Art. 2.

Empleando (3), $\quad s = \int_0^{2\pi} 2a \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 8a.$

Los límites son los valores de θ en O y D (véase la figura 62 del Artículo 81): es decir, $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

EJEMPLO 3. Hallar la longitud del arco de la curva $25y^2 = x^5$ desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Solución. Derivando, $y' = \tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$.
Luego, según (G),

$$(4) \qquad s = \int_0^2 (1 + \tfrac{1}{4}x^3)^{\frac{1}{2}}\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 (4 + x^3)^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

El valor de la integral en (4) se determinó, aproximadamente, aplicando la regla de los trapecios, en el ejemplo 2 del Artículo 148, y según la regla de Simpson en el ejemplo 2 del Artículo 149. Tomando este valor, $s = \tfrac{1}{2}(4{,}821)$ que es igual a 2.41 *unidades lineales*.

163. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas polares. De (I) del Artículo 96, procediendo como en el Artículo 142, obtenemos para la longitud del arco, la fórmula

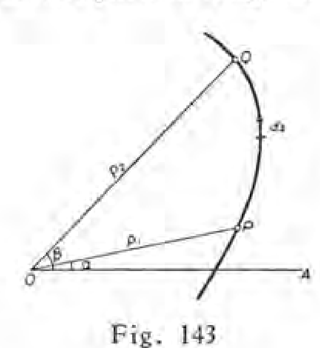


Fig. 143

$$(I) \quad s = \int_\alpha^\beta \left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

en donde han de sustituirse de la ecuación de la curva dada los valores de ϱ y $\dfrac{d\varrho}{d\theta}$ en términos de θ.

A veces conviene más emplear ϱ como variable independiente, y entonces la ecuación tiene la forma

$$\theta = \phi(\varrho),$$

de donde

$$d\theta = \phi'(\varrho)d\varrho = \frac{d\theta}{d\varrho}\, d\varrho.$$

Sustituyendo en $\quad [\varrho^2\, d\theta^2 + d\varrho^2]^{\frac{1}{2}},$

obtenemos $\quad \left[\varrho^2\left(\dfrac{d\theta}{d\varrho}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} d\varrho.$

De aquí, si ϱ_1 y ϱ_2 son los límites correspondientes de la variable independiente ϱ, obtenemos **para la longitud de arco**, la fórmula

$$(J) \qquad s = \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \left[\varrho^2 \left(\frac{d\theta}{d\varrho} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} d\varrho,$$

en la que ha de sustituirse de la ecuación de la curva dada el valor de $\frac{d\theta}{d\varrho}$ en términos de ϱ.

EJEMPLO. Hallar el perimetro de la cardioide $\varrho = a(1 + \cos \theta)$.

Solución. Aquí, $\frac{d\varrho}{d\theta} = -a \operatorname{sen} \theta$.

Si hacemos variar θ desde 0 hasta π, el punto P engendrará la mitad de la curva.

Sustituyendo en (J),

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} [a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta]^{1/2} \, d\theta.$$

$$= a \int_0^{\pi} (2 + 2 \cos \theta)^{1/2} \, d\theta$$

$$2 = a \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 4a.$$

$$\therefore \quad s = 8a.$$

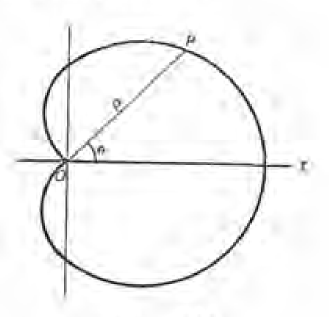


Fig. 144

PROBLEMAS

1. Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y^3 = x^2$, comprendido entre los puntos $(0, 0)$ y $(8, 4)$. *Sol.* 9,07.

2. Hallar la longitud del arco de la parábola semicúbica $ay^2 = x^3$ desde el origen hasta la ordenada $x = 5a$.

Sol. $\frac{335a}{27}$.

3. Hallar la longitud del arco de la curva cuya ecuación es $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, desde el punto de abscisa $x = 1$ al punto de abscisa $x = 3$. *Sol.* $^{14}/_{3}$.

4. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde el vértice a un extremo del lado recto.

Sol. $\frac{p\sqrt{2}}{2} + \frac{p}{2} \ln (1 + \sqrt{2})$.

5. Hallar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^3$ desde el punto correspondiente a $x = 0$ al punto donde $x = 5/9$. *Sol.* $^{19}/_{27}$.

6. Hallar la longitud del arco de la parábola $6y = x^2$ desde el origen al punto $(4, 8/3)$. *Sol.* 4,98.

7. Determinar, aplicando la regla de Simpson, la longitud aproximada del arco de la curva $3\ y = x^3$ desde el origen al punto $(1,\ \frac{1}{3})$. *Sol.* 1,09.

8. Hallar la longitud del arco de la curva $y = \ln \sec x$ desde el origen al punto $\left(\frac{\pi}{3},\ \ln 2\right)$. *Sol.* $\ln\ (2 + \sqrt{3})$.

9. Hallar la longitud del arco de la hipérbola $x^2 - y^2 = 9$ comprendido entre los puntos $(3,\ 0)$ y $(5,\ 4)$. (Empléese la regla de Simpson.) *Sol.* 4,56.

10. Hallar la longitud del arco de la parábola $y = 4\ x - x^2$ que está por encima del eje de las x. *Sol.* 9,29.

11. Hallar la longitud total de la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. *Sol.* $6\ a$.

12. Rectificar el arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ desde $x = 0$ al punto $(x,\ y)$. *Sol.* $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

13. Hallar la longitud de una arcada completa de la cicloide

$$x = r \text{ arc vers} \frac{y}{r} - \sqrt{2\ ry - y^2}.$$

Sol. $8\ r$.

SUGESTION. Empléese (H) del Artículo 162. Aquí $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2\ ry - y^2}}$.

14. Rectificar el arco de la curva $9\ ay^2 = x\,(x - 3\ a)^2$ desde $x = 0$ a $x = 3\ a$. *Sol.* $2\ a\sqrt{3}$.

15. Hallar la longitud en un cuadrante de la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$. *Sol.* $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

16. Hallar la longitud entre $x = a$ y $x = b$ de la curva $e^y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

Sol. $\ln \frac{e^{2b} - 1}{e^{2a} - 1} + a - b$.

17. Las ecuaciones de la evolvente de un círculo son

$$\begin{cases} x = a\,(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta), \\ y = a\,(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta). \end{cases}$$

Hallar la longitud del arco desde $\theta = 0$ a $\theta = \theta_1$. *Sol.* $\frac{1}{2}\,a\,\theta_1^2$.

18. Hallar la longitud del arco de la curva

$$\begin{cases} x = e^\theta \operatorname{sen}\theta \\ y = e^\theta \cos\theta \end{cases} \text{ desde } \theta = 0 \text{ a } \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Sol. $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$.

Hallar la longitud del arco de cada una de las siguientes curvas, comprendido entre los puntos cuyas abscisas se indican:

19. $y = \ln(1 - x^2)$ desde $x = 0$ a $x = \frac{1}{2}$.

20. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$ desde $x = 1$ a $x = 2$.

21. $y = \ln \csc x$ desde $x = \frac{\pi}{6}$ a $x = \frac{\pi}{2}$.

22. $3x^2 = y^3$ desde $y = 1$ a $y = 20$.

23. Una arcada de la curva $y = \operatorname{sen} x$.

24. Hallar la longitud del arco de la espiral de Arquímedes, $\varrho = a\theta$, desde el origen al extremo de la primera vuelta.

Sol. $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{a}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$.

25. Rectificar el arco de la espiral $\varrho = e^{a\theta}$ que va del origen al punto (ϱ, θ).

SUGESTION. Empléase (J). *Sol.* $\frac{\varrho}{a}\sqrt{a^2 + 1}$.

26. Hallar la longitud del arco de la curva $\varrho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$, desde $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Sol. $[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]\, a$.

27. Hallar la longitud de la parábola $\varrho = \frac{2}{1 + \cos\theta}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Sol. $\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)$.

28. Hallar la longitud del arco de la espiral hiperbólica $\varrho\theta = a$ limitado por los puntos (ϱ_1, θ_1) y (ϱ_2, θ_2).

Sol. $\sqrt{a^2 + \varrho_1^2} - \sqrt{a_2 + \varrho_2^2} + a \ln \frac{\varrho_1(a + \sqrt{a^2 + \varrho_2^2})}{\varrho_2(a + \sqrt{a^2 + \varrho_1^2})}$.

29. Demostrar que la longitud total de la curva $\varrho = a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}$ es $\frac{3\pi a}{2}$. Demostrar que OA, AB y BC (fig. 145) están en progresión aritmética.

30. Hallar la longitud del arco de la cisoide $\varrho = 2a \operatorname{tg}\theta \operatorname{sen}\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \frac{\pi}{4}$.

31. Determinar, aproximadamente, el perimetro de una hoja de la curva $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$.

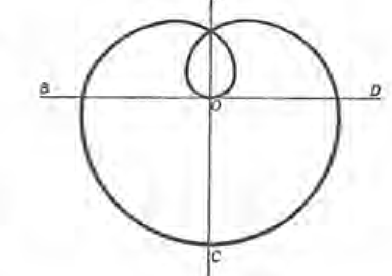


Fig. 145

164. Areas de superficies de revolución. Una superficie de revolución está engendrada haciendo girar alrededor del eje de las x el arco CD (fig. 146) de la curva $y = f(x)$. Se desea medir el área de esa superficie, sirviéndonos del teorema fundamental.

Primer paso. Como antes, dividimos el intervalo AB en subintervalos Δx_1, Δx_2, etc., y levantamos ordenadas en los puntos de división. Trazamos las cuerdas CE, EF, etc. de la curva. Cuando la curva gira, cada cuerda engendra la superficie lateral de un tronco de cono de revolución. El área de la superficie de revolución se define como el límite de la suma de las áreas laterales de estos conos truncados.

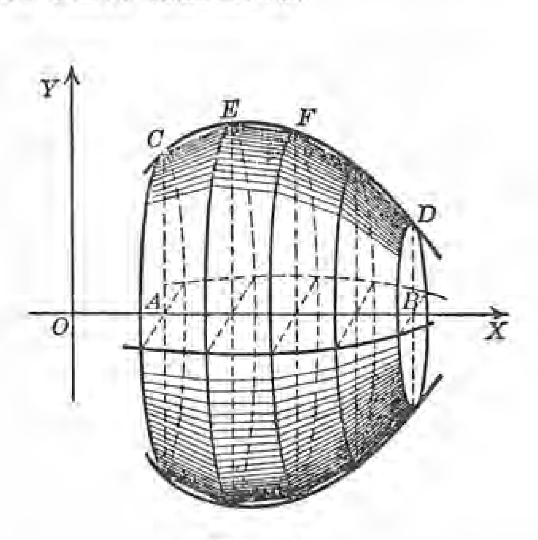



Fig. 146

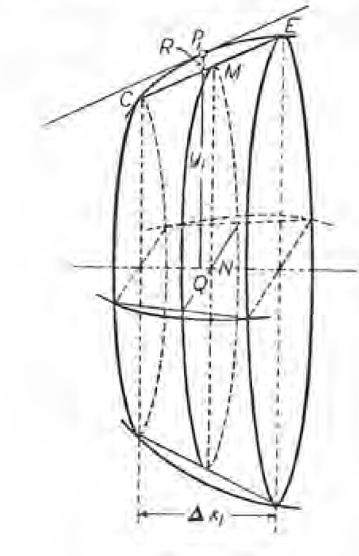


Fig. 147

Segundo paso. Para mayor claridad tracemos el primer tronco de cono en escala más grande (fig. 147). Sea M el punto medio de la cuerda CE. Entonces

(1) $$\text{Area lateral} = 2\,\pi NM \cdot CE. \ ^*$$

Para aplicar el teorema fundamental es necesario expresar este producto como función de la abscisa de algún punto del intervalo Δx_1. Como en el Artículo 162, empleando el teorema del valor medio, obtenemos la longitud de la cuerda,

(2) $$CE = [1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}}\,\Delta x_1,$$

en donde x_1 es la abscisa del punto $P_1(x_1, y_1)$, del arco CE, donde la tangente es paralela a la cuerda CE. Sea R el punto en que la recta horizontal trazada por M corta a QP_1 (la ordenada de P_1), y designemos RP_1 por ε_1.** Entonces

(3) $$NM = y_1 - \varepsilon_1.$$

* El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual a la circunferencia de la sección media multiplicada por el lado del tronco.

** El lector observará que cuando Δx_1 tiende a cero, ε_1 también tiende a cero.

Sustituyendo (2) y (3) en (1), obtenemos

$2\pi(y_1 - \varepsilon_1)[1 + f'(x_1)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_1 =$ área lateral del primer tronco de cono.

Análogamente,

$2\pi(y_2 - \varepsilon_2)[1 + f'(x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_2 =$ área lateral del segundo cono truncado.

. . . .

$2\pi(y_n - \varepsilon_n)[1 + f'(x_n)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_n =$ área lateral del último tronco de cono.

Luego

$\sum_{i=1}^{n} 2\pi(y_i - \varepsilon_i)[1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i =$ suma de las áreas laterales de los conos truncados.

Esto puede escribirse

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i - 2\pi \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

Tercer paso. Aplicando el teorema fundamental a la primera suma (empleando los límites $OA = a$ y $OB = b$), obtenemos

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i = \int_a^b 2\pi y [1 + f'(x)^2]^{\frac{1}{2}} dx.$$

El límite de la segunda suma de (4) cuando $n \to \infty$ es cero.* De aquí que el área de la superficie de revolución engendrada haciendo girar el arco CD alrededor de OX viene dada por la fórmula

$$(K) \qquad S_x = 2\pi \int_a^b y \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx,$$

* Esto se ve fácilmente como sigue: designemos la segunda suma por S_n. Si ε es igual al mayor de los números positivos $|\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_2|$, ..., $|\varepsilon_n|$, entonces

$$S_n \leqq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} [1 + f'(x_i)^2]^{\frac{1}{2}} \Delta x_i.$$

La suma de la derecha es igual, según el Artículo 162, a la suma de las cuerdas CE, EF, etc. Sea esta suma l_n. Entonces

$S_n \leqq \varepsilon l_n$. Puesto que $\lim_{n \to \infty} \varepsilon = 0$, S_n es un infinitésimo, y por tanto, $\lim_{n \to \infty} S_n = 0$.

en donde S_x representa el área buscada. También podemos escribir la fórmula en la forma

$$(L) \qquad S = 2\pi \int_a^b y\, ds.$$

Análogamente, cuando OY es el eje de giro empleamos la fórmula

$$(M) \qquad S_y = 2\pi \int_c^d x\, ds.$$

En **(L)** y **(M)**, ds tendrá una de las tres formas **(C)**, **(D)**, **(E)** del Artículo 95, a saber,

$$ds = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}.$$

De estas tres formas emplearemos la primera o la segunda según la variable independiente que hayamos elegido; la tercera, si la curva dada está definida por ecuaciones paramétricas. Para emplear **(L)** o **(M)**, hay que calcular ds en primer lugar.

La fórmula **(L)** se recuerda fácilmente si consideramos una faja angosta de la superficie, incluída entre dos planos perpendiculares al eje de revolución, y miramos esta faja como, aproximadamente, la superficie convexa de un tronco de cono de revolución de lado ds, con una sección media cuya circunferencia es igual a $2\pi y$, y, por tanto, de área $2\pi y\, ds$.

EJEMPLO 1. El arco de la parábola cúbica

$$(5) \qquad a^2 y = x^3.$$

comprendido entre $x = 0$ y $x = a$, gira alrededor de OX (fig. 148). Hallar el área de la superficie de revolución que se engendra.

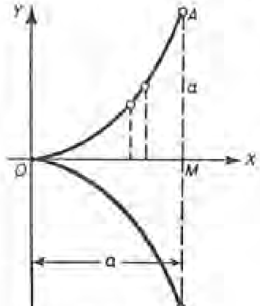


Fig. 148

Solución. Según (5), $y' = \frac{3x^2}{a^2}$.

Por tanto,

$$ds = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{a^2}(a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Luego, el elemento de área $= 2\pi y\, ds$

$$= \frac{2\pi}{a^4}(a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3\, dx.$$

Por tanto, según (L),

$$S_x = \frac{2\pi}{a^4}\int_0^a (a^4 + 9x^4)^{\frac{1}{2}} x^3\, dx = \frac{\pi}{27a^4}\left[(a^4 + 9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1)a^2 = 3.6\, a^2.$$

EJEMPLO 2. Hallar el área del elipsoide de revolución engendrado haciendo girar alrededor de OX la elipse cuyas ecuaciones paramétricas (véase (3) del Artículo 81) son $x = a\cos\phi$, $y = b \operatorname{sen}\phi$.

Solución. Tenemos

$$dx = -a \operatorname{sen}\phi\, d\phi, \quad dy = b\cos\phi\, d\phi,$$

y

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2 \operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}\, d\phi.$$

Luego, el elemento de área $= 2\,\pi y\, ds$

$$= 2\,\pi b\,(a^2 \operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi.$$

(6) $$\therefore \quad \tfrac{1}{2} S_x = 2\,\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi.$$

A fin de integrar, sea $u = \cos\phi$. Entonces, $du = -\operatorname{sen}\phi\, d\phi$. Además,

$$a^2 \operatorname{sen}^2\phi + b^2\cos^2\phi = a^2(1 - \cos^2\phi) + b^2\cos^2\phi = a^2 - (a^2 - b^2)\,u^2.$$

Por esto, empleando los nuevos límites $u = 1$, $u = 0$, e intercambiando los límites de u (Art. 150), el resultado es

$$\tfrac{1}{2} S_x = 2\,\pi b \int_0^1 [a^2 - (a^2 - b^2)\,u^2]^{\frac{1}{2}}\, du. \qquad (a > b)$$

Resolviendo esta integral aplicando la fórmula **(22)**, obtenemos

$$S_x = 2\,\pi b^2 + \frac{2\,\pi a b}{e} \operatorname{arc\,sen} e, \text{ en donde } e = \text{excentricidad} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

EJEMPLO 3. Hallar el área de la superficie de revolución que se engendra cuando la hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ gira alrededor del eje de las x.

Solución. Aquí, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\quad y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

$$ds = \left(1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx.$$

Sustituyendo en (L), observando que el arco BA engendra sólo una mitad de la superficie, obtenemos

$$\frac{S_x}{2} = 2\,\pi a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx.$$

Esta es una integral impropia, puesto que la función por integrar es discontinua (llega a ser infinita) cuando $x = 0$. Empleando la definición (1) del Artículo 154, el resultado es

$$\frac{S_x}{2} = \frac{6\,\pi a^2}{5}.$$

De donde,

$$S_x = \frac{12\,\pi a^2}{5}.$$

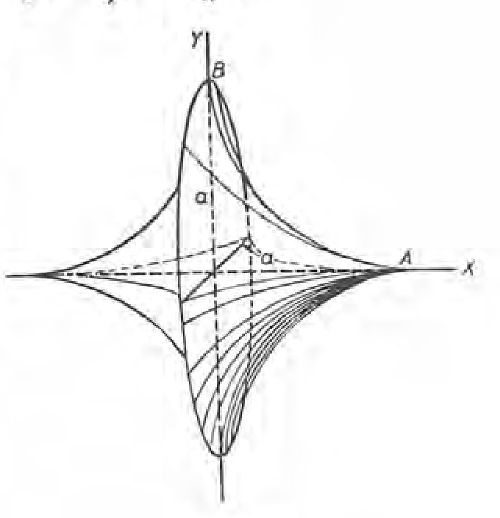


Fig. 149

PROBLEMAS

1. Hallar, por integración, el área de la superficie esférica engendrada haciendo girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de un diámetro. *Sol.* $4\pi r^2$.

2. Hallar, por integración, el área lateral del cono engendrado al hacer girar el segmento que une el origen con el punto (a, b) alrededor de OX.

Sol. $\pi b\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Hallar, por integración, el área lateral del cono que se engendra cuando la recta $y = 2x$, desde $x = 0$ a $x = 2$, gira: *a*) alrededor de OX; *b*) alrededor de OY. Verificar los resultados geométricamente.

4. Hallar, por integración, el área lateral del tronco de cono que se obtiene cuando el segmento de la recta $2y = x - 4$ desde $x = 0$ a $x = 5$, gira alrededor de OX. Verificar el resultado geométricamente.

5. Hallar el área de la superficie que se engendra cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 2$, gira alrededor de OY. *Sol.* $\frac{13}{3}\pi$.

6. Hallar el área de la superficie que se obtiene cuando el arco de la parábola $y = x^2$, desde $(0, 0)$ a $(2, 4)$ gira alrededor de OX.

7. Hallar el área de la superficie que se obtiene haciendo girar alrededor de OX el arco de la parábola $y^2 = 4 - x$ que está dentro del primer cuadrante.

Sol. 36,18.

8. Hallar el área de la superficie engendrada cuando el arco de la parábola $y^2 = 2px$ desde $x = 0$ a $x = 4p$, gira alrededor de OX. *Sol.* $\frac{52}{3}\pi p^2$.

9. Hallar el área de la superficie que se obtiene haciendo girar el arco de la curva $y = x^3$ desde $(0, 0)$ a $(2, 8)$, alrededor de OY.

Hallar el área de la superficie que se engendra cuando cada una de las siguientes curvas gira alrededor de OX.

10. $9y = x^3$, desde $x = 0$ a $x = 2$. *Sol.* $\frac{98}{81}\pi$.

11. $y^2 = 9x$, desde $x = 0$ a $x = 4$. 49π.

12. $y^2 = 24 - 4x$, desde $x = 3$ a $x = 6$. $\frac{56}{3}\pi$.

13. $6y = x^2$, desde $x = 0$ a $x = 4$. $\dfrac{(820 - 81 \ln 3)\pi}{72}$.

14. $y = e^{-x}$, desde $x = 0$ a $x = \infty$. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

15. El lazo de $9ay^2 = x(3a - x)^2$. $3\pi a^2$.

16. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$, desde $x = a$ a $x = 2a$. $\frac{47}{16}\pi a^2$.

17. Un lazo de $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$. $\frac{1}{4}\pi a^2$.

18. $y^2 + 4x = 2 \log y$, desde $y = 1$ a $y = 2$. $\frac{10}{3}\pi$.

19. La cicloide $\begin{cases} x = a(\theta - \text{sen}\ \theta), \\ y = a(1 - \cos\theta), \end{cases}$ *Sol.* $\frac{64}{3}\pi a^2$.

20. La cardioide $\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta), \\ y = a(2\ \text{sen}\ \theta - \text{sen}\ 2\theta). \end{cases}$ $\frac{128}{5}\pi a^2$.

21. $y^2 = 4x$, desde $x = 0$ a $x = 3$.

22. $x^2 + y^2 = 4$, desde $x = 1$ a $x = 2$.

23. $x^2 + 4y^2 = 36$.

24. $9x^2 + 4y^2 = 36$.

Hallar el área de la superficie que se obtiene al hacer girar cada una de las siguientes curvas alrededor de OY.

25. $x = y^3$, desde $y = 0$ a $y = 3$. *Sol.* $\frac{1}{27}\pi[(730)^{\frac{3}{2}} - 1]$.

26. $y = x^3$, desde $y = 0$ a $y = 3$.

27. $6a^2xy = x^4 + 3a^4$, desde $x = a$ a $x = 3a$. $(20 + \ln 3)\pi a^2$.

28. $4y = x^2 - 2\ln x$, desde $x = 1$ a $x = 4$. 24π.

29. $2y = x\sqrt{x^2-1} + \ln(x - \sqrt{x^2-1})$, desde $x = 2$ a $x = 5$. *Sol.* 78π.

30. $y^2 = x^3$, desde $x = 0$ a $x = 8$. 713.

31. $4y = x^2$, desde $y = 0$ a $y = 4$.

32. $x^2 + 4y^2 = 16$.

33. $4x^2 + y^2 = 64$.

34. $9x = y^3$, desde $y = 0$ a $y = 3$.

Hallar el área de la superficie que se engendra cuando cada una de las siguientes curvas gira alrededor de OX o OY.

	Alrededor de OX *Solución*	*Alrededor de* OY *Solución*
35. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.		$2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$.
SUGESTION. e = excentricidad de la elipse $= \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.		
36. La catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, desde $x = 0$ a $x = a$. (Figura 261.)	$\frac{\pi a^2}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$.	$2\pi a^2(1 - e^{-1})$.
37. $x^4 + 3 = 6xy$, desde $x = 1$ a $x = 2$.	$\frac{47}{16}\pi$.	$\pi(\frac{15}{4} + \ln 2)$.
38. $\begin{cases} x = e^\theta\ \text{sen}\ \theta, \\ y = e^\theta \cos\theta, \end{cases}$ desde $\theta = 0$ a $\frac{\pi}{2}$.	$\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(e^\pi - 2)$.	$\frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(2e^\pi + 1)$.
39. $3x^2 + 4y^2 = 3a^2$	$\left(\frac{3}{2} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\pi a^2$.	$(4 + 3\ln 3)\frac{\pi a^2}{2}$.

40. La pendiente de la tractriz en cualquier punto de la curva del primer cuadrante viene dada por la fórmula $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{c^2 - y^2}}$. Demostrar que la superficie que se obtiene haciendo girar alrededor de OX el arco que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), sobre la tractriz, es $2\pi c(y_1 - y_2)$. (Fig. 290.)

41. Se hace girar alrededor de OX la superficie del primer cuadrante limitada por las curvas cuyas ecuaciones son $y = x^3$ y $y = 4x$. Hallar el área total de la superficie del sólido que se obtiene. *Sol.* 410,3.

42. Se hace girar alrededor de OY la superficie limitada por el eje de las y y las curvas cuyas ecuaciones son $x^2 = 4y$ y $x - 2y + 4 = 0$. Hallar el área total de la superficie del sólido que se engendra. *Sol.* 141,5.

43. Hallar el área de la superficie que se engendra cuando se hace girar alrededor de OX el arco de la curva cuya ecuación es $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ desde $x = 1$ a $x = 3$.

Sol. $\frac{208\pi}{9}$.

44. Hallar el área total de la superficie del sólido que se engendra cuando la superficie limitada por las dos parábolas $y^2 = 4x$ y $y^2 = x + 3$ gira alrededor de OX.

Sol. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} + 32\sqrt{2} - 17) = 51,53$.

45. Hallar el área de la superficie que se obtiene haciendo girar una arcada de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor de OX. *Sol.* 14,42.

165. Sólidos cuyas secciones transversales se conocen. En el Artículo 160 hemos estudiado el volumen de un sólido de revolución, tal como el de la figura 150. Todas las secciones transversales por planos perpendiculares al eje de las x son círculos. Si $OM = x$, $MC = y$, entonces

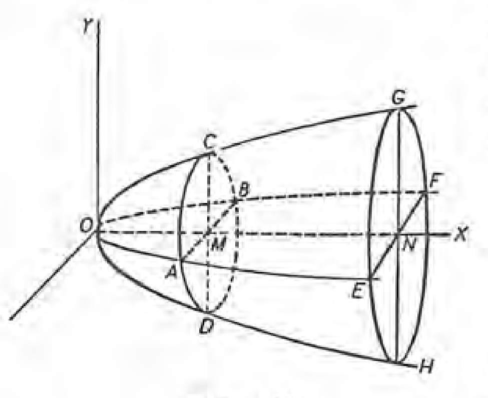


Fig. 150

(1) Área de la sección transversal $ACBD = \pi y^2$

$$= \pi[\phi(x)]^2,$$

si $y = \phi(x)$ es la ecuación de la curva engendradora OCG. *Por tanto, el área de la sección transversal por cualquier plano perpendicular a* OX *es una función de su distancia* (= x) *al punto* O.

Ahora vamos a estudiar el cálculo de volúmenes de sólidos que no son de revolución, cuando es posible expresar el área de una sección cualquiera del sólido, que sea perpendicular a una recta fija (como OX), como función de su distancia de un punto fijo (como O).

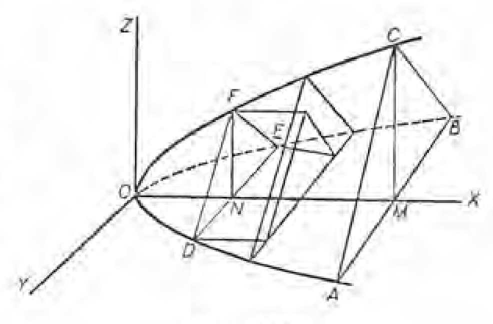


Fig. 151

Dividamos el sólido en n rebanadas, cada una de espesor Δx, por secciones equidistantes perpendiculares a OX.

Sea FDE una cara de una de las rebanadas y sea $ON = x$. Entonces, por hipótesis,

$$(2) \qquad \text{Area } FDE = A(x).$$

El volumen de esta rebanada es igual, aproximadamente, a

$$(3) \qquad \text{Area } FDE \times \Delta x = A(x)\Delta x \text{ (base} \times \text{altura)}.$$

Entonces $\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x_i$ = suma de los volúmenes de todos esos prismas. Es evidente que el volumen pedido es el límite de esta suma; por tanto, según el teorema fundamental,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\,\Delta x_i = \int A(x)dx,$$

y, por lo tanto, tenemos la fórmula

$$(N) \qquad V = \int A(x)\,dx,$$

en donde $A(x)$ está definida por (2).

El elemento de volumen es un prisma (en algunos casos, un cilindro) cuya altura es dx y cuya base tiene de área $A(x)$. Es decir,

$$dV = A(x)\,dx.$$

EJEMPLO 1. La base de un sólido es un círculo de radio r (fig. 152). Todas las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados. Hallar el volumen del sólido.

Solución. Sea la base el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ en el plano XY, y OX el diámetro fijo. Según el enunciado la sección $PQRS$ perpendicular a OX es un cuadrado, cuya área es $4\,y^2$, si $PQ = 2\,y$. (En la figura se ha suprimido la parte del sólido a la derecha de la sección $PQRS$.)

Por tanto, $A(x) = 4\,y^2 = 4(r^2 - x^2)$, y según (N)

$$\text{Volumen} = 4\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx$$
$$= \frac{16}{3}r^3.$$

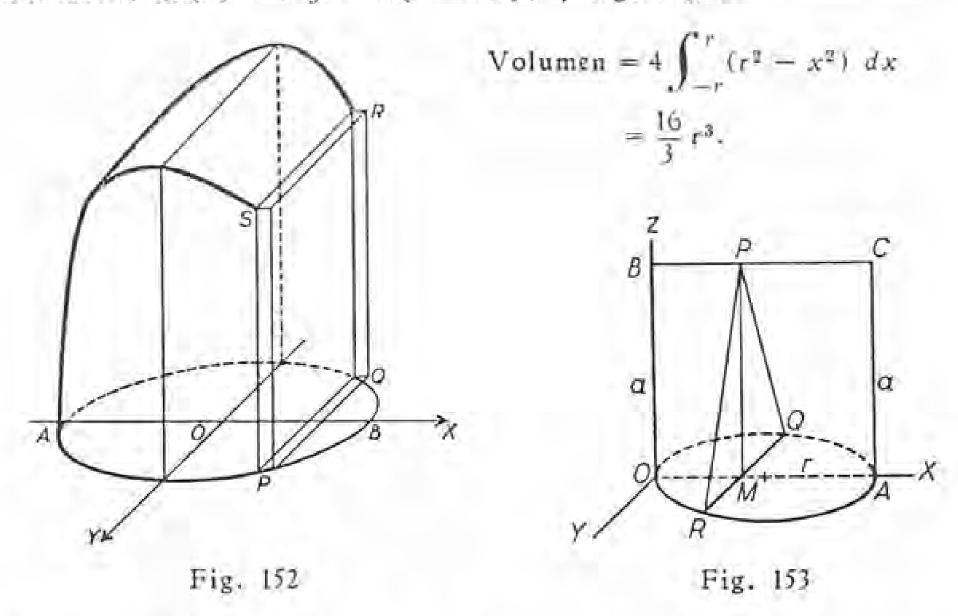


Fig. 152 Fig. 153

EJEMPLO 2. Hallar el volumen de un conoide recto de altura a, con base circular de radio r.

Solución. Colocando el conoide como muestra la figura 153, consideremos una sección PQR perpendicular a OX. Esta sección es un triángulo isósceles, y puesto que

$$RM = \sqrt{2\,rx - x^2}$$

(este valor se obtiene despejando y de la ecuación $x^2 + y^2 = 2\,rx$, que es la ecuación de la circunferencia $ORAQ$), y

$$MP = a,$$

el área de la sección es

$$a\sqrt{2\,rx - x^2} = A\,(x).$$

Sustituyendo en (N), tendremos

$$V = a\int_0^{2r}\sqrt{2\,rx - x^2}\,dx = \frac{\pi r^2 a}{2}.$$

Esta fórmula nos dice que el volumen del conoide es la mitad del volumen del cilindro de la misma base y altura.

EJEMPLO 3. Calcular el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mediante una sola integración.

Solución. Consideremos una sección del elipsoide perpendicular a OX, como $ABCD$ (fig. 154) con los semiejes b' y c'. La ecuación de la elipse $HEJG$ en el plano XOY es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

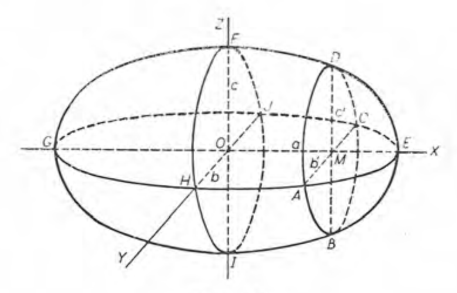


Fig. 154

Despejando y $(= b')$ de esta ecuación en función de $x\,(= OM)$, obtenemos

$$b' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

De la misma manera, de la ecuación de la elipse $EFGI$ en el plano XOZ obtenemos

$$c' = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Luego el área de la elipse (sección) $ABCD$ es

$$\pi b'c' = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) = A(x).$$

Sustituyendo en (N), resulta, finalmente,

$$V = \frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{+a}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

PROBLEMAS

1. Un sólido tiene base circular de radio r. El segmento AB es un diámetro de la base. Hallar el volumen del sólido si cada sección plana perpendicular a AB es:

a) un triángulo equilátero; *Sol.* $\frac{4}{3}r^3\sqrt{3}$.

b) un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa está en el plano de la base. *Sol.* $\frac{4}{3}r^3$

c) un triángulo rectángulo isósceles con cateto en el plano de la base; *Sol.* $\frac{8}{3}r^3$.

d) un triángulo isósceles de 20 cm de altura; *Sol.* $10\,\pi r^2$.

e) un triángulo isósceles con altura igual a su base. $\frac{8}{3}\,r^3$.

2. La base de un sólido tiene la forma de una elipse con eje mayor de 20 cm y eje menor de 10 cm. Hallar el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje mayor es:

a) un cuadrado; *Sol.* 1 333 cm^3.

b) un triángulo equilátero; 577,3 cm^3.

c) un triángulo isósceles de 10 cm de altura. 785,4 cm^3.

3. La base de un sólido es el segmento parabólico obtenido cortando la curva por una cuerda perpendicular a su eje. La cuerda tiene 16 cm de largo y dista 8 cm del vértice de la parábola. Hallar el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje de la base es:

a) un cuadrado; *Sol.* 1 024 cm^3.

b) un triángulo equilátero; 443,4 cm^3.

c) un triángulo isósceles de 10 cm de altura. 426,7 cm^3.

4. Una pelota de fútbol americano tiene 16 pulgadas de largo, y una sección plana que contiene una costura es una elipse cuyo diámetro menor es de 8 pulgadas. Hallar el volumen: *a*) si el cuero está tan estirado que cada sección transversal es un cuadrado; *b*) si la sección transversal es un círculo.

Sol. *a*) $341\frac{1}{3}$ pulgadas cúbicas; *b*) 535,9 pulgadas cúbicas.

5. De un cilindro de 5 cm de radio se corta una cuña mediante dos planos: uno es perpendicular al eje del cilindro, y el otro pasa por un diámetro de la sección hecha por el primer plano y forma con éste un ángulo de 45°. Hallar el volumen de la cuña. *Sol.* $\frac{250}{3}$ cm^3.

6. Los ejes de dos cilindros de igual radio r se cortan en ángulo recto. Hallar el volumen de la parte común a los dos cuerpos. *Sol.* $\frac{16}{3}\,r^3$.

7. Un círculo de radio a se mueve de manera que su centro describe una circunferencia de igual radio, mientras su plano se mantiene paralelo a un plano dado que es perpendicular al plano del círculo dado. Hallar el volumen del sólido que se engendra. *Sol.* $\frac{2}{3}\,a^3(3\pi + 8)$.

8. Un triángulo equilátero variable se mueve de manera que su plano se mantiene perpendicular al eje de las x, mientras que los vértices de su base se apoyan sobre las curvas $y^2 = 16\,ax$ y $y^2 = 4\,ax$, situadas por encima del eje de las x. Hallar el volumen que el triángulo engendra cuando se mueve del origen a los puntos cuya abscisa es a. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}\;a^3$

9. Un rectángulo se mueve desde un punto fijo. Un lado del rectángulo es siempre igual a la distancia de este punto, y el otro es igual al cuadrado de esta distancia. ¿Qué volumen se engendra cuando el rectángulo se mueve 2 metros?

Sol. 4 m^3.

10. Sobre las ordenadas dobles de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, se construyen triángulos isósceles de ángulo en el vértice de 90°, en planos perpendiculares al de la elipse. Hallar el volumen del sólido que se engendra si tal triángulo variable se mueve de un extremo a otro del eje horizontal de la elipse.

Sol. $\frac{4}{3}ab^2$.

Calcular los volúmenes limitados por las siguientes superficies de segundo grado y los planos dados.

11. $z = x^2 + 4y^2$; $z = 1$. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$.

12. $4x^2 + 9z^2 + y = 0$; $y + 1 = 0$. $\frac{1}{12}\pi$.

13. $x^2 + 4y^2 = 1 + z^2$; $z + 1 = 0$; $z - 1 = 0$. $\frac{4}{3}\pi$.

14. $25y^2 + 9z^2 = 1 + x^2$; $x = 0$; $x = 2$. $\frac{14}{45}\pi$.

15. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. $\frac{2}{9}\pi$.

16. $z^2 = x^2 + 9y^2$; $z + 1 = 0$. $\frac{1}{9}\pi$.

17. Se dan la parábola $z = 4 - x^2$, en el plano XZ, y el círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano XY. Por cada punto de la parábola que está por encima del círculo se trazan dos rectas paralelas al plano YZ que se apoyan en la circunferencia, limitando un sólido en forma de cuña. Calcular el volumen de este sólido.

Sol. 6π.

18. Hallar el volumen del sólido limitado por el hiperboloide de una hoja $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$ y los planos $x = 0$ y $x = a$. *Sol.* $\frac{4}{3}\pi abc$.

19. Un sólido está limitado por una hoja del hiperboloide de dos hojas $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ y el plano $x = 2a$. Hallar el volumen. *Sol.* $\frac{4}{3}\pi abc$.

20. Hallar el volumen del sólido limitado por la superficie

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$ *Sol.* $\frac{8}{5}\pi abc$.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Hallar el área del lazo de la curva

$$y^2 = (x + 4)(x^2 - x + 2y - 4).$$ *Sol.* $\frac{256}{15}$.

2. Un punto se mueve a lo largo de una parábola de manera que la razón de las áreas descritas por el radio vector que lo une con el foco a los tiempos empleados en describirlas es una cantidad constante. Si el punto se mueve del vértice a un extremo del lado recto en un segundo, ¿cuál será su posición después de los 8 segundos siguientes? *Sol.* Distancia del foco = $\frac{5}{2}$ lado recto.

3. Hallar el perímetro de la figura limitada por la recta $y = 1$ y la curva $4\,y = e^{2x} + e^{-2x}$. *Sol.* $\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) = 3{,}05$.

4. El arco OP de la curva $xy = x - y$ une el origen con el punto $P(x_1, y_1)$, y limita, con el eje de las x y la recta $x = x_1$, una área A. El mismo arco limita, con el eje de las y y la recta $y = y_1$, una área B. Demostrar que los volúmenes que se obtienen haciendo girar A alrededor del eje de las x y B alrededor del eje de las y son iguales.

5. La superficie limitada por la curva $16\,y^2 = (x + 4)^3$ y su tangente en el punto (12, 16) gira alrededor del eje de las x. Hallar el volumen engendrado.

Sol. $\frac{1\,024}{9}\pi$.

6. La base de un sólido es el área limitada por la parábola $y^2 = 2\,px$ y su lado recto (cuerda trazada por el foco, perpendicularmente al eje de simetría). Cada sección del sólido hecha por un plano perpendicular al lado recto es un rectángulo cuya altura es igual a la distancia entre la sección y el eje de la parábola. Hallar el volumen del sólido. *Sol.* $\frac{1}{4}\,p^3$.

7. Dada la elipse $9\,x^2 + 25\,y^2 = 225$, alrededor de esta curva se forma un sólido de manera que todas las secciones planas perpendiculares al eje de las x son elipses cuyos focos están sobre la elipse dada. Los ejes mayor y menor de cada sección son proporcionales a los de la elipse dada. Hallar el volumen del sólido *Sol.* $\frac{225}{4}\pi$.

8. Sea (x, y) un punto sobre la curva del Artículo 159, siendo O el origen y OA el eje de las x. Demostrar que (D) puede escribirse

$$\text{(1)} \qquad \text{Area} = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

empleando la transformación (5) del Artículo 3. Los límites se determinan por las coordenadas de los extremos de la curva.

9. Obtener la fórmula del problema anterior directamente de una figura, empleando (B) y (C) del Artículo 158.

La fórmula (1) del problema 8 es útil para las ecuaciones paramétricas. Utilizando esta fórmula hallar las áreas siguientes:

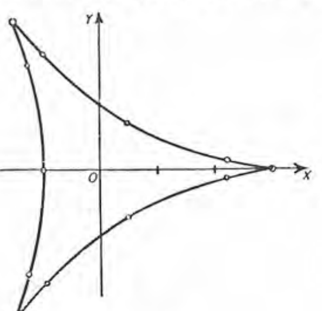


Fig. 155

10. El área entre la evolvente de un círculo

$$x = r\cos\theta + r\theta\,\text{sen}\,\theta,$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta - r\theta\cos\theta$$

y el eje de las x prolongado hacia la izquierda, en la figura 289 (Cap. XXVI).

11. El área total de la hipocicloide de tres cúspides (fig. 155)

$$\begin{cases} x = 2\,r\cos\theta + r\cos 2\,\theta, \\ y = 2\,r\,\text{sen}\,\theta - r\,\text{sen}\,2\,\theta. \end{cases}$$

Sol. $2\,\pi r^2$.

12. Un alambre recto y uniforme atrae una partícula P según la ley de la gravitación. La partícula está en la recta del alambre pero no en el alambre. Demostrar que el alambre atrae la partícula como si la masa del alambre estuviera concentrada en un punto del alambre cuya distancia a P es la media proporcional de las distancias de P a los extremos del alambre.

13. Hallar el área del lazo de la hoja de Descartes (fig. 156)

$$x^3 + y^3 = 3\,axy.$$

SUGESTION. Sea $y = tx$;

entonces $$x = \frac{3\,at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3\,at^2}{1+t^3}$$

y $$dx = \frac{1-2\,t^3}{(1+t^3)^2}\,3\,a\,dt.$$

Los límites para t son 0 y ∞.

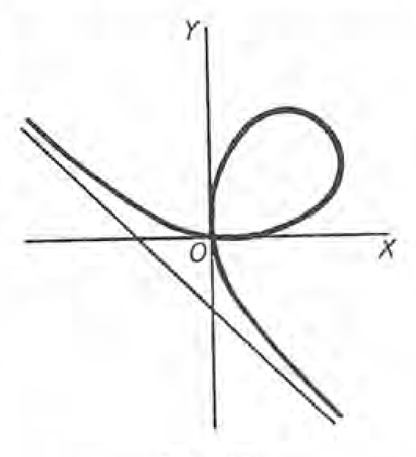


Fig. 156

CAPITULO XVI

ARTIFICIOS DE INTEGRACION

166. Introducción. La integración depende en última instancia del empleo de una tabla de integrales. Cuando en un caso dado no se encuentra en la tabla ninguna forma semejante a la integral dada, a menudo es posible transformar la integral de manera que se puedan aplicar las fórmulas de las tablas. Los artificios que suelen emplearse son

a) *integración por partes* (Art. 136),

b) *aplicación de la teoría de las fracciones racionales,*

c) *empleo de una sustitución conveniente.*

Ahora vamos a estudiar (b) y (c).

167. Integración de fracciones racionales. Una fracción racional es aquella cuyo numerador y denominador son funciones racionales enteras, es decir, funciones en que la variable no está afectada de exponentes negativos o fraccionarios. Si el grado del numerador es igual o mayor al del denominador, la fracción puede reducirse a una expresión mixta dividiendo el numerador por el denominador. Por ejemplo,

$$\frac{x^4 + 3x^3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 + x - 3 + \frac{5x + 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

El último término es una fracción reducida a su más simple expresión, con numerador cuyo grado es menor que el del denominador. Fácilmente se ve que los otros términos pueden integrarse inmediatamente; por tanto, solamente tenemos que considerar la fracción reducida.

Para integrar una expresión diferencial que contenga tal fracción, a menudo es necesario descomponerla en fracciones parciales más

simples, es decir, reemplazarla por la suma algebraica de fracciones cuyas formas nos permitan completar la integración. En Algebra superior se demuestra que esto es siempre posible cuando el denominador puede descomponerse en factores primos reales. *

Caso I. *Los factores del denominador son todos de primer grado, y ningún factor se repite.*

Corresponde a cada factor no repetido de primer grado, como $x - a$, una fracción parcial de la forma

$$\frac{A}{x-a},$$

siendo A constante. La fracción dada puede expresarse como una suma de fracciones de esta forma. Los ejemplos muestran el método.

EJEMPLO. Hallar $\int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$.

Solución. Los factores del denominador son x, $x-1$, $x+2$. Supongamos **

$$(1) \qquad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

en donde A, B, C son constantes por determinar.

Quitando denominadores de (1), obtenemos

$$(2) \qquad 2x+3 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + C(x-1)x.$$

$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A.$$

Puesto que esta ecuación es una identidad, igualamos los coeficientes de las mismas potencias de x en los dos miembros y obtenemos tres ecuaciones simultáneas

$$(3) \qquad \begin{cases} A+B+C = 0, \\ A+2B-C = 2, \\ \qquad -2A = 3. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3), obtenemos

$$A = -\frac{3}{2}, \qquad B = \frac{5}{3}, \qquad C = -\frac{1}{6}.$$

* Véase *Advanced Algebra*, por Hawkes.

** En el proceso de descomponer la parte fraccionaria de la diferencial dada, no entra ni el signo integral ni dx.

Sustituyendo estos valores en (1), resulta

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = -\frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}\,dx = -\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= -\tfrac{3}{2}\ln x + \tfrac{5}{3}\ln(x-1) - \tfrac{1}{6}\ln(x+2) + \ln c$$

$$= \ln\frac{c(x-1)^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}(x+2)^{\frac{1}{6}}}.$$

Un método más breve para obtener de (2) los valores de A, B y C es el siguiente:

Sea el factor $x = 0$; entonces $3 = -2A$; $A = -\tfrac{3}{2}$.

Sea el factor $x - 1 = 0$, o sea, $x = 1$; entonces $5 = 3B$; $B = \tfrac{5}{3}$.

Sea el factor $x + 2 = 0$, o sea, $x = -2$; entonces $-1 = 6C$; $C = -\tfrac{1}{6}$.

En todos los casos, *el número de constantes por determinar es igual al grado del denominador*.

Caso II. *Los factores del denominador son todos de primer grado, y algunos se repiten*.

En este caso a todo factor de primer grado repetido n veces, como $(x-a)^n$, corresponde la suma de n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{L}{x-a},$$

en donde A, B, ..., L son constantes. Estas fracciones parciales se integran fácilmente. Por ejemplo,

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int(x-a)^{-n}\,dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

EJEMPLO. Hallar $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$.

Solución. Puesto que $x - 1$ entra tres veces como factor, suponemos

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Quitando denominadores,

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2.$$

$$x^3 + 1 = (A+D)x^3 + (-3A + C - 2D)x^2 + (3A + B - C + D)x - A.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos las ecuaciones simultáneas

$$A + D = 1,$$
$$-3A + C - 2D = 0,$$
$$3A + B - C + D = 0,$$
$$-A = 1.$$

Resolviendo este sistema, se obtiene $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = 2$, y

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\ln x - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln(x-1) + C$$

$$= -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{x} + C.$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\displaystyle\int \frac{(4x-2)\,dx}{x^3 - x^2 - 2x} = \ln\frac{x^2-2x}{(x+1)^2} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{(5x^2-3)\,dx}{x^3 - x} = \ln x^3(x^2-1) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{(4x+3)\,dx}{4x^3 + 8x^2 + 3x} = -\frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x+3)}{x^2} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{(4x^3+2x^2+1)\,dx}{4x^3 - x} = x + \frac{1}{2}\ln\frac{(2x+1)(2x-1)^2}{x^2} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{(3x^2+5x)\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \ln(x+1)(x-1)^2 - \frac{1}{x+1} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{z^2\,dz}{(z-1)^3} = \ln(z-1) - \frac{2}{z-1} - \frac{1}{2(z-1)^2} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{(y^4-8)\,dy}{y^3 + 2y^2} = \frac{y^2}{2} - 2y + \frac{4}{y} + 2\ln(y^2+2y) + C.$

8. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-3)\,dx}{x^3 + x^2} = 4\ln\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -0{,}3492.$

9. $\displaystyle\int_2^4 \frac{(x^3-2)\,dx}{x^3 - x^2} = \frac{5}{2} + \ln\frac{4}{3} = 2{,}7877.$

10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{(2-x^2)\,dx}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \ln\frac{9}{10} = -0{,}1054.$

11. $\int_2^3 \frac{(3-x)\,dx}{x^3+4x^2+3x} = \ln\frac{81}{80} = 0{,}0125.$

12. $\int_0^1 \frac{(3x^2+7x)\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \ln\frac{4}{3} = 0{,}2877.$

13. $\int_0^5 \frac{(x^2-3)\,dx}{(x+2)(x+1)^2} = \ln\frac{7}{2} - \frac{5}{3} = -0{,}4139.$

14. $\int_0^4 \frac{9x^2\,dx}{(2x+1)(x+2)^2} = 5\ln 3 - 4 = 1{,}4930.$

Calcular cada una de las siguientes integrales.

15. $\int \frac{8\,dx}{x^3-4x}.$

16. $\int \frac{(5x^2-9)\,dx}{x^3-9x}.$

17. $\int \frac{(3z+7)\,dz}{(z+1)(z+2)(z+3)}.$

18. $\int \frac{(3x^2+11x+2)\,dx}{(x+3)(x^2-1)}.$

19. $\int \frac{x^2\,dx}{(2x+3)(4x^2-1)}.$

20. $\int \frac{(t^4+1)\,dt}{t^3-t}.$

21. $\int \frac{(x^2-x-5)\,dx}{x^3+5x^2}.$

22. $\int \frac{(5x^2+14x+10)\,dx}{(x+2)(x+1)^2}.$

23. $\int \frac{(24y^2+10y+5)\,dy}{(2y-1)(2y+1)^2}.$

24. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^4+2x^3+x^2}.$

25. $\int \frac{(x^3-2x-4)\,dx}{x^4+2x^3}.$

26. $\int \frac{(2x^2+1)\,dx}{(x-2)^3}.$

27. $\int \frac{(y^4-3y^3)\,dy}{(y^2-1)(y-2)}.$

28. $\int \frac{(2t^4+3t^3-20t-28)\,dt}{(t^2-4)(2t-1)}.$

Caso III. *El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos factores se repite.*

A todo factor no repetido de segundo grado, como x^2+px+q, corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}.$$

El método de integrar una expresión de esta forma se ha explicado en la página 252 (ejemplo 2).

Si p no es cero, completamos el cuadrado en el denominador,

$$x^2+px+\frac{1}{4}p^2+q-\frac{1}{4}p^2=\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+\frac{1}{4}(4q-p^2). \quad (4q>p^2)$$

Hagamos $x + \frac{1}{2} p = u$. Entonces $x = u - \frac{1}{2} p$, $dx = du$. Sustituyendo estos valores, la nueva integral, en función de la variable u, se integra fácilmente.

EJEMPLO 1. Hallar $\int \frac{4\,dx}{x^3 + 4x}$.

Solución. Supóngase que $\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$.

Quitando denominadores,

$$4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C) = (A + B)x^2 + Cx + 4A.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad 4A = 4.$$

Esto da $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, de manera que

$$\frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{4\,dx}{x(x^2+4)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+4}$$

$$= \ln x - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + \ln c = \ln \frac{cx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

EJEMPLO 2. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{x^3 + 8} = \frac{1}{24} \ln \frac{(x+2)^2}{x^2 - 2x + 4} + \frac{1}{12}\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Solución. Descomponiendo en factores $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 4} + \frac{C}{x+2},$$

$$1 = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 - 2x + 4),$$

$$1 = (A + C)x^2 + (2A + B - 2C)x + 2B + 4C.$$

Entonces,

$$A = -\tfrac{1}{12}, \quad B = \tfrac{1}{3}, \quad C = \tfrac{1}{12}.$$

Por tanto,

$$(4) \quad \int \frac{dx}{x^3+8} = \int \frac{-\frac{1}{12}x + \frac{1}{3}}{x^2 - 2x + 4}\,dx + \int \frac{\frac{1}{12}\,dx}{x+2}.$$

$$= \frac{1}{12} \int \frac{4 - x}{x^2 - 2x + 4}\,dx + \frac{1}{12} \ln (x + 2) + C.$$

Ahora bien,

$$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 = u^2 + 3, \text{ si } x - 1 = u.$$

Entonces $x = u + 1$, $dx = du$, y

$$\int \frac{4 - x}{x^2 - 2x + 4} dx = \int \frac{3 - u}{u^2 + 3} du = \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \ln (u^2 + 3).$$

Sustituyendo ahora $u = x - 1$, empleando (4) y reduciendo, tenemos la solución.

Caso IV. *El denominador contiene factores de segundo grado y algunos de estos se repiten.*

A todo factor de segundo grado repetido n veces, como

$$(x^2 + px + q)^n,$$

corresponderá la suma de n fracciones parciales, de la forma

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + \dots + \frac{Lx + M}{x^2 + px + q}.$$

A fin de llevar a cabo la integración, se necesita la "fórmula de reducción"

$$(5) \qquad \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{u}{(u^2 + a^2)^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{n-1}} \right],$$

que se demuestra en el capítulo siguiente. Si $n > 2$, es necesario repetir la aplicación de (5). Si p no es cero, completamos el cuadrado

$$x^2 + px + q = (x + \tfrac{1}{2} p)^2 + \tfrac{1}{4}(4q - p^2) = u^2 + a^2, \text{ etc.},$$

como antes.

EJEMPLO. Demostrar que

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} dx = \ln (x^2 + 1) + \frac{1 + 3x}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Solución. Puesto que $x^2 + 1$ entra dos veces como factor, suponemos

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Quitando denominadores,

$$2x^3 + x + 3 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1).$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, y resolviendo, obtenemos

$$A = -1, \quad B = 3, \quad C = 2, \quad D = 0.$$

Luego $\displaystyle\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-x+3}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{2x\,dx}{x^2+1}$

$$= \ln(x^2+1) - \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

El valor de la primera de estas dos integrales se determina por la fórmula (4) del Artículo 128; el de la segunda por la de reducción (5), que acabamos de dar, haciendo $u = x$, $a = 1$, $n = 2$. De este modo obtenemos

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arc\,tg} x\right] + C.$$

Reduciendo, tenemos la solución.

Conclusión. Puesto que toda función racional puede reducirse al cociente de dos funciones racionales enteras, es decir, a una fracción racional, se sigue, de la discusión anterior, que toda función racional cuyo denominador podamos descomponer en factores reales de primero y segundo grado, puede expresarse como suma algebraica de funciones racionales enteras y fracciones parciales. Hemos mostrado cómo se deben integrar todas las formas posibles de los términos de esta suma. Resulta, entonces, el teorema siguiente:

Teorema. *La integral de toda función racional cuyo denominador es posible descomponer en factores reales de primero y segundo grados puede hallarse, y puede expresarse en términos de funciones algebraicas, logarítmicas y trigonométricas inversas; es decir, en términos de las funciones elementales.*

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones.

1. $\displaystyle\int \frac{(4x^2+6)\,dx}{x^3+3x} = \ln x^2(x^2+3) + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{(x^2+x)\,dx}{(x-1)(x^2+1)} = \ln(x-1) + \operatorname{arc\,tg} x + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{(2t^2-8t-8)\,dt}{(t-2)(t^2+4)} = 2\ln\frac{t^2+4}{t-2} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{(x^2+x-10)\,dx}{(2x-3)(x^2+4)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+4}{2x-3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} + C.$

5. $\int \frac{(x-18)\,dx}{4x^3+9x} = \ln \frac{4x^2+9}{x^2} + \frac{1}{6} \text{arc tg} \frac{2x}{3} + C.$

6. $\int \frac{(2y^3+y^2+2y+2)\,dy}{y^4+3y^2+2} = \ln(y^2+2) + \text{arc tg } y + C.$

7. $\int \frac{dz}{z^4+z^2} = -\frac{1}{z} - \text{arc tg } z + C.$

8. $\int \frac{2x\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \text{arc tg } x + \frac{1}{x+1} + C.$

9. $\int \frac{(x^3+3x)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{x^2+1} + C.$

10. $\int \frac{(x^5+9x^3-9x^2-9)\,dx}{x^3+9x} = \frac{x^3}{3} - \ln x(x^2+9)^4 + C.$

11. $\int \frac{(4x^2+2x+8)\,dx}{x(x^2+2)^2} = \ln \frac{x^2}{x^2+2} + \frac{x}{2x^2+4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \text{arc tg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

12. $\int \frac{t^5\,dt}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2}{2} - 4\ln(t^2+4) - \frac{8}{t^2+4} + C.$

13. $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x} = -\frac{1}{2}\ln \frac{x^2+x+1}{x^2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{arc tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

14. $\int \frac{(x^5+4x^3)\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{1}{(x^2+2)^2} + C.$

15. $\int \frac{4\,dx}{x^4-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} - 2\,\text{arc tg } x + C.$

16. $\int \frac{(2z^2+3z+2)\,dz}{(z+2)(z^2+2z+2)} = 2\ln(z+2) - \text{arc tg }(z+1) + C.$

17. $\int \left(\frac{t+3}{t^2+4t+5}\right)^2 dt = \text{arc tg }(t+2) - \frac{1}{t^2+4t+5} + C.$

18. $\int_1^4 \frac{(5x^2+4)\,dx}{x^3+4x} = 3\ln 4 = 4{,}1589.$

19. $\int_0^1 \frac{5x\,dx}{(x+2)(x^2+1)} = \ln \frac{8}{9} + \frac{\pi}{4} = 0{,}667.$

20. $\int_0^1 \frac{(2x^2+x+3)\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = \ln 4 + \frac{\pi}{4} = 2{,}171.$

21. $\int_0^1 \frac{(4x^2+2x)\,dx}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \ln 2 = 0{,}592.$

22. $\int_3^4 \frac{(5t^3-4t)\,dt}{t^4-16} = \ln \frac{12}{5} + \frac{3}{2}\ln \frac{20}{13} = 1{,}522.$

23. $\int_0^2 \frac{(z^3+2z^2+6z+8)\,dz}{(z^2+4)^2} = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8} = 1{,}257.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales.

24. $\int \frac{(6x^2 + 3x + 4)\,dx}{x^3 + 2x}$.

25. $\int \frac{(z^4 + 3)\,dz}{(z + 1)(z^2 + 1)}$.

26. $\int \frac{(3x^3 + 3x + 1)\,dx}{x^4 + 3x^2}$.

27. $\int \frac{(3x^3 + x^2 + 3)\,dx}{x^4 + 3x^2}$.

28. $\int \frac{(5x^2 + 12x + 9)\,dx}{x^3 + 3x^2 + 3x}$.

29. $\int \frac{(4x^3 + 3x^2 + 18x + 12)\,dx}{(x^2 + 4)^2}$.

30. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8y\,dy}{(2y + 1)(4y^2 + 1)}$.

31. $\int_0^1 \frac{(2x^3 - 4)\,dx}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$.

32. $\int_1^3 \frac{(x + 10)\,dx}{x^3 + 2x^2 + 5x}$.

33. $\int_0^3 \frac{(2x^3 + 18)\,dx}{(x + 3)(x^2 + 9)}$.

168. Integración por sustitución de una nueva variable; racionalización. En el artículo anterior hemos visto que todas las funciones racionales, cuyos denominadores es posible descomponer en factores reales de primero y segundo grados, pueden integrarse. De las funciones algebraicas *no racionales*, es decir, las que contienen radicales, no se pueden integrar en términos de funciones elementales sino unas pocas, hablando relativamente. En algunos casos, sin embargo, sustituyendo una nueva variable, estas funciones pueden transformarse en funciones equivalentes que o son racionales o se encuentran en la lista de las formas elementales ordinarias (Art. 128). El método de integrar una función no racional, reemplazando la variable por una nueva variable de manera que el resultado sea una función racional, se llama a veces *integración por racionalización*. Este es uno de los artificios más importante en la integración. Ahora vamos a tratar algunos de los casos más importantes de esta clase.

Diferenciales que contienen solamente potencias fraccionarias de x. *Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de* x *puede transformarse en forma racional mediante la sustitución*

$$x = z^n,$$

siendo n *el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de* x.

En efecto, x, dx y cada radical pueden entonces expresarse racionalmente en términos de z.

EJEMPLO 1. Demostrar que

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1 + x^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln(1 + x^{\frac{3}{4}}) + C.$$

Solución. Aquí $n = 4$. Por tanto, sea $x = z^4$.

Entonces, $x^{\frac{1}{2}} = z^2,\quad x^{\frac{3}{4}} = z^3,\quad dx = 4\,z^3\,dz.$

De donde,
$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{1+x^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{z^2}{1+z^3}\,4\,z^3\,dz = 4\int \frac{z^5}{1+z^3}\,dz$$
$$= 4\int\left(z^2 - \frac{z^2}{1+z^3}\right)dz = \frac{4}{3}\,z^3 - \frac{4}{3}\ln(1+z^3) + C.$$

Sustituyendo ahora $z = x^{\frac{1}{4}}$, tenemos la solución.

La forma general de la expresión irracional que se trata aquí es

$$R\left(x^{\frac{1}{n}}\right)dx,$$

en donde R representa una función racional de $x^{\frac{1}{n}}$.

Diferenciales que contienen solamente potencias fraccionarias de $a + bx$. *Una expresión que contiene solamente potencias fraccionarias de* $\mathrm{a + bx}$ *puede transformarse en forma racional mediante la sustitución*

$$\mathrm{a + bx = z^n},$$

siendo n *el menor denominador común de los exponentes fraccionarios de la expresión* $\mathrm{a + bx}$.

En efecto, x, dx y cada radical pueden entonces expresarse racionalmente en términos de z.

EJEMPLO 2. Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Solución. Supóngase que $1 + x = z^2$.

Entonces $dx = 2\,z\,dz,\quad (1+x)^{\frac{3}{2}} = z^3$ y $(1+x)^{\frac{1}{2}} = z.$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2\,z\,dz}{z^3+z} = 2\int \frac{dz}{z^2+1}$$
$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\,z + C$$
$$= 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(1+x)^{\frac{1}{2}} + C$$

después de sustituir el valor de z en términos de x.

La integral general que se trata aquí tiene la forma

$$R\left[x,\ (a+bx)^{\frac{1}{n}}\right]dx,$$

en donde R representa una función racional.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\displaystyle\int \frac{(5x+9)\,dx}{(x-9)\,x^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{3}} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-x^{4/3}} = 3\ln\frac{x^{1/3}}{1-x^{1/3}} + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{(x^{3/2}-x^{1/3})\,dx}{6\,x^{1/4}} = \frac{2}{27}x^{9/4} - \frac{2}{13}x^{13/12} + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4x+1)^{5/2}} = \frac{6x^2+6x+1}{12(4x+1)^{3/2}} + C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{5/8}-x^{1/8}} = \frac{8x^{3/8}}{3} + 2\ln\frac{x^{1/8}-1}{x^{1/8}+1} + 4\,\text{arc tg}\,x^{1/8} + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^{3/2}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}} + C.$

8. $\displaystyle\int y\sqrt[3]{a+y}\,dy = \frac{3}{28}(4y-3a)(a+y)^{4/3} + C.$

9. $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x+1}+1)\,dx}{\sqrt{x+1}-1} = x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+C.$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}} = \frac{3}{2}(x+a)^{2/3} - 3(x+a)^{1/3} + 3\ln(1+\sqrt[3]{x+a}) + C.$

11. $\displaystyle\int \frac{(t+5)\,dt}{(t+4)\sqrt{t+2}} = 2\sqrt{t+2} + \sqrt{2}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{t+2}{2}} + C.$

12. $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = 2\,\text{arc tg}\,2 - \frac{\pi}{2}.$

13. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 4 - 2\ln 3.$

14. $\displaystyle\int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{2+4y}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

15. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{2t}\,(9+\sqrt[3]{2t})} = 3 - 9\,\text{arc tg}\,\frac{1}{3}.$

16. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}\,dx}{x+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}.$

17. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{dt}{2\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}} = 5{,}31.$

18. $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}\,dx}{(x-2)^{2/3}+3} = 8 + \frac{3}{2}\pi\sqrt{3}.$

Calcular cada una de las integrales siguientes:

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x + 2\sqrt{x} + 5}.$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1 - \sqrt[3]{x})}.$

21. $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,dx}{x\sqrt{x-3}}.$

22. $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{(2y+3)^{4/3}}.$

23. $\displaystyle\int \frac{dt}{(t+1)^{1/4} - (t+1)^{5/4}}.$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)^{1/2} - (x-2)^{3/4}}.$

25. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{(x+5)\sqrt{x+4}}.$

26. $\displaystyle\int \frac{(2 - \sqrt{2x+3})\,dx}{1 - 2x}.$

27. Hallar el área de la superficie limitada por la curva $y = x + \sqrt{x+1}$, el eje de las x y las ordenadas correspondientes a $x = 3$ y $x = 8$. *Sol.* $40\frac{1}{6}$.

28. Hallar el volumen que se engendra cuando la superficie del problema anterior gira alrededor del eje de las x.

29. Hallar el volumen que se engendra haciendo girar alrededor del eje de las x la superficie del primer cuadrante limitada por los ejes de coordenadas y cada una de las siguientes curvas:

a) $y = 2 - \sqrt{x}$.

b) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$.

c) $y = a - \sqrt{ax}$.

d) $y = 4 - x^{2/3}$.

30. Hallar el área de la superficie limitada por las curvas

$$y = 2x + \sqrt{2x+1} \quad \text{y} \quad y = x - \sqrt{2x+1}$$

y las ordenadas $x = 4$ y $x = 12$.

31. Hallar el área de la superficie limitada por la curva

$$(x-1)\,y^2 = (x+1)\,(2y-1)$$

y las ordenadas correspondientes a $x = 3$ y $x = 8$.

Sol. $4\left[\sqrt{2} + \ln\dfrac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}\right]$

169. Diferenciales binomias. Una diferencial de la forma

(1) $$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

siendo a y b constantes cualesquiera y los exponentes m, n, p números racionales, se llama una *diferencial binomia*.

Hagamos

$$x = z^\alpha; \text{ entonces } dx = \alpha z^{\alpha-1} dz,$$

y $$x^m (a + bx^n)^p \, dx = \alpha z^{m\alpha+\alpha-1} (a + bz^{n\alpha})^p \, dz.$$

Si se elige un número entero α de manera que $m\alpha$ y $n\alpha$ sean números enteros, * vemos que la diferencial dada es equivalente a otra de la misma forma, donde m y n se han reemplazado por números enteros. Además, la sustitución

(2) $$x^m (a + bx^n)^p \, dx = x^{m+np} (ax^{-n} + b)^p \, dx$$

transforma la diferencial dada en otra de la misma forma, donde $-n$ reemplaza el exponente n de x. Por tanto, cualquiera que sea el signo algebraico de n, el exponente de x dentro del paréntesis será positivo en una de las dos diferenciales.

Cuando p es un número positivo, se puede desarrollar la potencia del binomio según la fórmula de Newton e integrar la diferencial término a término. En lo que sigue, p se supone una fracción; por tanto, la reemplazamos por $\frac{r}{s}$, siendo r y s números enteros. **

Por consiguiente, podemos enunciar la siguiente proposición:

Toda diferencial binomia puede reducirse a la forma

$$x^m (a + bx^n)^{\frac{r}{s}} dx,$$

siendo m, n, r *y* s *números enteros, y* n *positivo*.

En el artículo siguiente demostraremos que se pueden quitar en (1) los radicales en los siguientes casos:

Caso I. *Cuando* $\frac{m+1}{n}$ = *un número entero o cero. En este caso se efectúa la sustitución* $a + bx^n = z^s$.

---

* Siempre es posible elegir α de manera que $m\alpha$ y $n\alpha$ sean números enteros, puesto que podemos tomar para valor de α el mínimo común múltiplo de los denominadores de m y n.

** El caso de ser p un número entero no se excluye, sino que aparece como especial; a saber, $r = p$, $s = 1$.

Caso II. *Cuando* $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=$ *un número entero o cero. En este caso se efectúa la sustitución* $a+bx^n=z^sx^n$.

EJEMPLO 1. $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{3/2}}=\int x^3(a+bx^2)^{-3/2}\,dx$

$$=\frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C.$$

Solución. En este caso, $m=3$, $n=2$, $r=-3$, $s=2$.

Luego, $\frac{m+1}{n}=2$, número entero. Por consiguiente, estamos en el caso I y efectuaremos la sustitución $a+bx^2=z^2$; de donde

$$x=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{1/2},\quad dx=\frac{z\,dz}{b^{1/2}(z^2-a)^{1/2}}\ \text{y}\ (a+bx^2)^{3/2}=z^3.$$

$$\therefore\quad \int\frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^{3/2}}=\int\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^{3/2}\cdot\frac{z\,dz}{b^{1/2}(z^2-a)^{1/2}}\cdot\frac{1}{z^3}$$

$$=\frac{1}{b^2}\int(1-az^{-2})\,dz=\frac{1}{b^2}(z+az^{-1})+C$$

$$=\frac{1}{b^2}\frac{2a+bx^2}{\sqrt{a+bx^2}}+C.$$

EJEMPLO 2. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{1/2}}{3x^3}+C.$

Solución. En este caso, $m=-4$, $n=2$, $\frac{r}{s}=-\frac{1}{2}$.

Luego, $\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}=-2$, número entero. Por consiguiente, tenemos el caso II, y la sustitución será

$$1+x^2=z^2x^2,\quad z=\frac{(1+x^2)^{1/2}}{x};$$

de donde, $x^2=\frac{1}{z^2-1}$, $1+x^2=\frac{z^2}{z^2-1}$, $\sqrt{1+x^2}=\frac{z}{(z^2-1)^{1/2}}$;

además, $x=\frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}$, $x^4=\frac{1}{(z^2-1)^2}$, y $dx=-\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{3/2}}$.

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{\dfrac{z\,dz}{(z^2-1)^{3/2}}}{\dfrac{1}{(z^2-1)^2}\cdot\dfrac{z}{(z^2-1)^{1/2}}}=-\int(z^2-1)\,dz$$

$$=z-\frac{z^3}{3}+C=\frac{(2x^2-1)(1+x^2)^{1/2}}{3x^3}+C.$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\displaystyle\int x^5\sqrt{1+x^3}\,dx = \frac{2(3x^3-2)(1+x^3)^{3/2}}{45}+C.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{2(x^3-2)\sqrt{1+x^3}}{9}+C.$

3. $\displaystyle\int x^5(8+x^3)^{3/2}dx = \frac{2(5x^3-16)(8+x^3)^{5/2}}{105}+C.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(a+bx^3)^{3/2}} = \frac{2(2a+bx^3)}{3b^2\sqrt{a+bx^3}}+C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^3)^{2/3}} = -\frac{(1+x^3)^{1/3}}{x}+C.$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{1/3}} = -\frac{(1+x^3)^{2/3}}{2x^2}+C.$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^4)^{3/4}} = -\frac{(1+x^4)^{1/4}}{x}+C.$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n(1+x^n)^{\frac{1}{n}}} = -\frac{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}}{(n-1)x^{n-1}}+C.$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(1+x^3)^{4/3}} = -\frac{1+3x^3}{2x^2(1+x^3)^{1/3}}+C.$

10. $\displaystyle\int \frac{2\sqrt{1+x^4}\,dx}{x^3} = \ln\left(x^2+\sqrt{1+x^4}\right)-\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}+C.$

Calcular cada una de las siguientes integrales:

11. $\displaystyle\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx.$

12. $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^3}}.$

13. $\displaystyle\int x^5(a^3-x^3)^{3/2}dx.$

14. $\displaystyle\int \frac{(x^5+2x^2)\,dx}{(1+x^3)^{3/2}}.$

15. $\displaystyle\int x(1+x^3)^{1/3}dx.$

170. Condiciones de racionalización de la diferencial binomia

$$(A) \qquad x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx.$$

Caso I. Supongamos que $a + bx^n = z^s$.

Entonces $\quad (a+bx^n)^{\frac{1}{s}} = z, \quad$ y $\quad (a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = z^r$;

además, $\quad x = \left(\dfrac{z^s - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad$ y $\quad x^m = \left(\dfrac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$;

luego, $$dx = \frac{s}{bn} z^{s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Sustituyendo en (A), obtenemos

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx = \frac{s}{bn} z^{r+s-1}\left(\frac{z^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

El segundo miembro de esta expresión es racional cuando $\dfrac{m+1}{n}$ es un número entero o cero.

Caso II. Supongamos que $a + bx^n = z^s x^n$.

Entonces $\quad x^n = \dfrac{a}{z^s - b}, \quad$ y $\quad a + bx^n = z^s x^n = \dfrac{az^s}{z^s-b}$.

Luego, $$(a+bx^n)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\frac{r}{s}}z^r;$$

además, $\quad x = a^{\frac{1}{n}}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}}, \quad x^m = a^{\frac{m}{n}}(z^s-b)^{-\frac{m}{n}}$;

y $$dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{1}{n}} z^{s-1}(z^s-b)^{-\frac{1}{n}-1}dz.$$

Sustituyendo en (A), obtenemos

$$x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx = -\frac{s}{n} a^{\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}}(z^s-b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+\frac{r}{s}+1\right)} z^{r+s-1}dz.$$

El segundo miembro de esta expresión es racional cuando $\dfrac{m+1}{n} + \dfrac{r}{s}$ es un número entero o cero.

Luego queda demostrado que los radicales de la diferencial binomia $x^m(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}dx$ pueden quitarse en los casos enunciados en el artículo anterior.

171. Transformación de las diferenciales trigonométricas.

Teorema. *Una diferencial trigonométrica que contiene sólo funciones racionales de sen* u *y cos* u *puede transformarse en otra expresión diferencial, racional en* z *, mediante la sustitución*

$$(1) \qquad \operatorname{tg} \frac{u}{2} = z ,$$

o (lo que es lo mismo) por las sustituciones

$$(2) \qquad \operatorname{sen} u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad du = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

Demostración. De la fórmula para la tangente de la mitad de un ángulo (véase **(5)** del Artículo 2), y elevando ambos miembros al cuadrado, tenemos

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} u = \frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}.$$

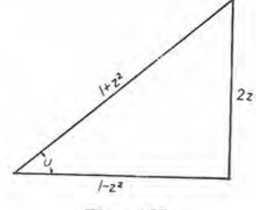


Fig. 157

Sustituyendo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} u = z$, y despejando $\cos u$, resulta

$$(3) \qquad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

una de las fórmulas (2). El triángulo rectángulo de la figura 157 muestra la relación (3) y de él se deduce el valor de $\operatorname{sen} u$ dado en (2). Finalmente, de (1),

$$u = 2 \operatorname{arc\,tg} z,$$

y, por tanto,

$$du = \frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

De este modo quedan demostradas las relaciones (2).

Está claro que si una diferencial trigonométrica contiene sólo funciones racionales de $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$, $\sec u$ y $\csc u$, el teorema incluirá esta diferencial, puesto que esas cuatro funciones pueden expresarse racionalmente en términos de $\operatorname{sen} u$ o de $\cos u$ o de ambos. Se sigue pues que *cualquier diferencial trigonométrica racional puede integrarse, a condición que la diferencial transformada en términos de* z *se pueda descomponer en fracciones parciales* (véase el Artículo 167).

EJEMPLO. Demostrar que

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{5 \operatorname{tg} x + 4}{3} \right) + C.$$

Demostración. Sea $2x = u$. Entonces $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$. Sustituyendo estos valores, y empleando (2), tenemos

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{5 + 4 \operatorname{sen} u} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2\,dz}{1 + z^2}}{5 + \frac{8z}{1 + z^2}} = \int \frac{dz}{5z^2 + 8z + 5}$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{5z + 4}{3} \right) + C.$$

Sustituyendo ahora $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} u = \operatorname{tg} x$, obtenemos el resultado buscado.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\displaystyle \int \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \ln \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + C.$

2. $\displaystyle \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C.$

3. $\displaystyle \int \frac{d\phi}{5 + 4 \cos \phi} = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2} \right) + C.$

4. $\displaystyle \int \frac{dx}{4 + 5 \cos x} = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right) + C.$

5. $\displaystyle \int \frac{d\alpha}{3 + \cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) + C.$

6. $\displaystyle \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x - \cos x + 3} = \operatorname{arc\,tg} \left(1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$

7. $\displaystyle \int \frac{\cos \theta \, d\theta}{5 - 3 \cos \theta} = -\frac{\theta}{3} + \frac{5}{6} \operatorname{arc\,tg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) + C.$

8. $\displaystyle \int \frac{dx}{4 \sec x + 5} = \frac{2}{5} \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{4}{15} \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} \right) + C.$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{4 - 3\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{12 + 13\cos\phi} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}.$

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \operatorname{sen} x} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{3 + 5\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{4}\ln 3.$

Calcular cada una de las siguientes integrales:

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}.$

14. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\operatorname{ctg}\theta + \csc\theta}.$

15. $\displaystyle\int \frac{d\phi}{13 - 5\cos\phi}.$

16. $\displaystyle\int \frac{dt}{13\cos t - 5}.$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\cos x + 1}.$

18. $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{2 + \operatorname{sen}\alpha}.$

19. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 2\operatorname{sen} x}.$

20. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{5 + 4\operatorname{sen}\theta}.$

21. $\displaystyle\int \frac{dt}{5\sec t - 4}.$

22. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 + 3\cos x}.$

23. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{3 + 2\cos\theta}.$

24. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{2 + \cos\alpha}.$

172. Sustituciones diversas. Hasta aquí, mediante las sustituciones que hemos considerado, se han suprimido los radicales de la expresión diferencial dada. No obstante, en gran número de casos se pueden efectuar integraciones por medio de sustituciones que no quitan los radicales; pero no se puede dar ninguna regla general. La única guía es la experiencia adquirida al resolver muchos problemas.

Una sustitución muy útil suele ser

$$x = \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z^2},$$

que se llama **sustitución recíproca.** Empleemos esta sustitución en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO. Hallar $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\, dx.$

Solución. Sustituyendo $x = \frac{1}{z}$, $dx = -\frac{dz}{z^2}$, obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\, dx = -\int (a^2z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\, z\, dz$$

$$= -\frac{(a^2z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + C.$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}} = \ln\left(\frac{cx}{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}\right).$$

Hágase $x = \frac{1}{z}$

2. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}\right) + C.$$

Hágase $\sqrt{x^2-x+2} = z - x$.

3. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}} = 2 \operatorname{arc\,tg}(x+\sqrt{x^2+2x-1}) + C.$$

Hágase $\sqrt{x^2+2x-1} = z - x$

4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2+2x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+2x}+\sqrt{2-x}}\right) + C.$$

Hágase $\sqrt{2+x-x^2} = (x+1)z$.

5. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-6-x^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{2(3-x)}{3(x-2)}} + C.$$

Hágase $\sqrt{5x-6-x^2} = (x-2)z$.

6. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}} = -\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1+x}{2x}\right) + C.$$ Hágase $x = \frac{1}{z}$.

7. $$\int \frac{-dx}{x\sqrt{1+4x+5x^2}} = \ln\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x+5x^2}}{x}\right) + C.$$

Hágase $x = \frac{1}{z}$

8. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}} = -\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2-x}{x\sqrt{2}}\right) + C.$$ Hágase $x = \frac{1}{z}$.

9. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+2x+3x^2}} = -\frac{\sqrt{1+2x+3x^2}}{x} + \ln\left(\frac{1+x+\sqrt{1+2x+3x^2}}{x}\right) + C.$$

Hágase $x = \frac{1}{z}$.

10. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{27x^2+6x-1}} = \frac{\sqrt{27x^2+6x-1}}{x} - 3 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1-3x}{6x}\right) + C.$$ Hágase $x = \frac{1}{z}$

11. $\int_{1/3}^{1} \frac{(x - x^3)^{1/3} dx}{x^4} = 6.$ Hágase $x = \frac{1}{z}$.

12. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \text{arc tg } e - \frac{\pi}{4}.$ Hágase $e^x = z$.

13. $\int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \pi.$ Hágase $x = a \operatorname{sen}^2 z$.

14. $\int_{0}^{1} \sqrt{2t + t^2}\, dt = \sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{3})$. Hagase $t + 1 = z$.

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales:

15. $\int \frac{4\, dx}{x\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$ Hágase $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$.

16. $\int \frac{4x\, dx}{(x^2 - 2x + 3)^{3/2}}.$ Hágase $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = z - x$.

17. $\int \frac{2\, dx}{\sqrt{5x - 6 - x^2}}.$ Hágase $\sqrt{5x - 6 - x^2} = (x - 2) z$.

18. $\int \frac{2x\, dx}{\sqrt{5x - 6 - x^2}}.$ Hágase $\sqrt{5x - 6 - x^2} = (x - 2) z$.

CAPITULO XVII

FORMULAS DE REDUCCION. USO DE LA TABLA DE INTEGRALES

173. Introducción. En este capítulo se completan los procedimientos de integración.

El propósito es dar las instrucciones necesarias para saber emplear una tabla de integrales. Se desarrollan métodos de deducir ciertas fórmulas generales, llamadas *fórmulas de reducción*, que se dan en todas las tablas. Estos métodos son típicos en los problemas de esta índole.

174. Fórmulas de reducción para las diferenciales binomias. Cuando una diferencial binomia no puede integrarse fácilmente por ninguno de los métodos hasta aquí expuestos, es usual emplear fórmulas de reducción deducidas por el método de integración por partes. Sirviéndonos de esas fórmulas, la diferencial dada se expresa como suma de dos términos, el uno no afectado del signo de integración, el otro una integral de la misma forma que la expresión primitiva pero más fácil de integrar. Las cuatro fórmulas principales de reducción son las siguientes:

$$(A)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(np+m+1)b} - \frac{(m-n+1)a}{(np+m+1)b}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

$$(B)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} + \frac{anp}{np+m+1}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

$$(C)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)a} - \frac{(np+n+m+1)b}{(m+1)a}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

$$(D)\quad \int x^m (a+bx^n)^p\,dx = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{n(p+1)a} + \frac{np+n+m+1}{n(p+1)a}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

No es necesario que el estudiante aprenda estas fórmulas de memoria; pero debe saber qué se logra con cada una y cuándo fallan. Así:

La fórmula (A) *disminuye* n *unidades a* m. (A) *falla cuando* $np+m+1=0$.

La fórmula (B) *disminuye* 1 *unidades a* p. (B) *falla cuando* $np+m+1=0$.

La fórmula (C) *aumenta* n *unidades a* m. (C) *falla cuando* $m+1=0$.

La fórmula (D) *aumenta* 1 *unidades a* p. (D) *falla cuando* $p+1=0$.

I. *Deducción de la fórmula* (A). La fórmula de integración por partes es

$$(1)\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (A),\ \text{Art. } 136$$

Podemos aplicar esta fórmula en la integración de

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$$

haciendo $u = x^{m-n+1}$ * y $dv = (a+bx^n)^p x^{n-1}\,dx$; entonces

$$du = (m-n+1)x^{m-n}dx \quad \text{y} \quad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}.$$

* A fin de integrar dv según la fórmula de las potencias, es necesario que x fuera del paréntesis tenga el exponente $n-1$. Restando $n-1$ de m se obtiene $m-n+1$ para el exponente de x en u.

Sustituyendo en (1),

$$(2) \quad \int x^m (a + bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

$$\text{Pero} \int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx = \int x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)\,dx$$
$$= a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx + b\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Sustituyendo esto en (2), obtenemos

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{(m-n+1)a}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx - \frac{m-n+1}{n(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^p\,dx.$$

Trasponiendo el último término al primer miembro y despejando $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, obtenemos **(*A*)**.

Por la fórmula **(*A*)** se ve que la integración de $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ se ha hecho depender de la integración de otra diferencial de la misma forma, en la que $m-n$ reemplaza a m. Aplicando la fórmula **(*A*)** repetidamente, puede hacerse que m disminuya en un múltiplo cualquiera de n.

Evidentemente, cuando $np+m+1=0$, la fórmula **(*A*)** falla, pues el denominador se anula. Pero en este caso $\frac{m+1}{n}+p=0$, y, en consecuencia, podemos aplicar el método del Artículo 169, de suerte que la fórmula no es necesaria.

II. *Deducción de la fórmula* **(*B*)**. Separando los factores podemos escribir

$$(3) \quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^m(a+bx^n)^{p-1}(a+bx^n)\,dx$$
$$= a\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx + b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Aplicando ahora la fórmula (*A*) al último término de (3), reemplazando en la fórmula m por $m+n$ y p por $p-1$, se obtiene:

$$b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} - \frac{a(m+1)}{np+m+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

Sustituyendo esto en (3) y sumando los términos semejantes, obtenemos (*B*).

En cada aplicación de la fórmula (*B*) el valor de p disminuye en una unidad. La fórmula (*B*) falla para el mismo caso que (*A*).

III. *Obtención de la fórmula* (*C*). Despejando de la fórmula (*A*) la integral

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx$$

y reemplazando m por $m+n$, obtenemos (*C*).

Por tanto, cada vez que aplicamos (*C*), m se reemplaza por $m+n$. Cuando $m+1=0$, la fórmula (*C*) falla; pero entonces se pueden quitar los radicales a la expresión diferencial por el método del Artículo 169, y la fórmula no es necesaria.

IV. *Deducción de la fórmula* (*D*). Despejando de la fórmula (*B*) la integral

$$\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx,$$

y reemplazando p por $p+1$, obtenemos (*D*).

En cada aplicación de (*D*) el valor de p aumenta una unidad. Evidentemente, (*D*) falla cuando $p+1=0$, pero entonces $p=-1$ y la expresión es racional.

La fórmula (5) del caso IV del Artículo 167 es un caso especial de (*D*), cuando $m=0$, $p=-n$, $n=2$, $a=a^2$, $b=1$.

EJEMPLO 1. $\displaystyle\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{1/2}+C.$

Solución. Aquí, $m=3$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$.

En este caso, aplicaremos la fórmula (*A*) porque entonces la integración de la diferencial dependerá de la integración de $\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$ que se efectúa por la fórmula de las potencias.

Luego, sustituyendo en (A), obtenemos

$$\int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{3-2+1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-1(-1+3+1)}$$

$$-\frac{1(3-2+1)}{-1(-1+3+1)}\int x^{3-2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}\int x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}(x^2+2)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

EJEMPLO 2. $$\int\frac{x^4\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{8}a^2x\right)\sqrt{a^2-x^2}.$$

$$+\frac{3}{8}a^4 \text{ arc sen } \frac{x}{a} + C.$$

SUGESTION. Aplicar (A) dos veces.

EJEMPLO 3. $$\int(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C.$$

SUGESTION Aquí $m = 0$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $a = a^2$, $b = 1$. Aplicando (B) una vez.

EJEMPLO 4. $$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{2x^2} + \frac{1}{2}\text{ arc sec } x + C.$$

SUGESTION. Aplicar (C) una vez.

PROBLEMAS

Verificar cada una de las siguientes integraciones:

1. $$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\text{ arc sen }\frac{x}{a} + C$$

2. $$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{3}(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2} + C.$$

3. $$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{15}(3x^4+4x^2+8)\sqrt{1-x^2} + C.$$

4. $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\text{ arc sen }\frac{x}{a} + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

7. $$\int \frac{x^3\,dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}} = \frac{x(3a^2-2x^2)}{3a^4(a^2-x^2)^{3/2}} + C.$$

9. $$\int (x^2+a^2)^{3/2}dx = \tfrac{1}{8}\,x(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} + \tfrac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

10. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{8}\,x(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} - \tfrac{1}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

11. $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{(x+3a)\sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{3a^2}{2}\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C.$$

SUGESTION. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int x^{3/2}(2a-x)^{-1/2}dx$. Aplicar (A) dos veces.

12. $$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{4y-y^2}} = -\frac{1}{3}(y^2+5y+30)\sqrt{4y-y^2} + 20\arccos\left(1-\frac{y}{2}\right) + C.$$

13. $$\int \frac{ds}{(a^2+s^2)^3} = \frac{s}{4a^2(a^2+s^2)^2} + \frac{3s}{8a^4(a^2+s^2)} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arc\,tg}\frac{s}{a} + C.$$

14. $$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{9-4y^2}} = -\frac{1}{8}y\sqrt{9-4y^2} + \frac{9}{16}\operatorname{arc\,sen}\frac{2y}{3} + C.$$

15. $$\int \frac{t^3\,dt}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{1}{24}(2t^2-1)\sqrt{1+4t^2} + C.$$

16. $$\int y^2\sqrt{4-9y^2}\,dy = \frac{1}{36}y(9y^2-2)\sqrt{4-9y^2} + \frac{2}{27}\operatorname{arc\,sen}\frac{3y}{2} + C.$$

17. $$\int \frac{t^3\,dt}{(1+9t^2)^{3/2}} = \frac{9t^2+2}{81\sqrt{1+9t^2}} + C.$$

18. $$\int t^2\sqrt{1+4t^2}\,dt = \tfrac{1}{32}\,t(1+8t^2)\sqrt{1+4t^2} - \tfrac{1}{64}\ln(2t+\sqrt{1+4t^2}) + C.$$

Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales:

19. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 - x^2)^2}$. 22. $\displaystyle\int \frac{x^8\,dx}{\sqrt{4 - x^6}}$. 25. $\displaystyle\int \frac{s^7\,ds}{(a + bs^4)^{2/3}}$.

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^{3/2}}$. 23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}\,dx}{x}$. 26. $\displaystyle\int \frac{z^8\,dz}{\sqrt{5 - z^3}}$.

21. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\,dx}{x^4}$. 24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^3)^{5/2}\,dx}{x}$. 27. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + 4x^2)^2}$.

28. $\displaystyle\int \frac{dt}{t^3\sqrt{1 - 4t^2}}$. 29. $\displaystyle\int (9y^2 + 4)^{3/2}\,dy$.

175. Fórmulas de reducción para las diferenciales trigonométricas. En el artículo anterior hicimos depender la integral dada de otra integral de la misma forma. Este método se llama de *reducción sucesiva*.

Ahora vamos a aplicar el mismo método a las diferenciales trigonométricas, deduciendo las siguientes fórmulas de reducción e ilustrando su empleo:

$$(E)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx.$$

$$(F)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n} x\,dx.$$

$$(G)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n+2} x\,dx.$$

$$(H)\quad \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n} x\,dx.$$

Aquí debe observar el estudiante que:

La fórmula (*E*) *disminuye* 2 *unidades a* n. (*E*) *falla cuando* $m + n = 0$.

La fórmula (*F*) *disminuye* 2 *unidades a* m. (*F*) *falla cuand* m + n = 0.

La fórmula (*G*) *aumenta* 2 *unidades a* n. (*G*) *falla cuand* n + 1 = 0.

La fórmula (*H*) *aumenta* 2 *unidades a* m. (*H*) *falla cuand* m + 1 = 0.

Para deducir estas fórmulas aplicaremos, como antes, la fórmul de integración por partes, a saber,

$$(1) \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (A), \text{ Art. } 13$$

Sea $\qquad u = \cos^{n-1} x \quad \text{y} \quad dv = \text{sen}^m x \cos x\,dx;$

entonces

$$du = -(n-1)\cos^{n-2} x \,\text{sen}\, x\,dx, \quad \text{y} \quad v = \frac{\text{sen}^{m+1} x}{m+1}.$$

Sustituyendo en (1), obtenemos

$$(2) \qquad \int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = +\frac{\text{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m-1}\int \text{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx.$$

De la misma manera, si hacemos

$$u = \text{sen}^{m-1} x, \quad \text{y} \quad dv = \cos^n x \,\text{sen}\, x\,dx,$$

obtenemos

$$(3) \qquad \int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx = -\frac{\text{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \text{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx.$$

Pero $\displaystyle\int \text{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\,dx = \int \text{sen}^m x\,(1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx$

$$= \int \text{sen}^m x \cos^{n-2} x\,dx - \int \text{sen}^m x \cos^n x\,dx.$$

Sustituyendo este resultado en (2), sumando los términos semejantes y despejando la integral $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$, obtenemos **(E)**.

Haciendo una sustitución análoga en (3), obtenemos **(F)**.

Despejando de la fórmula **(E)** la integral de la derecha, y aumentando 2 unidades a n, obtenemos **(G)**.

De la misma manera obtenemos **(H)** de la fórmula **(F)**.

Las fórmulas **(E)** y **(F)** fallan cuando $m + n = 0$, la fórmula **(G)** cuando $n + 1 = 0$ y la fórmula **(H)** cuando $m + 1 = 0$. Pero en estos casos podemos integrar por métodos que ya se han explicado antes.

Es fácil ver que cuando m y n son números enteros, la integral

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$$

puede, por medio de una de las fórmulas de reducción arriba dadas, hacerse depender de una de las siguientes integrales:

$$\int dx, \quad \int \operatorname{sen} x \, dx, \quad \int \cos x \, dx, \quad \int \operatorname{sen} x \cos x \, dx,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \csc x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x \, dx, \quad \int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x},$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx, \quad \int \operatorname{ctg} x \, dx,$$

todas las cuales hemos aprendido a integrar.

EJEMPLO 1. Demostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x}{6} + \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{24} + \frac{1}{16} (\operatorname{sen} x \cos x + x) + C.$$

Demostración. Aplicando en primer lugar la fórmula (F), obtenemos

$$(4) \qquad \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx = -\frac{\operatorname{sen} x \cos^5 x}{6} + \frac{1}{6} \int \cos^4 x \, dx.$$

[Aquí $m = 2$, $n = 4$.]

Aplicando la fórmula (E) a la integral del segundo miembro de (4), resulta

$$(5) \qquad \int \cos^4 x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \, dx.$$

[Aquí $m = 0$, $n = 4$.]

La aplicación de la fórmula (E) al segundo miembro de (5) da

$$(6) \qquad \int \cos^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Ahora sustituyendo el resultado (6) en (5), y el resultado de esta sustitución en (4), se obtiene la solución buscada.

EJEMPLO 2. Demostrar que

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 2x}\,dx = \frac{1}{4}\sec 2x \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{4}\ln(\sec 2x + \operatorname{tg} 2x) + C.$$

Demostración. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^2 2x}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\cos^3 2x}.$

Hagamos $2x = u$. Entonces $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$, y

(7) $$\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^{-3} 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-3} u\,du.$$

Aplíquese (G) a la nueva integral en (7), con $m = 2$, $n = -3$, reemplazando x por u.

(8) $$\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-3} u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^3 u \cos^{-2} u}{-2} + \frac{1}{-2}\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-1} u\,du.$$

Aplíquese (F) a la nueva integral en (8), con $m = 2$, $n = -1$.

(9) $$\int \operatorname{sen}^2 u \cos^{-1} u\,du = -\operatorname{sen} u + \int \cos^{-1} u\,du = -\operatorname{sen} u + \ln(\sec u + \operatorname{tg} u).$$

Sustituyendo (9) en (8) y (8) en (7), reduciendo y reemplazando u por $2x$, tenemos la solución.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\,dx = \operatorname{sen} x \cos x\left[\frac{1}{6}\operatorname{sen}^4 x - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{16}\right] + \frac{x}{16} + C.$

2. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3}\,dx = \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3} + 3\ln\cos\frac{x}{3} + C.$

3. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^4 \theta\,d\theta = -\frac{\operatorname{ctg}^3\theta}{3} + \operatorname{ctg}\theta + \theta + C.$

4. $\displaystyle\int \sec^3 t\,dt = \frac{1}{2}\sec t \operatorname{tg} t + \frac{1}{2}\ln(\sec t + \operatorname{tg} t) + C.$

5. $\displaystyle\int \csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\csc x \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}\ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C.$

6. $\displaystyle\int \csc^5 \theta\,d\theta = -\frac{\csc\theta\operatorname{ctg}\theta}{4}\left(\csc^2\theta + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{8}\ln(\csc\theta - \operatorname{ctg}\theta) + C.$

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2\phi\cos^2\phi\,d\phi = \frac{1}{8}\operatorname{sen}\phi\cos\phi(2\operatorname{sen}^2\phi - 1) + \frac{1}{8}\phi + C.$

8. $\int \frac{\operatorname{ctg}^2 2\theta\, d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 2\theta \csc 2\theta - \frac{1}{4}\ln(\csc 2\theta - \operatorname{ctg} 2\theta) + C.$

9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^4 x} = -\frac{\cos x}{3\operatorname{sen}^3 x} - \frac{2\cos x}{3\operatorname{sen} x} + C.$

10. $\int \cos^6\theta\, d\theta = \frac{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}{48}[8\cos^4\theta + 10\cos^2\theta + 15] + \frac{5\theta}{16} + C.$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{16}.$

12. $\int_0^{\pi} \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{8}.$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 2\theta\, d\theta = \frac{5\pi}{32}.$

14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^8\phi\, d\phi = \frac{35\pi}{128}.$

15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{5}{4} - \frac{3\pi}{8}.$

Calcular las siguientes integrales:

16. $\int \operatorname{sen}^6 2\theta\, d\theta.$

17. $\int \csc^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

18. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x\, dx}{\cos^5 x}.$

19. $\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^4\theta \cos^2\theta}.$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}\, d\theta.$

21. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 x\, dx.$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta \cos^3\theta\, d\theta.$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{sen}\theta)^4\, d\theta.$

176. Empleo de una tabla de integrales. Los métodos de integración que se han desarrollado en los Capítulos XII, XVI y XVII tienen por objeto reducir una integral dada a una o unas de las integrales inmediatas dadas en el Artículo 128. Con este fin se han ideado varios artificios, tales como:

integración por partes (Art. 136);
integración por fracciones parciales (Art. 167);
integración por sustitución de una nueva variable (Art. 168 a 172);
empleo de las fórmulas de reducción (Art. 174 y 175).

Pero cuando se dispone de una tabla de integrales algo extensa, el primer paso en todo problema de integración es buscar en la tabla una fórmula por la cual se pueda resolver el problema sin el empleo de ninguno de estos artificios. Una tabla de este tipo se da en el Capítulo XXVII. Veamos ahora algunos ejemplos, que enseñan cómo debe usarse.

EJEMPLO 1. Demostrar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x)} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2+x}{x}\right) + C.$$

Solución. Empléase 14, con $a = 2$, $b = 1$ y $u = x$.
Sin la tabla este ejemplo se resolvería como en el caso II del Artículo 167.

EJEMPLO 2. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{dx}{x(9+4x^2)} = \frac{1}{18} \ln\left(\frac{x^2}{9+4x^2}\right) + C.$$

Solución. Empléase 22, con $a = 3$, $b = 2$ y $u = x$.
Sin la tabla este ejemplo se resuelve como en el caso III del Artículo 167.

EJEMPLO 3. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+3x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{4+3x}-2}{\sqrt{4+3x}+2} + C.$$

Solución. Empléase 31, con $a = 4$, $b = 3$ y $u = x$.
Sin la tabla, este ejemplo se resuelve por la sustitución $4 + 3x = z^2$, como se muestra en el Artículo 168.

EJEMPLO 4. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+4x-7}} = \frac{\sqrt{3x^2+4x-7}}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \ln (6x + 4 + 2\sqrt{3}\sqrt{3x^2+4x-7}) + C.$$

Solución. Empléase 113, con $a = -7$, $b = 4$, $c = 3$ y $u = x$.
Sin la tabla el ejemplo se resolveria completando el cuadrado como en el ejemplo 2 en la página 249.

EJEMPLO 5. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int e^{3x} \cos 2x\,dx = \frac{e^{3x}(2 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 2x)}{13} + C.$$

Solución. Empléase 154, con $a = 3$, $n = 2$, $u = x$.
Sin la tabla el ejemplo se resolvería por integración por partes. Véase el ejemplo 6 del Artículo 136.

En muchos casos no es tan fácil como en estos ejemplos identificar la integral dada con una que se encuentra en la tabla. En tales casos buscamos en la tabla una fórmula que se asemeje a la integral dada, y de tal naturaleza que ésta pueda transformarse en aquélla por un sencillo cambio de variable. Este método se ha empleado constantemente en el Capítulo XII y en todos los problemas de integración hasta ahora tratados.

EJEMPLO 6. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\ln\frac{2x}{3+\sqrt{4x^2+9}} + C.$$

Solución. La fórmula 47 es semejante. Hagamos $u = 2x$. Entonces $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$, y sustituyendo los valores en la integral dada obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{1}{2}u\sqrt{u^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}}.$$

De esto, aplicando 47 con $a = 3$, y sustituyendo $u = 2x$, $a = 3$, resulta

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{3+\sqrt{4x^2+9}}{2x}\right) + C.$$

Sin tablas procederíamos como en el ejemplo 2 del Artículo 135.

EJEMPLO 7. Verificar, usando la tabla de integrales,

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3}dx = -\frac{2}{27}\frac{(9x-4x^2)^{3/2}}{x^3} + C.$$

Solución. La fórmula 84 es semejante. Hagamos $u = 2x$. Entonces $x = \frac{1}{2}u$, $dx = \frac{1}{2}du$. Sustituyendo, obtenemos

$$\int \frac{\sqrt{9x-4x^2}}{x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{\frac{1}{8}u^3}\frac{du}{2} = 4\int \frac{\sqrt{\frac{9}{2}u-u^2}}{u^3}du.$$

Aquí tenemos 84 con $a = \frac{9}{4}$. Por tanto, aplicamos 84, sustituimos $u = 2x$ y obtenemos así el resultado buscado.

Si no puede aplicarse ninguna fórmula de la tabla como en estos dos casos, queda la posibilidad de que el empleo de uno o unos de los artificios mencionados nos lleve a nuevas integrales que se puedan resolver por la tabla. Para el empleo de estos artificios no pueden darse otras instrucciones generales que las reglas que ya se han desarrollado.

El estudiante debe fijarse en la disposición de la tabla. Verá que las integrales inmediatas del Artículo 128 aparecen en los lugares que les corresponden. Las fórmulas de reducción del Artículo 174 se dan, con algunas modificaciones, en las fórmulas 96–104. También las fórmulas de reducción del Artículo 175, con otras para varios casos, están numeradas, 157–174. La familiaridad con la tabla y la práctica de su empleo traerán consigo mayor habilidad en la técnica de la integración.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int x^3 \sqrt{x^2+5}\, dx = \frac{1}{15}(3x^2-10)(x^2+5)^{3/2} + C.$

2. $\int \frac{dt}{(1-4t^2)^{3/2}} = \frac{t}{\sqrt{1-4t^2}} + C.$

3. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9x^2-4}} = \frac{x}{18}\sqrt{9x^2-4} + \frac{2}{27}\ln(3x+\sqrt{9x^2-4}) + C.$

4. $\int \frac{d\theta}{2-\cos 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta) + C.$

5. $\int \frac{x^5\, dx}{(1-x^4)^{3/2}} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^4}} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2 + C.$

6. $\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}\, dx}{x^2} = -\frac{(x^2+2a^2)\sqrt{a^2-x^2}}{2x} - \frac{3a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C.$

7. $\int e^t \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{4} e^t (2 - \operatorname{sen} t - \cos t) + C.$

8. $\int \frac{\operatorname{sen} 2\theta\, d\theta}{1+\cos\theta} = 2\ln(1+\cos\theta) - 2\cos\theta + C.$

9. $\int \frac{dx}{2+2x+x^2} = \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C.$

10. $\int x^3 \operatorname{sen} x^2\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2 - \frac{1}{2}x^2\cos x^2 + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} = 2\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x-1} + C.$

12. $\int \frac{\sqrt{9t^2+4}\, dt}{t} = \sqrt{9t^2+4} - 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{9t^2+4}}{t}\right) + C.$

13. $\int \frac{du}{u^4\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{(a^2+2u^2)\sqrt{a^2-u^2}}{3a^4u^3} + C.$

14. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{16}\ln\left(\frac{\sqrt{4-x}-2}{\sqrt{4-x}+2}\right) - \frac{\sqrt{4-x}}{4x} + C.$

Calcular cada una de las siguientes integrales:

15. $\int \frac{x^5\, dx}{5+4x^2}.$

16. $\int (a^2-u^2)^{5/2}\, du.$

17. $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}.$

18. $\int \frac{\operatorname{ctg} t\, dt}{a+b\operatorname{sen} t}.$

19. $\int \sqrt{\frac{1+2y}{1-2y}}\,dy.$

20. $\int \frac{\sqrt{4x^2-25}\,dx}{x^2}.$

21. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}}.$

22. $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y-1}}.$

23. $\int \sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^2}}\,x\,dx.$

24. $\int \frac{d\theta}{5+3\,\mathrm{sen}\,2\,\theta}.$

25. $\int \frac{d\theta}{3+5\,\mathrm{sen}\,2\,\theta}.$

26. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^6+a^6}}.$

27. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}.$

28. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}.$

29. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}.$

30. $\int \frac{\sqrt{x^3-1}\,dx}{x}.$

31. $\int \frac{\sqrt{x+4}\,dx}{x}.$

32. $\int e^t\cos^2 t\,dt.$

33. $\int \frac{\mathrm{ctg}\,\theta\,d\theta}{4+\mathrm{sen}^2\,\theta}.$

Calcular el valor de cada una de las siguientes integrales definidas:

34. $\int_0^3 \frac{x\,dx}{(1+x)^2} = 0{,}636.$

35. $\int_1^{5/3} \frac{dx}{x^2\sqrt{25-9x^2}} = \frac{4}{25}.$

36. $\int_0^2 \frac{dx}{(4x^2+9)^{3/2}} = \frac{2}{45}.$

37. $\int_1^2 \frac{dt}{t(5-t^2)} = 0{,}277.$

38. $\int_0^2 (4x^2+9)^{3/2}\,dx = 112{,}9.$

39. $\int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a-u}{a+u}}\,du = \pi a.$

40. $\int_1^2 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-2x^2}} = 1{,}338.$

41. $\int_1^2 \frac{\sqrt{9-2x^2}\,dx}{x^2} = 1{,}129.$

42. $\int_1^2 \frac{\sqrt{9-2x^2}\,dx}{x} = 1{,}467.$

43. $\int_0^1 t^2e^{-t}\,dt = 0{,}1605.$

44. $\int_1^2 \frac{dy}{y^3\sqrt{4y^2+5}}.$

45. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{sen}^4\,\theta\,d\theta.$

46. $\int_0^2 \frac{x^2\,dx}{(4x^2+9)^{3/2}}.$

47. $\int_0^1 e^{-\frac{t}{5}}\cos\frac{1}{2}\pi t\,dt.$

48. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}.$

49. $\int_0^\pi \phi\cos\frac{1}{3}\phi\,d\phi.$

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Verificar los resultados siguientes:

(a) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1 + \ln x)} = \ln 3$; (b) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(1 + \ln x)^2} = \frac{2}{3}$.

2. Una parábola pasa por el origen y por el punto $(1, 2)$. El eje de la parábola es paralelo al eje de las y. Hallar la ecuación de la parábola, si el area de la superficie comprendida entre ella y el eje de las x es máxima o mínima.

Sol. La parábola $y = 6x - 4x^2$ da un mínimo.

3. Bosquejar la curva $y\sqrt{x} = \ln x$. Hallar el volumen del sólido de revolución engendrado al hacer girar alrededor del eje de las x la superficie limitada por la curva, el eje de las x y dos ordenadas, una la correspondiente al punto máximo y la otra al punto de inflexión. *Sol.* $\frac{296}{81}\pi$.

4. Un cono circular recto macizo está constituido de modo que la densidad en un punto cualquiera P es $10(5 - r)$ toneladas por metro cúbico, siendo r la distancia en metros entre el punto P y el eje del cono. Hallar el peso del cono si su altura y el radio de la base miden 3 metros. *Sol.* $315\,\pi$ toneladas.

NOTA. El peso de un cuerpo de densidad uniforme es el producto de su volumen por su densidad.

5. El radio exterior de una esfera hueca es 10 cm; su radio interior es 6 cm. La densidad en un punto varía en razón inversa de la distancia del punto al centro de la esfera; en la superficie exterior la densidad es 8 g por cm^3. Hallar el peso de la esfera. *Sol.* $10\,240\,\pi$ g.

6. Si n es un número entero par, demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots(1)}{n(n-2)\ldots(2)}\,\frac{\pi}{2}.$$

7. Si n es un número entero impar, hallar el valor de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx.$$

CAPITULO XVIII

CENTROS DE GRAVEDAD. PRESION DE LIQUIDOS. TRABAJO. VALOR MEDIO

177. Momento de superficie; centro de gravedad. El *centro de gravedad* de una superficie plana se define del modo siguiente:

Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el *centro de gravedad de la superficie plana* del cartón.

Para algunas superficies que se estudian en la Geometría elemental, las posiciones de los centros de gravedad son evidentes. Para un rectángulo o un círculo, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura. En general, si una figura plana tiene un centro de simetría, ese punto es el centro de gravedad. Además, si una figura plana tiene un eje de simetría, el centro de gravedad estará en ese eje.

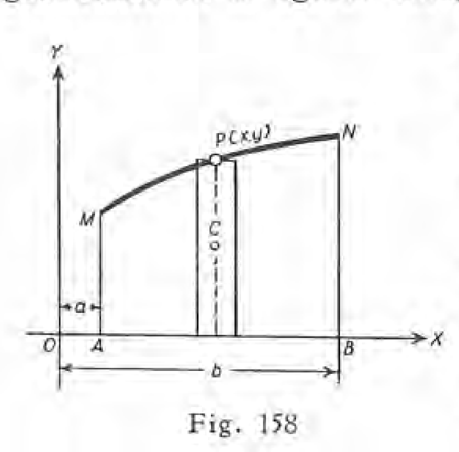


Fig. 158

Las siguientes consideraciones conducen a la determinación del centro de gravedad mediante el Cálculo integral. La justificación del argumento a partir de los principios fundamentales de la mecánica queda fuera del propósito de este libro.

Consideremos la superficie $AMPNB$ de la figura 158. Dividámosla en n rectángulos, cada uno con base Δx. La figura muestra uno de estos rectángulos. Sea dA su área, y $C(h, k)$ su centro de gravedad. Entonces,

(1) $$dA = y\,dx, \quad h = x, \quad k = \tfrac{1}{2} y.$$

El *momento de la superficie* de este rectángulo elemental con respecto a OX (u OY) es el producto de su área por la distancia de su

centro de gravedad a OX (u OY). Si estos momentos son respectivamente dM_x y dM_y, entonces

$$(A) \qquad dM_x = k\,dA, \quad dM_y = h\,dA.$$

El *momento de la superficie de la figura* AMPNB se obtiene aplicando el teorema fundamental (Art. 156) a la suma de los momentos de las superficies de los rectángulos fundamentales. De este modo obtenemos

$$(B) \qquad M_x = \int k\,dA, \quad M_y = \int h\,dA.$$

Por último, si $(\bar{x}, \bar{y})$ es el centro de gravedad de la figura $AMPNB$ y A es su área, las relaciones entre los momentos de superficie (**B**) y $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se dan por

$$(C) \qquad A\bar{x} = M_y, \quad A\bar{y} = M_x.$$

A fin de calcular $(\bar{x}, \bar{y})$, hallaremos los momentos M_x y M_y. Según (1) y (**B**) estos son, para la figura 158,

$$(2) \qquad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b xy\,dx,$$

en donde debe sustituirse el valor de y en función de x deducido de la ecuación de la curva MPN.

Si el área A se conoce, entonces, de (**C**) tenemos

$$(3) \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{A}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{A}.$$

Si A no se conoce, puede obtenerse por integración tal como vimos en el Artículo 145.

EJEMPLO 1. Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide (fig. 159)

$$(4) \qquad y = \operatorname{sen} x.$$

Solución. Construyendo un rectángulo elemental, tenemos

$$(5) \qquad dA = y\,dx = \operatorname{sen} x\,dx.$$

$$dM_x = k\,dA = \tfrac{1}{2}y^2\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\,dx.$$

$$dM_y = h\,dA = xy\,dx = x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Fig. 159

Los límites son $x = 0$, $x = \pi$. Por tanto,

$$(6) \quad A = \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = 2, \quad M_x = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{4}\pi, \quad M_y = \int_0^\pi x \operatorname{sen} x\,dx = \pi.$$

Luego, según (3), $\bar{x} = \tfrac{1}{2}\pi$, $\bar{y} = \tfrac{1}{8}\pi$.

Se hubiera podid prever el valor de $\bar{x}$, puesto que la recta $x = \tfrac{1}{2}\pi$ es un eje de simetría.

EJEMPLO 2. En la figura 160, la curva OPA es un arco de la parábola $y^2 = 2\,px$. Hallar el centro de gravedad de la superficie $OPAB$.

Solución. Tracemos un rectángulo elemental, como se indica en la figura; sea (h, k) su centro de gravedad. Entonces

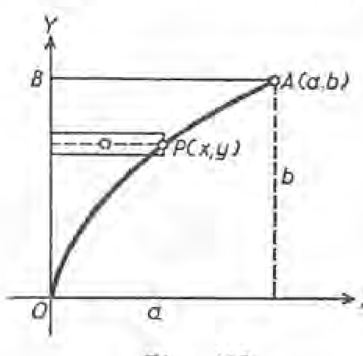


Fig. 160

$$dA = x\,dy, \quad h = \tfrac{1}{2}x, \quad k = y.$$

Empleando (A),

$$dM_x = k\,dA = xy\,dy,$$
$$dM_y = h\,dA = \tfrac{1}{2}x^2\,dy.$$

De la ecuación $y^2 = 2\,px$ hallamos x en función de y. Integrando entre los límites $y = 0$, $y = b$, se obtiene

$$A = \frac{b^3}{6\,p}, \quad M_x = \frac{b^4}{8\,p}, \quad M_y = \frac{b^5}{40\,p^2}.$$

Luego $\bar{x} = \dfrac{3\,b^2}{20\,p}$, $\bar{y} = \dfrac{3}{4}b$. Pero $x = a$, $y = b$ satisfacen la ecuación $y^2 = 2\,px$. Luego $b^2 = 2\,pa$, y $\bar{x} = \frac{3}{10}a$. Por tanto, el centro de gravedad es $(\frac{3}{10}a,\ \frac{3}{4}b)$.

PROBLEMAS

Hallar el centro de gravedad de cada una de las superficies limitadas por las siguientes curvas.

1. $y^2 = 2\,px$, $x = h$. *Sol.* $(\frac{3}{5}h,\ 0.)$.
2. $y = x^3$, $x = 2$, $y = 0$. $(\frac{8}{5},\ \frac{16}{7})$.
3. $y = x^3$, $y = 4\,x$. (Primer cuadrante.) $(\frac{16}{15},\ \frac{64}{21})$.
4. $x = 4\,y - y^2$, $y = x$. $(\frac{12}{5},\ \frac{3}{2})$.
5. $y^2 = 4\,x$, $2\,x - y = 4$. $(\frac{8}{5},\ 1)$.
6. $y = x^2$, $y = 2\,x + 3$. $(1,\ \frac{17}{5})$.
7. $y = x^2 - 2\,x - 3$, $y = 6\,x - x^2 - 3$. $(2,\ 1)$.
8. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.
9. $y = 6\,x - x^2$, $y = x$.
10. $y = 4\,x - x^2$, $y = 2\,x - 3$.
11. $y = x^3 - 3\,x$, $y = x$. (Primer cuadrante.)
12. $y^2 = a^2 - ax$, $x = 0$, $y = 0$. (Primer cuadrante.)
13. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y = 0$, $x = 2\,a$. (Primer cuadrante.)

14. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por los ejes de coordenadas y la parábola $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. *Sol.* $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{5}a$.

15. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por el lazo de la curva $y^2 = 4x^2 - x^3$

Sol. $\bar{x} = \frac{16}{7}$, $\bar{y} = 0$.

16. Hallar el centro de gravedad de la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que está en el primer cuadrante.

Sol. $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$, $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$.

17. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $y = mx$.

Sol. $\bar{x} = \frac{4p}{5m^2}$, $\bar{y} = \frac{p}{m}$.

18. Hallar el centro de gravedad de la superficie incluída por las parábolas $y^2 = ax$ y $x^2 = by$.

Sol. $\bar{x} = \frac{9}{20} a^{1/3} b^{2/3}$, $\bar{y} = \frac{9}{20} a^{2/3} b^{1/3}$.

19. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la cisoide $y^2(2a - x) = x^3$ y su asintota $x = 2a$.

Sol. $\bar{x} = \frac{5}{3}a$, $\bar{y} = 0$.

20. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $x^2 y = 4a^2(2a - y)$ (la bruja) y el eje de las x.

Sol. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{1}{2}a$.

21. Hallar la distancia del centro del circulo al centro de gravedad de un sector circular de radio r y ángulo 2θ.

Sol. $\frac{2r \operatorname{sen} \theta}{3\theta}$.

22. Hallar la distancia del centro del circulo al centro de gravedad de un segmento circular cuya cuerda subtiende un ángulo central 2θ.

Sol. $\frac{2r \operatorname{sen}^3 \theta}{3(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta)}$.

23. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la cardioide $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

Sol. $\bar{x} = \frac{5}{6}a$, $\bar{y} = 0$.

24. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por una hoja de la curva $\rho = a \cos 2\theta$.

Sol. Distancia del origen $= \frac{128 a\sqrt{2}}{105\pi}$.

25. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por una hoja de la curva $\rho = a \cos 3\theta$.

Sol. Distancia del origen $= \frac{81 a\sqrt{3}}{80\pi}$.

178. Centro de gravedad de un sólido de revolución. El centro de gravedad mecánico de un sólido homogéneo coincide con el centro de gravedad geométrico de ese cuerpo. Si el sólido posee un plano de simetría, el centro de gravedad estará en ese plano.

Para obtener una definición analítica del centro de gravedad de un sólido de revolución, basta modificar sólo en pequeños detalles, lo dicho en el artículo anterior.

Sea OX (fig. 161) el eje geométrico del sólido. El centro de gravedad estará en este eje. Sea dV un elemento de volumen; es decir, un cilindro de revolución de altura Δx y radio y. Entonces $dV = \pi y^2 \, \Delta x$. El *momento de este cilindro* con respecto al plano que pasa por OY perpendicular a OX es

$$(1) \qquad dM_y = x \, dV = \pi x y^2 \, \Delta x.$$

El *momento del sólido* se halla en seguida por el teorema fundamental, y $\bar{x}$ se da por

$$(2) \qquad V\bar{x} = M_y = \int \pi x y^2 \, dx.$$

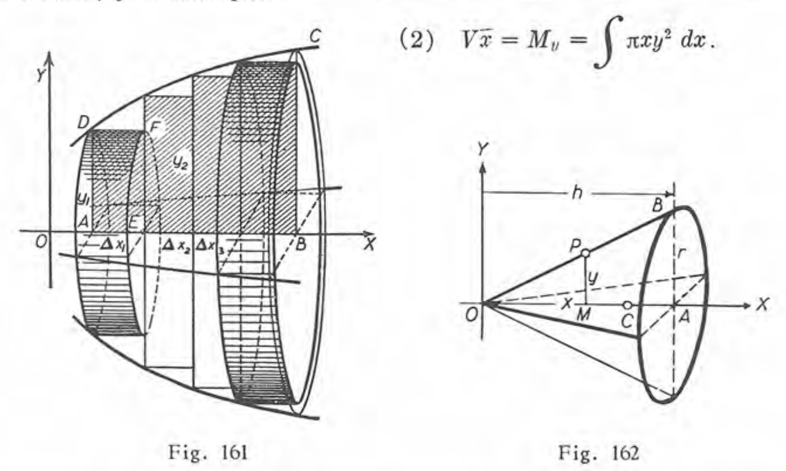


Fig. 161 Fig. 162

EJEMPLO. Hallar el centro de gravedad de un cono macizo de revolución (figura 162).

Solución. La ecuación de la generatriz OB es

$$\frac{y}{x} = \frac{AB}{OA} = \frac{r}{h}, \text{ o sea, } y = \frac{rx}{h}.$$

Luego $$M_y = \int_0^h \pi x \frac{r^2 x^2}{h^2} \, dx = \frac{1}{4} \pi r^2 h^2.$$

Puesto que $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, $\bar{x} = \frac{3}{4} h$.

PROBLEMAS

Hallar el centro de gravedad para cada uno de los siguientes sólidos:

1. Hemisferio (fig. 163).

Sol. $\bar{x} = \frac{3}{8} r$.

2. Paraboloide de revolución (fig. 164).

Sol. $\bar{x} = \frac{2}{3} h$.

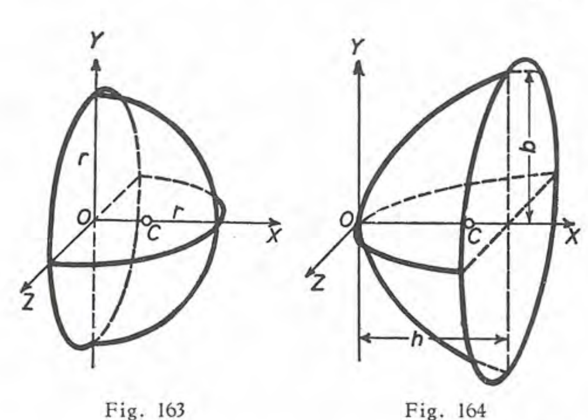


Fig. 163 Fig. 164

El área limitada por OX y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de OX. Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

3. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = 2a$.

4. $2xy = a^2$, $x = \frac{1}{2}a$, $x = 2a$.

5. $ay = x^2$, $x = a$. *Sol.* $\bar{x} = \frac{5}{6}a$.

6. $y^2 = 4x$, $x = 1$, $x = 4$.

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x = 0$, $x = 1$. $\bar{x} = \frac{21}{44}$.

8. $y = a \operatorname{sen} x$, $x = \frac{1}{2}\pi$.

La superficie limitada por OY y cada una de las curvas siguientes gira alrededor de OY. Hallar el centro de gravedad del sólido de revolución que se engendra:

9. $y^2 = 4ax$, $y = b$. *Sol.* $\bar{y} = \frac{5}{6}b$.

10. $x^2 - y^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$. $\bar{y} = \frac{9}{16}$.

11. $ay^2 = x^3$, $y = a$.

12. El radio de la base superior de un tronco de cono de revolución es de 3 cm; el de la base inferior es de 6 cm, y la altura mide 8 cm. Determínese el centro de gravedad.

13. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie del primer cuadrante limitada por las rectas $y = 0$, $x = a$ y la parábola $y^2 = 4ax$ gira alrededor del eje de las y. *Sol.* $\bar{y} = \frac{5}{6}a$.

14. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma al hacer girar alrededor del eje de las x la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que está en el primer cuadrante. *Sol.* $\bar{x} = \frac{3}{8}a$.

15. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie del primer cuadrante limitada por las rectas $y = 0$, $x = 2a$ y la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gira alrededor del eje de las x.

16. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma al hacer girar la superficie limitada por las rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, alrededor del eje de las x.

17. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma al hacer girar la superficie limitada por las rectas $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ y la curva $y = \operatorname{sen} 2x$, alrededor del eje de las x.

18. Hallar el centro de gravedad del sólido que se forma cuando la superficie limitada por las rectas $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ y la curva $y = e^x$ gira alrededor del eje de las x.

19. La superficie limitada por una parábola, su eje y su lado recto gira alrededor del lado recto. Hallar el centro de gravedad del sólido que se engendra.
Sol. Distancia del foco = $\frac{5}{32}$ del lado recto.

179. Presión de líquidos. Pasemos ahora al estudio de la *presión de líquidos*, para aprender a calcular la presión de un líquido sobre una pared vertical. *

---

* N. DEL T. En este capítulo emplearemos el término *presión* con dos significados. En este Artículo 179, cuando hablamos de la presión sobre una superficie entendemos la fuerza total ejercida sobre esta superficie por el líquido que pesa sobre ella, de suerte que la presión es una función del área de la superficie; así, si la presión sobre 1 m² es 1 200 Kg, entonces la presión sobre 2 m² es 2 400 Kg. En el Artículo 180 vamos a emplear la palabra presión en el sentido de intensidad, de manera que el símbolo p (presión) representará una cantidad independiente de la superficie sobre la que la presión se ejerce; así, por ejemplo en el caso de un gas contenido en un cilindro, diremos que la presión del gas es la misma sobre la pared del cilindro que sobre su base.

Supongamos que $ABDC$ (fig. 165) representa una parte de la superficie vertical de una pared de un aljibe. Se desea determinar la presión total del líquido sobre esta superficie. Sea W el peso del volumen unitario de líquido. Tracemos los ejes como se indica en la figura, estando el eje de las y en la superficie del líquido. Dividamos AB en n subintervalos, y construyamos rectángulos horizontales dentro de la superficie. El área de un rectángulo (como EP) es $y\,\Delta x$. Si este rectángulo fuese horizontal a la profundidad x, la presión del líquido sobre él sería

$$Wxy\,\Delta x.$$

[La presión de un líquido sobre una superficie horizontal dada es igual al peso de una columna del líquido cuya base es esa superficie y cuya altura es igual a la distancia entre esa superficie y la superficie del líquido. *]

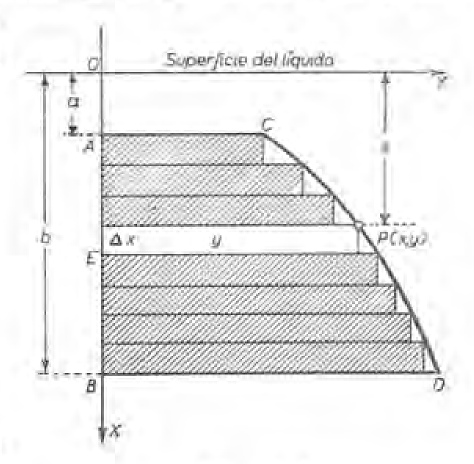


Fig. 165

Puesto que la presión de un líquido es la misma en todas direcciones, se sigue que $Wxy\,\Delta x$ es, aproximadamente, la presión sobre el rectángulo EP en su posición vertical. Por tanto, la suma

$$\sum_{i=1}^{n} Wx_i y_i\,\Delta x_i$$

representa, aproximadamente, la presión sobre todos los rectángulos. Evidentemente, la presión sobre la superficie $ABDC$ es el límite de la suma. Luego, según el teorema fundamental,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Wx_i y_i\,\Delta x_i = \int Wxy\,dx.$$

Por tanto, la presión de un líquido sobre una superficie vertical sumergida limitada por una curva, el eje de las x y las dos rectas horizontales $x = a$ y $x = b$ se da por la fórmula

$$\textbf{(D)} \qquad \textbf{Presión del líquido} = W\int_a^b yx\,dx,$$

---

* N. DEL R. En Hidrostática se distingue la presión total de la presión específica, o sea, el *cociente* entre la fuerza y el área sobre la que está aplicada esta fuerza.

en donde el valor de y ha de sustituirse en términos de x, deducido de la ecuación de la curva dada.

Puesto que el gramo es el peso de 1 cm³ de agua, el peso de 1 m³ es 1 000 Kg.

EJEMPLO 1. Una cañería circular de 2 m de diámetro (fig. 166) está medio llena de agua. Hallar la presión sobre la compuerta que cierra la cañería.

Solución. La ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = 1$.

Por tanto,

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$
$$W = 1\,000,$$

y los límites son $x = 0$ y $x = 1$. Sustituyendo en (D), encontramos que la presión a la derecha del eje de las x es

$$\text{Presión} = 1\,000\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\cdot x\,dx = \left[-\frac{1\,000}{3}(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 333,33.$$

Luego, presión total $= 2 \times 333,33 = 666,7$ Kg.

La parte esencial de nuestro razonamiento es que la presión $(= dP)$ sobre una tira horizontal elemental es igual (aproximadamente) al

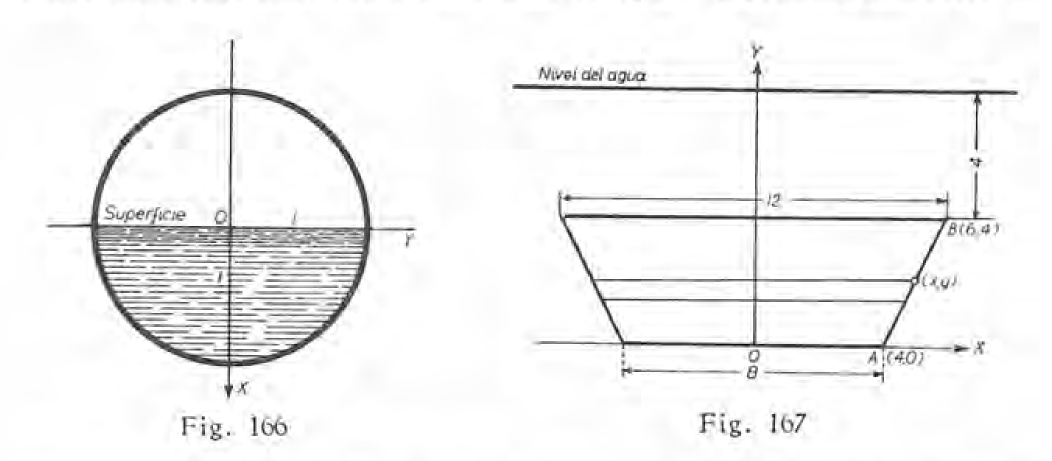


Fig. 166

Fig. 167

producto del área de la tira $(= dA)$ por su profundidad $(= h)$ y el peso $(= W)$ del volumen unidad del líquido. Es decir,

$$(E) \qquad dP = Wh\,dA.$$

Teniendo presente esto, podemos elegir los ejes de coordenadas en cualquiera posición que nos convenga.

EJEMPLO 2. La figura 167 muestra una compuerta, en forma de trapecio, de una presa. Hallar la presión sobre la compuerta cuando la superficie del agua está 4 m arriba del borde superior de la compuerta.

Solución. Eligiendo los ejes OX y OY como se muestran, y trazando una tira horizontal elemental, tenemos, empleando (E),

$$dA = 2\,x\,dy, \quad h = 8 - y, \quad dP = W(8-y)2\,x\,dy.$$

La ecuación de AB es $y = 2\,x - 8$. Despejando x de esta ecuación y sustituyendo, se obtiene

$$dP = W(8-y)\,(y+8)\,dy = W(64-y^2)\,dy.$$

Integrando con los límites $y = 0$ y $y = 4$, obtenemos

$$P = W\int_0^4 (64-y^2)\,dy = \frac{704}{3}W = 234\,667 \text{ Kg}.$$

PROBLEMAS

En los siguientes problemas el eje de las y se dirige verticalmente hacia arriba, y el eje de las x está al nivel de la superficie de un líquido. Representando por W el peso de la unidad cúbica del líquido, calcular la presión sobre las superficies que se forman uniendo con líneas rectas cada serie de puntos, en el orden dado.

1. $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,-6)$, $(0,0)$. *Sol.* $18\,W$.

2. $(0,0)$, $(3,-6)$, $(0,-6)$, $(0,0)$. $36\,W$.

3. $(0,0)$, $(2,-2)$, $(0,-4)$, $(-2,-2)$, $(0,0)$. $16\,W$.

4. Calcular la presión sobre la mitad inferior de una elipse cuyos semiejes son 2 unidades y 3 unidades, *a*) cuando el eje mayor está en la superficie del líquido; *b*) cuando el eje menor está en la superficie.
Sol. *a*) $8\,W$; *b*) $12\,W$.

5. Cada uno de los extremos de un tanque horizontal es una elipse cuyo eje horizontal es de 4 m y el eje vertical de 2 m. Calcular la presión sobre un extremo cuando el tanque está medio lleno de petróleo que pesa 800 Kg por m³.
Sol. 1 067 Kg.

6. Un extremo vertical de un tanque es un segmento de parábola con el vértice hacia abajo; la distancia en la parte superior es de 3 m, la profundidad de 6 m. Calcular la presión sobre este extremo cuando el tanque esta lleno de un liquido que pesa 1 100 Kg por m³. *Sol.* 31 680 Kg.

7. El extremo vertical de una artesa es un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 3 m cada uno. Calcular la presión del liquido sobre la extremidad cuando la artesa está llena de agua.
Sol. 3 182 Kg.

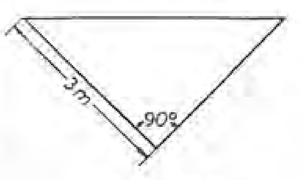


Fig. 168

8. La extremidad vertical de una artesa es un triángulo isósceles; el lado de arriba es de 2 m y la profundidad de 2 m. Calcular la presión del líquido sobre la extremidad cuando la artesa está llena de agua. *Sol.* 1 333 Kg.

SUGESTION. Si la ordenada de un vértice superior es m, la del otro será $m - 2$.

9. Un tanque cilíndrico, horizontal, de 3 m de diámetro, está medio lleno de petróleo cuyo peso es 800 Kg por m³. Calcular la presión sobre un extremo. *Sol.* 1 800 Kg.

10. Calcular la presión sobre una extremidad si el tanque del problema 9 está lleno.

11. Una compuerta rectangular en una presa vertical tiene 3 m de ancho y 2 m de alto. Hallar: *a*) la presión cuando el nivel del agua está 3 m arriba del borde superior de la compuerta; *b*) cuánto más debe subir el agua para que la presión encontrada en (*a*) se doble. *Sol.* *a*) 24 000 Kg.; *b*) 4 m.

12. Demostrar que la presión sobre una superficie vertical es el producto de la unidad cúbica del líquido, por el área de la superficie y por la profundidad del centro de gravedad del área.

13. Un tanque cilíndrico vertical de 10 m de diametro y 16 m de altura está lleno de agua. Hallar la presión sobre la superficie encorvada. *Sol.* 4021 ¼ toneladas.

180. Trabajo. En mecánica, el trabajo realizado por una fuerza constante F que causa un desplazamiento d es el producto Fd. Cuando F es variable, esta definición conduce a una integral. Aquí vamos a considerar dos ejemplos.

Trabajo de bombeo. Consideremos ahora el problema de averiguar el trabajo que se realiza al vaciar un aljibe cuya forma es la de un sólido de revolución con eje vertical. Es cómodo suponer que el eje de las x de la curva que gira sea vertical, y que el eje de las y esté en el plano de la parte superior del aljibe.

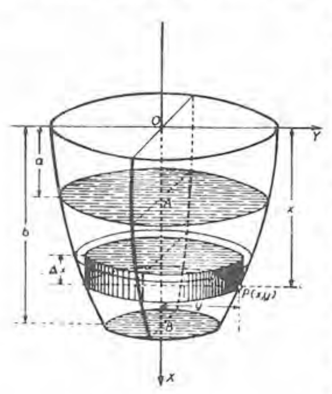


Fig. 169

Considérese un aljibe tal como se muestra en la figura 169; deseamos calcular el trabajo que se realiza al vaciarlo, si la superficie del líquido pasa de la profundidad a hasta la profundidad b.

Para ello, dividamos AB en n subintervalos, por estos puntos de división hagamos pasar planos perpendiculares al eje de revolución, y construyamos cilindros de revolución, tal como se hizo en el Artículo 160. El volumen de uno cualquiera de de tales cilindros será $\pi y^2 \Delta x$ y su peso $W\pi y^2 \Delta x$, siendo $W =$ el peso de la unidad cúbica de líquido. El trabajo que se realiza al subir un peso es igual al producto del peso por la altura vertical; por

consiguiente, el trabajo de subir ese cilindro de líquido a la altura x será $W\pi y^2 x\,\Delta x$. El trabajo realizado al subir hasta arriba todos estos cilindros es la suma

$$\sum_{i=1}^{n} W\pi y_i^2\, x_i \Delta x_i .$$

El trabajo realizado al vaciar la parte AB del aljibe es, evidentemente, el límite de esta suma. Por tanto, según el teorema fundamental,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} W\pi\, y_i^2\, x_i\, \Delta x_i = \int W\pi y^2\, x\, dx .$$

Luego el trabajo realizado al vaciar un aljibe en forma de un sólido de revolución, de manera que la superficie del líquido pase desde la profundidad a hasta la profundidad b, viene dado por la fórmula

$$(F) \qquad \textbf{Trabajo} = W\pi \int_a^b y^2 x\, dx,$$

en donde el valor de y ha de sustituirse en términos de x obtenido de la ecuación de la curva que gira.

EJEMPLO 1. Calcular el trabajo que se realiza bombeando el agua que llena un algibe hemisférico de 10 m de hondo.

Solución. La ecuación del círculo es

$$x^2 + y^2 = 100 .$$

Luego, $y^2 = 100 - x^2$,

$W = 1\,000$,

y los límites son $x = 0$ y $x = 10$.

Sustituyendo en (F), obtenemos

$$\text{Trabajo} = 1\,000\,\pi \int_0^{10} (100 - x^2)\, x\, dx$$
$$= 2\,500\,000\,\pi \text{ Kgm}.$$

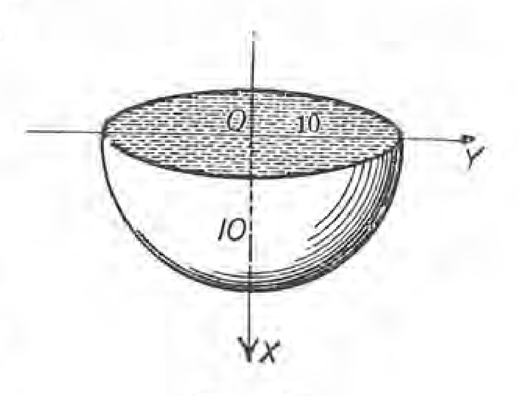


Fig. 170

El principio esencial en este razonamiento es que el elemento de trabajo $(= dT)$ que se realiza al levantar un elemento dV de volumen a una altura h es

$$dT = Wh\, dV ,$$

siendo $W =$ el peso del volumen unidad del líquido. Teniendo presente esto, podemos elegir los ejes de coordenadas de cualquier modo que nos convenga.

EJEMPLO 2. Una cisterna cónica tiene 20 m de diámetro superior y 15 m de profundidad. Si la superficie del agua está 5 m más abajo que la parte de arriba, hallar el trabajo que se hace bombeando hasta arriba el agua de la cisterna.

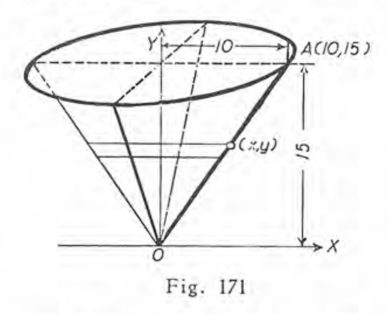


Fig. 171

Solución. Tómense los ejes OX y OY como en la figura 171. Entonces

$$dV = \pi x^2\,dy,$$
$$h = 15 - y,$$
$$dT = W(15 - y)\pi x^2\,dy.$$

La ecuación de la recta OA es $x = \frac{2}{3}y$. Sustituyendo,

$$dT = \pi W(15 - y)\tfrac{4}{9}y^2\,dy$$
$$= \tfrac{4}{9}\pi W(15y^2 - y^3)\,dy.$$

Los límites son $y = 0$ y $y = 10$, puesto que el agua tiene 10 m de hondo. Integrando,

$$T = \tfrac{4}{9}\pi W\int_0^{10}(15y^2 - y^3)\,dy = 3\,490\,660 \text{ Kgm}.$$

Trabajo de un gas al dilatarse. Si un gas en un cilindro al dilatarse empuja la cabeza de un émbolo de manera que el volumen del gas pase de v_0 m³ hasta v_1 m³, el trabajo exterior que se realiza es, en kilográmetros,

$$(G) \qquad \text{Trabajo} = \int_{v_0}^{v_1} p\,dv,$$

en donde p = presión en kilogramos por metro cuadrado.

Demostración. Supongamos que el volumen aumente de v a $v + dv$.

Sea c = área de la sección transversal del cilindro.

Entonces $\dfrac{dv}{c}$ = la distancia que se mueve el émbolo.

Puesto que pc = fuerza que causa la dilatación dv, tenemos:

$$\text{Elemento del trabajo realizado} = pc \cdot \frac{dv}{c} = p\,dv.$$

De esta igualdad se obtiene (G) aplicando el teorema fundamental.

Para aplicar (G), debe conocerse la relación entre p y v durante la dilatación. Esta relación tiene la forma

$$(1) \qquad pv^n = \text{una constante}.$$

siendo el exponente n una constante.

La *dilatación isoterma* ocurre cuando la temperatura permanece constante. Entonces $n = 1$, y la relación entre la presión y el volumen es

$$(2) \qquad pv = p_0v_0 = p_1v_1.$$

Si se construye la gráfica de (1) (*diagrama de presión y volumen*), con los volúmenes como abscisas y las presiones como ordenadas, el área debajo de esta curva da, numéricamente, el trabajo hecho según (*G*). En la dilatación isoterma la gráfica de (2) es una hipérbola equilátera.

PROBLEMAS

1. Una cisterna cilíndrica vertical de 5 m de diámetro y 8 m de profundidad está llena de agua. Calcular el trabajo al bombear el agua hasta el borde de la cisterna. *Sol.* $500\,000\,\pi$ Kgm.

2. Si la cisterna del problema 1 está medio llena, calcular el trabajo de subir el agua al borde.

3. Una cisterna cónica que tiene 6 m de diámetro superior y 6 m de profundidad está llena de agua. Calcular el trabajo de subir el agua 5 m más alto que el borde. *Sol.* $117\,000\,\pi$ Kgm.

4. Un tanque hemisférico de 3 m de diámetro está lleno de petróleo que pesa 800 Kg por metro cúbico. Calcular el trabajo de subir el petróleo al borde del tanque.

Sol. $\dfrac{8\,100\,\pi}{8}$ Kgm.

5. Un tanque hemisférico de 6 m de diámetro está lleno de petróleo que pesa 800 Kg por m^3. El petróleo se bombea, hasta un nivel 3 m más alto que el borde del tanque, mediante un motor de medio caballo de vapor (es decir, el motor realiza un trabajo de 2 250 Kgm por minuto). ¿Cuánto tiempo se tardará en vaciar el tanque?

6. Averiguar el trabajo que se hace al vaciar con una bomba un aljibe semi-elipsoidal lleno de agua. La parte superior es un círculo de 2 m de diámetro y 2,5 m de profundidad. *Sol.* $6\,000\,\pi$ Kgm.

7. Un aljibe cónico que tiene 2 m de diámetro superior y 3 m de profundidad está lleno de un líquido que pesa 1 280 Kg por m^3. Calcular el trabajo de subir el líquido al borde del aljibe. *Sol.* $960\,\pi$ Kgm.

8. Un tanque para agua tiene la forma de un hemisferio de 8 m de diámetro coronado de un cilindro del mismo diámetro y de 3 m de altura. Averiguar el trabajo que se hace al vaciarlo con una bomba cuando está lleno hasta 1,5 metros debajo del borde.

9. Un cubo de peso M debe subirse desde el fondo de un pozo de h m de profundidad. El peso de la cuerda que se emplea en elevarle es m Kg por metro. Hallar el trabajo que se realiza.

10. Seis metros cúbicos de aire a la presión de 1 Kg por cm^2 se comprimen a la presión de 5 Kg por cm^2. Determínese el volumen final, y el trabajo realizado si se aplica la ley isoterma, es decir, $pv = C$. *Sol.* 1,2 m^3; 96 566 Kgm.

11. Determínese el volumen final y el trabajo que se ha hecho en el problema 10 si se aplica la ley adiabática, es decir, $pv^n = C$, suponiendo $n = 1,4$.
Sol. 1,9 m^3; 87 673 Kgm.

12. Una masa de aire a la presión de 1 Kg por cm^2 se comprime de 8 m^3 a 2 m^3. Determínese la presión final y el trabajo realizado, si la ley es $pv = C$.
Sol. 4 Kg por cm^2; 110 900 Kgm.

13. Resuélvase el problema 12 si la ley es $pv^n = C$, suponiendo $n = 1,4$.
Sol. 6,964 Kg por cm^2; 148 220 Kgm.

14. Una masa de gas con volumen inicial de medio metro cúbico y presión de 4 Kg por cm^2 se dilata hasta que la presión es 2 Kg por cm^2. Determínese el volumen final, y el trabajo hecho por el gas si la ley es $pv = C$.
Sol. 1 m^3; 13 863 Kgm.

15. Resuélvase el problema 14 si la ley es $pv^n = C$, suponiendo $n = 1,2$.
Sol. 0,89 m^3; 10 911 Kgm.

16. Una masa de aire con volumen inicial de 5,5 m^3 y presión de 1 kilogramo por cm^2 se comprime a 1,2 m^3. Determínese la presión final, y el trabajo que se ha hecho si la ley es $pv = C$.

17. Resuélvase el problema 16 si la ley es $pv^n = C$, suponiendo $n = 1,4$.

18. Un gas se dilata de una presión inicial de 5,5 Kg por cm^2 y volumen de 70 litros al volumen de 250 litros. Hallar el trabajo que se ha hecho si la ley es $pv^n = C$, suponiendo $n = 1,0646$.

19. Resuélvase el problema 18 si $n = 1,131$.

20. Si una varilla recta, homogénea y de espesor uniforme tiene de longitud l y masa M, determínese la atracción que ejerce sobre un punto material P de masa m situado a la distancia a de una extremidad de la varilla, en la dirección de ésta.

Solución. Supóngase la varilla dividida en porciones iguales suficientemente pequeñas (elementos) de longitud dx.

$$\frac{M}{l} = \text{masa de una porción de la varilla de longitud unidad;}$$

luego $\frac{M}{l}\,dx =$ masa de cualquier elemento.

La ley de Newton respecto a la atracción entre dos masas cualesquiera dice:

$$\text{Fuerza de atracción} = \frac{\text{producto de las masas}}{(\text{distancia entre ellas})^2};$$

Fig. 172

por tanto, la fuerza de atracción entre el punto material P y un elemento de la varilla es

$$\frac{\frac{M}{l} m\, dx}{(x+a)^2},$$

que es, por consiguiente, *un elemento de la fuerza de atracción buscada*. Puesto que la atracción total entre el punto material situado en P y la varilla es el límite de la suma de todos los tales elementos entre $x = 0$ y $x = l$, tenemos:

$$\text{Fuerza de atracción} = \int_0^l \frac{\frac{M}{l} m\, dx}{(x+a)^2} = \frac{Mm}{l}\int_0^l \frac{dx}{(x+a)^2} = +\frac{Mm}{a(a+l)}.$$

21. Determínese la atracción en el problema anterior si P está en la perpendicular de la varilla en su punto medio, a la distancia a de ésta.

Sol. $\dfrac{2\, mM}{a\sqrt{4\, a^2 + l^2}}$.

22. Una vasija que tiene la forma de un cono circular recto está llena de agua. Si h es su altura y r el radio de la base, ¿cuánto tiempo necesitará para vaciarse por un orificio de área a en el vértice?

Solución. Despreciando todas las resistencias, se sabe que la velocidad de salida por un orificio es la que un cuerpo adquiere cuando cae libremente desde una altura igual a la profundidad del agua. Por tanto, si x representa la profundidad del agua, tendremos

$$v = \sqrt{2\, gx}.$$

Si designamos por dQ el volumen del agua que sale en el tiempo dt, y por dx el descenso correspondiente de la superficie, el volumen del agua que sale en la unidad de tiempo es

$$a\sqrt{2\, gx},$$

midiéndose como un cilindro recto con base de área a y con altura $v\left(=\sqrt{2\, gx}\right)$. Por tanto, en el tiempo dt

Fig. 173

$$(1) \qquad dQ = a\sqrt{2\, gx}\; dt.$$

Designando por S el área de la superficie del agua cuando la profundidad es x, tenemos, por Geometría,

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{x^2}{h^2}, \text{ o sea, } S = \frac{\pi r^2 x^2}{h^2}.$$

Pero el volumen del agua que sale en el tiempo dt puede igualmente considerarse como el volumen de un cilindro AB con base de área S y con altura dx; por tanto,

$$(2) \qquad dQ = S\,dx = \frac{\pi r^2 x^2\,dx}{h^2}.$$

Igualando (1) y (2), y despejando dt,

$$dt = \frac{\pi r^2 x^2\,dx}{ah^2\sqrt{2gx}}.$$

Por tanto,

$$t = \int_0^h \frac{\pi r^2 x^2\,dx}{ah^2\sqrt{2gx}} = \frac{2\pi r^2\sqrt{h}}{5a\sqrt{2g}}.$$

181. Valor medio de una función. La *media aritmética* (o valor medio) de n números $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es

$$(1) \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

De manera análoga se establece la fórmula:

$$(\boldsymbol{H}) \qquad \left.\begin{array}{c}\textbf{Valor medio de } \phi(x) \\ \textbf{de } x = a \textbf{ a } x = b\end{array}\right\} = \frac{\int_a^b \phi(x)\,dx}{b-a}.$$

La figura 174 muestra la gráfica de

$$(2) \qquad y = \phi(x).$$

Una manera de establecer el valor medio $(\bar{y})$ de las ordenadas del arco PQ, es la siguiente: dividamos AB en n partes iguales, cada una igual a Δx, y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las ordenadas en los n puntos de división. Entonces (1) dará un valor aproximado del valor medio buscado. Si ahora multiplicamos por Δx el numerador y el denominador del segundo miembro de (1), entonces, puesto que $n\,\Delta x = b - a$, obtenemos:

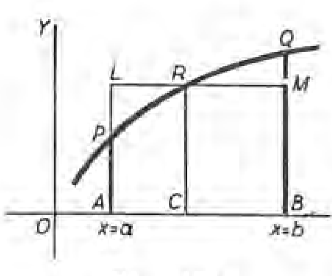


Fig. 174

$$(3) \qquad \bar{y}\ \text{(aproximadamente)} = \frac{y_1\,\Delta x + y_2\,\Delta x + \ldots + y_n\,\Delta x}{b-a}.$$

Y como el numerador en (3), es, aproximadamente, el área $APRQB$, resulta que si definimos el valor medio de y [o sea, de $\phi(x)$], como el límite del segundo miembro de (3) cuando $n \to \infty$, obtenemos $(\boldsymbol{H})$.

En la figura, el valor medio de $\phi(x)$ es igual a CR si el área del rectángulo $ABML$ = área $APRQB$.

Si tomamos y como función (la variable dependiente), entonces (H) se convierte en

$$(I) \qquad \bar{y} = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a}.$$

EJEMPLO. Dado el círculo (fig. 175)

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

hallar el valor medio de las ordenadas en el primer cuadrante:

a) cuando y se expresa como una función de la abscisa x:

b) cuando y se expresa como una función del ángulo θ (el ángulo MOP).

Solución. *a*) Puesto que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, el numerador en (I) es

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi r^2.$$

Entonces,

$$\bar{y} = \tfrac{1}{4}\pi r = 0.785\,r.$$

b) Puesto que $y = r \operatorname{sen} \theta$, y que los límites son

$$\theta = 0 = a, \quad \theta = \tfrac{1}{2}\pi = b,$$

el numerador en (I) es

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} r \operatorname{sen} \theta \, d\theta = r.$$

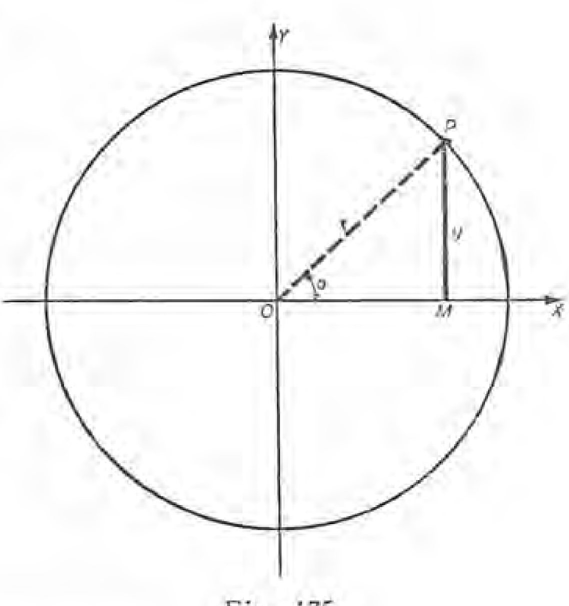


Fig. 175

Y como $b - a = \tfrac{1}{2}\pi$, tenemos $\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi} = 0.637\,r$.

Así tenemos valores de y absolutamente diferentes, según la variable independiente con respecto a la que se toma el valor medio.

Como en el ejemplo anterior se muestra, el valor medio de una función dada y dependerá de la variable que se haya elegido como variable independiente. Por esta razón escribimos (I) en la forma

$$(5) \qquad \bar{y}_x = \frac{\int_a^b y\,dx}{b-a},$$

para indicar, explícitamente, la variable con respecto a la que se calcula el valor medio.

Así, en el ejemplo anterior tenemos $\overline{y_x} = 0,785\ r$ y $\overline{y_\theta} = 0,637\ r$.

PROBLEMAS

1. Hallar el valor medio de $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 10$. *Sol.* $33\frac{1}{3}$.

2. Hallar el valor medio de las ordenadas de $y^2 = 4x$ de (0, 0) a (4, 4), tomadas uniformemente a lo largo del eje de las x. *Sol.* $2\frac{2}{3}$.

3. Hallar el valor medio de las abscisas de $y^2 = 4x$ de (0, 0) a (4, 4) cuando se distribuyen uniformemente a lo largo del eje de las y. *Sol.* $1\frac{1}{3}$.

4. Hallar el valor medio de sen x entre $x = 0$ y $x = \pi$. *Sol.* $2/\pi$.

5. Hallar el valor medio de sen² x entre $x = 0$ y $x = \pi$. (Este valor medio se emplea frecuentemente en la teoría de las corrientes alternas.) *Sol.* $\frac{1}{2}$.

6. Si en el vacío un punto material se arrojase hacia abajo con velocidad inicial de v_0 m por segundo, la velocidad después de t segundos viene dada por la fórmula

(1) $$v = v_0 + gt.$$

La velocidad después de caer s m viene dada por la fórmula

(2) $$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,gs}.$$ (Tómese $g = 9,8$.)

Hallar el valor medio de v,

a) durante los primeros 5 segundos partiendo del reposo;
Sol. 24,5 m por segundo.

b) durante los primeros 5 segundos, partiendo con velocidad inicial de 10,5 m por segundo; *Sol.* 35 m por segundo.

c) durante los primeros $2\frac{1}{2}$ segundos, partiendo del reposo;
Sol. 12,25 m por segundo.

d) durante los primeros 30 metros, partiendo del reposo;
Sol. 13,46 m por segundo.

e) durante los primeros 30 m, partiendo con velocidad inicial de 18,5 m por segundo. *Sol.* 32,17 m por segundo.

7. En el movimiento armónico simple, s (= distancia) = $a \cos nt$. Hallar el valor medio de la velocidad durante un cuarto de periodo: *a*) con respecto al tiempo; *b*) con respecto a la distancia.

8. Demostrar que en el movimiento armónico simple la energía cinética media, con respecto al tiempo, para un múltiplo cualquiera de un cuarto de periodo, es la mitad de la energía cinética máxima.

9. En una línea recta de longitud a se toma un punto al azar. Demostrar: *a*) que el área media del rectángulo cuyos lados son los dos segmentos es $\frac{1}{6}a^2$; *b*) que el valor medio de la suma de los cuadrados construidos sobre los dos segmentos es $\frac{2}{3}a^2$.

10. Si un punto se mueve con aceleración constante, el valor medio, con respecto al tiempo, del cuadrado de la velocidad es $\frac{1}{3}(v_0^2 + v_0v_1 + v_1^2)$ siendo v_0 la velocidad inicial y v_1 la final.

11. Demostrar que el alcance horizontal medio de una partícula material lanzada con velocidad dada con un ángulo de elevación arbitrario, es 0,6366 del máximo alcance horizontal.

SUGESTION. Tómese $\alpha = 0$ en la fórmula del problema 35 de la página 137.

Las fórmulas

$$(6) \qquad \bar{x}_s = \frac{\int x\,ds}{\int ds}, \quad \bar{y}_s = \frac{\int y\,ds}{\int ds},$$

en donde (x, y) es un punto cualquiera sobre una curva cuyo elemento de arco es ds, definen *el centro de gravedad del arco*. Estas fórmulas dan, respectivamente, los valores medios de las abscisas y ordenadas de puntos sobre la curva cuando éstos están uniformemente distribuídos a lo largo de ella. (Compárese con lo dicho en el Artículo 177.)

12. Demostrar que el área de la superficie curva que se engendra haciendo girar un arco de una curva plana alrededor de una recta de su plano, que no corta el arco, es igual al producto de la longitud del arco por la circunferencia que describe su centro de gravedad (6). (Teorema de Pappus. Compárese con lo dicho en el Artículo 250.)

SUGESTION. Empléese (L) del Artículo 164.

13. Hallar el centro de gravedad del arco de la parábola $y^2 = 4x$ comprendido entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 4)$. *Sol.* $\bar{x} = 1,64$, $\bar{y} = 2,29$.

14. Hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia $\rho = a$ comprendido entre $-\theta$ y $+\theta$.

Sol. $\bar{x} = \dfrac{a \operatorname{sen} \theta}{\theta}$.

15. Hallar el centro de gravedad de la curva $\rho = a(1 + \cos\theta)$, llamada cardioide. *Sol.* $\bar{x} = \frac{4}{5}a$, $\bar{y} = 0$.

16. Por el teorema de Pappus hallar el centro de gravedad del arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ situado en el primer cuadrante.

Sol. $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$.

17. Hallar, por el teorema de Pappus, el área de la superficie del toro que se engendra haciendo girar el círculo $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ $(b > a)$ alrededor del eje de las y.

18. Un rectángulo gira alrededor de un eje que está en su plano y es perpendicular a una diagonal en uno de sus extremos. Hallar el área de la superficie que se engendra.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Una superficie está limitada por las líneas $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$ y $x = 3$. Hallar su centro de gravedad.

Sol. $\bar{x} = \frac{76}{37}$, $\bar{y} = \frac{281}{185}$.

2. La abscisa del centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $2y = x^2$ y cierta línea que pasa por el origen es 1. Hallar la ordenada del centro de gravedad. *Sol.* $\frac{4}{5}$.

3. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la curva $y = x^n$ $(n > 0)$, el eje de las x y $x = 1$. Discútase el lugar geométrico del centro de gravedad cuando n varía.

Sol. $\bar{x} = \frac{n + 1}{n + 2}$, $\bar{y} = \frac{n + 1}{2(2n + 1)}$.

4. Hallar la ecuación del lugar geométrico del centro de gravedad de la superficie limitada por el eje de las x y la parábola $y = cx - x^2$ cuando c varía.

Sol. $5y = 2x^2$.

5. Se dan la parábola $x^2 = 2py$ y una recta oblicua cualquiera $y = mx + b$ que corta la parábola en los puntos A y B. Por C, punto medio de AB, trácese una paralela al eje de la parábola, y sea D el punto de intersección. Demostrar que: a) la tangente a la parábola en D es paralela a la recta AB; b) el centro de gravedad del recinto $ACBD$ está en la recta CD.

6. Sea P un punto de la parábola $y = x^2$, y sea C el centro de gravedad del recinto limitado por la parábola, el eje de las x y la ordenada por P. Hallar la posición de P de manera que el ángulo OPC sea máximo.

Sol. Ordenada $= \frac{5}{4}$.

7. Una cisterna tiene la forma de un sólido engendrado haciendo girar alrededor de su eje vertical un segmento de parábola terminado por una cuerda perpendicular al eje a distancia de 3 m del vértice; la cuerda tiene 3 m de largo. La cisterna está llena de agua. Hallar el trabajo que se necesita para bombear hasta arriba de la cisterna la mitad del volumen de agua.

Sol. $3375 (\sqrt{2} - 1) \frac{\pi}{2} = 2196$ Kgm.

8. Una cisterna hemisférica, de radio r, está llena de agua, que se ha de bombear. La bomba está accionada por dos hombres sucesivamente, y cada uno

de ellos hace la mitad del trabajo. ¿Cuál será la profundidad d del agua cuando el primer hombre ha terminado el trabajo que le corresponde?

$$Sol.\quad \frac{d}{r} = 1 - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = 0{,}459.$$

9. Un tanque que tiene la forma de un cono circular invertido está lleno de agua. Dos hombres deben bombear el agua hasta arriba del tanque, haciendo cada uno la mitad del trabajo. Llamando z a la razón de la profundidad del agua que queda en el tanque cuando el primer hombre ha terminado su trabajo, a la profundidad inicial, demostrar que z se determina por la ecuación $6z^4 - 8z^3 + 1 = 0$. Calcular el valor de z con dos decimales. *Sol.* 0,61.

10. Un pozo tiene 30 m de profundidad. Un cubo que pesa 1,5 Kg tiene un volumen de 60 litros ($= 0{,}06$ m^3). El cubo se llena de agua en el fondo del pozo, y se levanta hasta arriba con velocidad constante de 2 m por segundo. Despreciando el peso de la cuerda, hallar el trabajo que se hace en levantar el cubo, si se sabe que el agua se sale del cubo a la razón constante de 0,3 litros por segundo. *Sol.* 888,75 Kgm.

11. La porción de plano OAB se divide en elementos tales como OPQ (fig. 176) por rectas trazadas desde O. Demostrar que el área A del recinto y los momentos de área M_x y M_y vienen dados por las fórmulas:

$$A = \tfrac{1}{2}\int (xy' - y)\,dx,$$

$$M_x = \tfrac{1}{3}\int y\,(xy' - y)\,dx,$$

$$M_y = \tfrac{1}{3}\int x\,(xy' - y)\,dx.$$

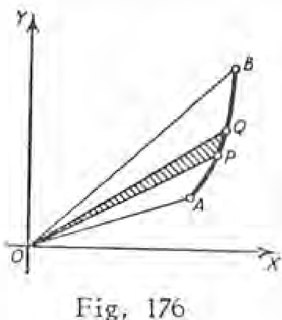


Fig. 176

(El centro de gravedad de un triángulo está sobre cualquier mediana a dos tercios de la distancia del vértice al lado opuesto.)

12. Hallar el centro de gravedad del sector hiperbólico limitado por la hipérbola equilátera $x = a \sec\theta$, $y = a \operatorname{tg}\theta$ y los radios que unen el origen con los puntos $(a, 0)$ y (x, y).

$$Sol.\quad \bar{x} = \frac{2}{3}a\frac{\operatorname{tg}\theta}{\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)},\quad \bar{y} = \frac{2}{3}a\frac{\sec\theta - 1}{\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)}.$$

CAPITULO XIX

SERIES

182. Definiciones. Una *sucesión* es un conjunto de términos formados según una ley o regla determinada.

Por ejemplo, $1, 4, 9, 16, 25$

y $$1, -x, \frac{x^2}{2}, -\frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, -\frac{x^5}{5}$$

son sucesiones.

Una *serie* es la suma indicada de los términos de una sucesión. Así, de las sucesiones anteriores obtenemos las series

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

y $$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}.$$

Cuando el número de términos es limitado, se dice que la sucesión o serie es *finita*. Cuando el número de términos es ilimitado, la sucesión o serie se llama una *sucesión infinita* o una *serie infinita*.

El *término general* o término *enésimo* es una expresión que indica la ley de formación de los términos.

EJEMPLO 1. En la primera sucesión anterior, el término general o término enésimo es n^2. El primer término se obtiene haciendo $n = 1$, el décimo término haciendo $n = 10$, etc.

EJEMPLO 2. En la segunda sucesión, el término enésimo, con excepción de $n = 1$, es $\frac{(-x)^{n-1}}{n-1}$.

Si la sucesión es infinita, se indica por puntos suspensivos, como

$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots.$$

Factoriales. Una expresión que se presenta frecuentemente en el estudio de las series es el producto de números enteros sucesivos comenzando por 1. Así, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ es una expresión de esta clase, que se llama *factorial* 5. Las notaciones $\underline{|5}$ ó $5!$ son las más usuales. En general, una expresión de la forma

$$\underline{|n} = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

se llama *factorial* n. Se entiende que n es un número entero y positivo. La expresión $\underline{|n}$ no tiene significado si n no es un número entero y positivo.

183. **La serie geométrica.** Para la serie geométrica de n términos,

$$(1) \qquad S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1},$$

se demuestra en Algebra elemental que

$$(2) \qquad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \text{ o también, } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1},$$

empleándose la primera forma si $|r|<1$ y la segunda si $|r|>1$.

Si $|r|<1$, entonces r^n disminuye en valor numérico cuando n aumenta, y

$$\lim_{n \to \infty} (r^n) = 0.$$

Luego vemos por la fórmula (2) que (Art. 16)

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Por tanto, si $|r|<1$ la suma S_n de una serie geométrica tiende hacia un límite cuando el número de términos aumenta indefinidamente. En este caso se dice que la serie es **convergente.**

Si $|r|>1$, entonces r^n se hará infinito cuando n aumenta indefinidamente (Art. 18). Por tanto, de la segunda fórmula de (2), la suma S_n se hará infinita. En este caso se dice que la serie es **divergente.**

Un caso especial se presenta si $r = -1$. Entonces la serie es

$$(4) \qquad a - a + a - a + a - a \ldots.$$

Si n es par, la suma es cero. Si n es impar, la suma es a. Cuando n aumenta indefinidamente la suma no aumenta indefinidamente y no tiende hacia un límite. Una serie de esta clase se llama *oscilante*.

EJEMPLO. Consideremos la serie geométrica en la que

$$a = 1, \quad r = \tfrac{1}{2},$$

(5) $$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Según (2), $$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Entonces

(6) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 2$, lo que está de acuerdo con (3) cuando $a = 1$, $r = \tfrac{1}{2}$.

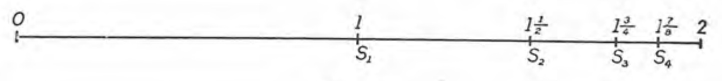


Fig. 177

Es interesante estudiar la serie (5) desde un punto de vista geométrico. Para ello, tomemos sobre una recta, como se indica en la figura 177, valores sucesivos de S_n,

n	1	2	3	4,	etc.
S_n	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$1\frac{7}{8}$,	etc.

Cada punto así determinado biseca el segmento entre el punto anterior y el punto 2. De esta consideración, la igualdad (6) resulta evidente.

PROBLEMAS

En cada una de las series siguientes: *a*) descubrir la ley de formación; *b*) escribir tres términos más; *c*) hallar el término *enésimo* o *general*.

1. $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$ *Sol.* Término enésimo $= 2^n$.

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ $\qquad \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

3. $-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \dots$ $\qquad \frac{n-2}{n+1}$.

4. $x + \frac{x^2}{1} + \frac{x^3}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ $\qquad \frac{nx^n}{\lfloor n}$.

5. $\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2 \cdot 4} + \frac{x\sqrt{x}}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$ $\qquad \frac{x^{\frac{n}{2}}}{2^n \lfloor n}$.

6. $\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{5} + \frac{a^4}{7} - \frac{a^5}{9} + \dots$ $\qquad \frac{(-a)^{n+1}}{2n+1}$

Escribir los cuatro primeros términos de cada serie cuyo término *enesimo* o *general* es el que se da.

7. $\dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{n}}$. *Sol.* $1+\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{3}}+\dfrac{8}{\sqrt{4}}+\ldots$.

8. $\dfrac{n+2}{2n-1}$. $3+\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{5}+\dfrac{6}{7}+\ldots$.

9. $\dfrac{n}{3^{n-1}}$. $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{4}{27}+\ldots$.

10. $\dfrac{x^{n-1}}{\sqrt{n}}$. $1+\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{x^2}{\sqrt{3}}+\dfrac{x^3}{\sqrt{4}}+\ldots$

11. $\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}}$. $x-\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{x^5}{\underline{|5}}-\dfrac{x^7}{\underline{|7}}+\ldots$.

12. $\dfrac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n}}$.

13. $\dfrac{(y+n)^{2n-1}}{2^n\,\underline{|n}}$.

14. $\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{n+2}}$.

15. $\dfrac{3^{n-1}\,\theta^n}{2^n\,\underline{|n-1}}$.

184. Series convergentes y divergentes. En la serie

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

la variable S_n es una función de n. Ahora bien, si hacemos que el número de términos $(=n)$ tienda a infinito, puede ocurrir una de las dos cosas siguientes:

CASO I. **Que S_n tienda hacia un límite,** digamos u; es decir, que

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = u.$$

En este caso se dice que la serie infinita es *convergente* y que converge al valor u, o que tiene el valor u.

CASO II. **Que S_n no tienda hacia ningún límite.** En este caso se dice que la serie infinita es *divergente*.

Ejemplos de series divergentes son

$$1+2+3+4+5+\ldots,$$
$$1-1+1-1+\ldots.$$

Como ya hemos dicho, en una serie convergente *el valor de la serie* es un número u (llamado a veces la suma) que se define por (1). A una serie divergente no se le asigna ningún valor.

En las aplicaciones de las series infinitas, las series convergentes son las de mayor importancia. Es preciso, por tanto, tener medios para poder saber si una serie dada es convergente o divergente.

185. Teoremas generales. Antes de desarrollar métodos especiales para probar las series, llamaremos la atención sobre los siguientes teoremas. Se prescinde de su demostración.

Teorema I. *Si* S_n *es una variable que siempre aumenta cuando* n *aumenta, pero sin llegar nunca a ser mayor que algún número fijo definido* A, *entonces, cuando* n *tiende a infinito,* S_n *tendrá un límite* u *no mayor que* A.

La figura 178 ilustra la proposición. Los puntos determinados por los valores S_1, S_2, S_3, etc., se acercan al punto u, que no está más allá de A. Así,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = u.$$

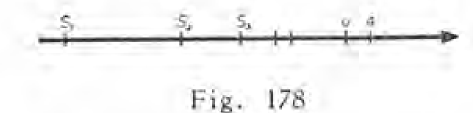


Fig. 178

EJEMPLO. Demostrar que la serie infinita

$$(1) \qquad 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{|\underline{n}} + \cdots$$

es convergente.

Solución. Prescindiendo del primer término, podemos escribir

$$(2) \qquad S_n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

Consideremos ahora la variable s_n definida por la igualdad

$$(3) \qquad s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

formada reemplazando por 2 todos los factores, excepto el factor 1, de los denominadores de (2). Evidentemente, $S_n < s_n$. Además, en (3) tenemos una serie geométrica con $r = \frac{1}{2}$ y $s_n < 2$ por grande que sea n (véase el Artículo 183). Por tanto, S_n, definida por la igualdad (2), es una variable que siempre aumenta cuando n aumenta, pero que permanece menor que 2. Luego, S_n tiende hacia un límite, cuando n tiende a infinito, y ese límite es menor que 2. Por consiguiente, la serie infinita (1) es convergente, y su valor es menor que 3.

Veremos más adelante que el valor de (1) es la constante $e = 2{,}71828\ldots$, base de los logaritmos naturales (Art. 61).

Teorema II. *Si* S_n *es una variable que siempre disminuye cuando* n *aumenta, pero sin llegar nunca a ser menor que algún número fijo definido* B, *entonces, cuando* n *tiende a infinito,* S_n *tenderá hacia un límite* u *no menor que* B.

Consideremos ahora una serie convergente

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

en la que $\lim_{n \to \infty} S_n = u$.

Representemos gráficamente en una recta orientada los puntos determinados por los valores S_1, S_2, S_3, etc. Entonces, cuando n aumenta, estos puntos se acercarán al punto determinado por u (teniendo todos los términos de S_n el mismo signo) o se agruparán alrededor de este punto. Así es evidente que

$$(A) \qquad \lim_{n \to \infty} u_n = 0.$$

Es decir, en una serie convergente el término general tiende a cero.

Recíprocamente, si el término general de una serie no tiende a cero cuando n tiende a infinito, la serie es divergente.

Pero (A) no es condición "suficiente" para la convergencia de la serie; es decir, si el término enésimo tiende a cero, no por eso podemos afirmar que la serie es convergente. En efecto, consideremos la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

En este caso,

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0;$$

lo que nos dice que se cumple la condición (A). Sin embargo, demostraremos en el Artículo 186 que la serie es divergente.

Ahora vamos a deducir criterios especiales de convergencia que por lo común se aplican más fácilmente que los teoremas anteriores.

186. Criterios de comparación. En muchos casos es fácil determinar si una serie dada es o no convergente, comparándola, término a término, con otra serie cuyo carácter se conoce.

Criterio de convergencia. *Sea*

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

una serie de términos positivos que deseamos saber si es o no convergente. Si se puede encontrar una serie de términos positivos que sepamos de antemano que es convergente, a saber,

$$(2) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

cuyos términos no sean nunca menores que los términos correspondientes de la serie dada (1), entonces la serie (1) es convergente y su valor no excede al de la serie (2).

Demostración. Sea

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

y

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

y supongamos que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = A.$

Entonces, puesto que

$$S_n < A \quad \text{y} \quad s_n \leqq S_n,$$

también es $s_n < A$. Por tanto, según el teorema I del Artículo 185, s_n tiende hacia un límite y la serie (1) es convergente, y su valor no es mayor que A, como se quería demostrar.

EJEMPLO 1. Averiguar si la serie

$$(3) \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \ldots.$$

es convergente.

Solución. Comparándola con la serie geométrica

$$(4) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots.$$

que se sabe es convergente, se observa que los términos de (4) nunca son menores que los términos correspondientes de (3). Por tanto, la serie (3) es también convergente.

Por un razonamiento análogo al que hemos aplicado a (1) y (2) podemos demostrar el

Criterio de divergencia. *Sea*

$$(5) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

una serie de términos positivos que deseamos saber si es o no convergente. Si estos términos no son nunca menores que los términos correspondientes de una serie de términos positivos tal como

$$(6) \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots,$$

de la cual se sabe de antemano que es divergente, entonces (5) *es una serie divergente.*

EJEMPLO 2. Demostrar que la serie armónica

$$(7) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

es divergente.

Solución. Escríbase (7) como se indica a continuación, y compárese la serie con la escrita debajo de ella. Los paréntesis se introducen para ayudar a la comparación.

$$(8) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right] + \ldots.$$

$$(9) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right] + \ldots.$$

Observamos que los términos de (8) nunca son menores que los términos correspondientes de (9).

Pero observamos también que (9) es divergente, puesto que la suma de los términos en cada paréntesis es ½, de suerte que S_n aumentará indefinidamente cuando n se hace infinito.

Luego (8) es divergente.

EJEMPLO 3. Averiguar la convergencia o divergencia de la serie

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots.$$

Solución. Esta serie es divergente, puesto que sus términos son mayores que los términos correspondientes de la serie armónica (7) que es divergente.

Vamos ahora a estudiar la serie

$$(10) \qquad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots,$$

llamada a veces "serie p", pues es útil para aplicar el criterio de comparación.

Teorema. *La "serie p" es convergente cuando* $p > 1$; *es divergente para otros valores de* p.

Demostración. Escríbase (10) como se indica a continuación, y compárese con la serie que se escribe debajo de ella. Los signos de paréntesis se emplean para ayudar a la comparación.

$$(11)\quad 1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p}+\ldots+\frac{1}{15^p}\right]+\ldots,$$

$$(12)\quad 1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right] + \left[\frac{1}{8^p}+\ldots+\frac{1}{8^p}\right]+\ldots.$$

Si $p>1$, los términos de (12) nunca son menores que los términos correspondientes de (11). Pero en (12) las sumas de dentro de los paréntesis son

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}};\quad \frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}=\frac{2^2}{2^{2p}}=\frac{1}{2^{2(p-1)}};$$

$$\frac{1}{8^p}+\ldots+\frac{1}{8^p}=\frac{8}{8^p}=\frac{2^3}{2^{3p}}=\frac{1}{2^{3(p-1)}},$$

y así sucesivamente. Por tanto, a fin de averiguar la convergencia o divergencia de (12), podemos considerar la serie

$$(13)\qquad 1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^3+\ldots.$$

Cuando $p>1$, la serie (13) es una serie geométrica de razón menor que la unidad; luego, es convergente. Luego (10) también es convergente. Cuando $p=1$, la serie (10) es la serie armónica y es divergente. Cuando $p<1$, los términos de la serie (10), con excepción del primero, son mayores que los términos correspondientes de la serie armónica, luego en este caso (10) es también divergente. El teorema queda, por consiguiente, demostrado.

EJEMPLO 4. Demostrar que la serie

$$(14)\quad \frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\frac{4}{3\cdot4\cdot5}+\frac{6}{4\cdot5\cdot6}+\ldots+\frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+$$

es convergente.

Solución. En (14), $u_n < \frac{2n}{n^3}$, o sea, $\frac{1}{2} u_n < \frac{1}{n^2}$; es decir, que $\frac{1}{2} u_n$ es menor que el término general de la "serie p" cuando $p = 2$. Por tanto, la serie en la que cada uno de sus términos es la mitad del término correspondiente en (14) es convergente; luego (14) también es convergente.

PROBLEMAS

Averiguar la convergencia o divergencia de cada una de las siguientes series:

1. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \dots \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \dots$. *Sol.* Convergente.

2. $\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$. Divergente.

3. $\frac{2}{1} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{3^3} + \dots \frac{2}{n^n} + \dots$. Convergente.

4. $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \dots \frac{3}{n(n+1)} + \dots$. Convergente.

5. $\frac{4}{2 \cdot 3} + \frac{8}{3 \cdot 4} + \frac{12}{4 \cdot 5} + \dots \frac{4n}{(n+1)(n+2)} + \dots$. Divergente.

6. $\frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 6}$
$+ \dots \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$. Convergente.

7. $\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots \frac{1}{5n} + \dots$. Divergente.

8. $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots \frac{1}{n+3} + \dots$. Divergente.

9. $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{28} + \dots \frac{1}{3^n + 1} + \dots$. Convergente.

10. $\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots \frac{1}{\sqrt[n]{3}} + \dots$. Divergente.

11. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \dots \frac{1}{n^2 + 3} + \dots$. Convergente.

12. $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \dots \frac{1}{3^n - 1} + \dots$. Convergente.

13. $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$
$+ \dots \frac{n}{2(n+1)(n+2)} + \dots$. Divergente.

14. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\dots$. Convergente.

15. $\frac{2}{9}+\frac{2^2}{28}+\frac{2^3}{65}+\frac{2^4}{126}+\dots$.

16. $\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\frac{2}{12}+\dots$.

17. $\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\dots$.

18. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{14}+\dots$.

187. Criterio de D'Alembert. En la serie geométrica infinita

$$a+ar+ar^2+\dots+ar^n+ar^{n+1}+\dots,$$

la razón de los términos consecutivos ar^n y ar^{n+1} es r. Sabemos que esta serie es convergente cuando $|r|<1$, y divergente para otros valores. Ahora vamos a explicar un criterio que usa la razón de un término al precedente y que puede aplicarse a cualquiera serie.

Teorema. *Sea*

(1) $$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+u_{n+1}+\dots$$

una serie infinita de términos positivos. Consideremos dos términos generales consecutivos u_n *y* u_{n+1}, *y formemos la razón de un término cualquiera al anterior, o **razón de D'Alembert:***

$$\textbf{Razón de D'Alembert} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Hallemos ahora el límite de esta razón de D'Alembert cuando n *tiende a infinito. Sea este límite*

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Entonces:

I. *Cuando* $\rho<1$, *la serie es convergente.*

II. *Cuando* $\rho>1$, *la serie es divergente.*

III. *Cuando* $\rho=1$, *el criterio falla.*

Demostración. I. *Cuando* $\rho<1$. Según la definición de límite (Art. 14) podemos elegir n tan grande, digamos $n=m$, que cuando $n \geqq m$ la razón $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ diferirá tan poco de ρ como queramos, y, en consecuencia, será menor que una fracción propia r. Luego

$$u_{m+1}<u_m r;\quad u_{m+2}<u_{m+1}r<u_m r^2;\quad u_{m+3}<u_m r^3;$$

y así sucesivamente. Por tanto, después del término u_m, cada término de la serie (1) es menor que el término correspondiente de la serie geométrica

$$(2) \qquad u_m r + u_m r^2 + u_m r^3 + \ldots .$$

Pero, puesto que $r < 1$, la serie (2) es convergente; luego la serie (1) también lo es (Art. 186).

II. *Cuando* $\rho > 1$ (o $\rho = \infty$). Razonando como en I, puede demostrarse que la serie (1) es ahora divergente.

III. *Cuando* $\rho = 1$, la serie puede ser convergente o divergente; es decir, que el criterio falla. En efecto, consideremos la "serie p",

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \frac{1}{(n+1)^p}.$$

La razón de D'Alembert es

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p;$$

$$\text{y} \qquad \lim_{n \to \infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = (1)^p = 1 (= \rho).$$

Luego $\rho = 1$, cualquiera que sea el valor de p. Pero en el Artículo 186 hemos demostrado que cuando $p > 1$ la serie es convergente, y cuando $p \leqq 1$ la serie es divergente.

Así queda comprobado que ρ puede ser igual a 1, tanto para series convergentes como para las divergentes. Cuando esto ocurre pueden aplicarse otros criterios, pero el plan de nuestro libro no nos permite considerarlos.

Para la convergencia no basta que la razón de un término al anterior sea menor que la unidad para todos los valores de n. Este criterio exige que el *límite* de la razón sea menor que la unidad. Por ejemplo, en la serie armónica la razón de un término al anterior es siempre menor que 1; pero el *límite* es 1.

La exclusión de un grupo de términos al principio de una serie afectará al *valor* del límite pero no a su *existencia*.

188. Series alternadas. Se da este nombre a las series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos.

Teorema. *Si*

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

es una serie alternada, en la que cada término es numéricamente menor que el que le precede, y si

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0,$$

entonces la serie es convergente.

Demostración. Cuando n es par, S_n puede escribirse en las dos formas

(1) $S_n = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{n-1} - u_n)$,

(2) $S_n = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{n-2} - u_{n-1}) - u_n$.

Cada expresión entre paréntesis es positiva. Por tanto, cuando n aumenta tomando valores pares, (1) muestra que S_n aumenta, y (2) muestra que S_n es siempre menor que u_1; por tanto, según el teorema I del Artículo 185, S_n tiende hacia un límite l. Pero S_{n+1} también tiende hacia este límite l, puesto que $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$ y $\lim u_{n+1} = 0$. Luego, cuando n aumenta tomando todos los valores enteros, $S_n \to l$ y la serie es convergente.

EJEMPLO. Averiguar si la serie alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

es convergente.

Solución. Cada término es numéricamente menor que el que le precede. Además, $u_n = \frac{1}{n}$, luego $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$. Luego la serie es convergente.

Una consecuencia importante de la demostración anterior es la siguiente proposición:

Si en una serie alternada convergente se suprimen los términos que siguen a uno determinado, el error que se comete no excede, numéricamente, al valor del primero de los términos que se desechan.

(Así, por ejemplo, la suma de diez términos de la serie del ejemplo anterior es 0,646, y el valor de la serie difiere menos de un onzavo de este valor.)

En esta proposición se supone que la serie se ha continuado suficientemente para que los términos disminuyan numéricamente.

189. Convergencia absoluta. Se dice que una serie es *absolutamente* o *incondicionalmente* convergente cuando es convergente la serie formada por los valores absolutos de sus términos. Las otras series alternadas convergentes se llaman *condicionalmente convergentes*.

Por ejemplo, la serie

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\ldots$$

es *absolutamente convergente*, puesto que la serie (3) del Artículo 186 es convergente. La serie alternada

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$$

es *condicionalmente* convergente, puesto que la serie formada por los valores absolutos de sus términos es la serie armónica que es divergente.

Una serie con algunos signos positivos y algunos negativos es convergente si la serie que se deduce de ella tomando todos los términos con signo positivo es convergente.

Se omite la demostración de este teorema.

190. Resumen. Suponiendo que el criterio de la razón de D'Alembert (Art. 187) es válido sin poner a los signos de los términos ninguna restricción, podemos resumir nuestros resultados en las siguientes

Instrucciones generales para averiguar la convergencia o divergencia de la serie

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots.$$

Si es una serie alternada cuyos términos decrecen en valor numérico, y si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

entonces la serie es convergente.

Si no se satisfacen las condiciones anteriores, determinamos la forma de u_n *y* u_{n+1}, *formamos la razón de D'Alembert y calculamos*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=\rho.$$

I. *Cuando* $|\rho|<1$, *la serie es absolutamente convergente.*

II. *Cuando* $|\rho|>1$, *la serie es divergente.*

III. *Cuando* $|\varrho| = 1$, *el criterio falla, y comparamos la serie dada con alguna otra que sabemos que es convergente, como, por ejemplo,*

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots; \quad (r<1) \qquad \textit{(serie geométrica)}$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots; \quad (p > 1) \qquad \textit{(serie p)}$$

o con alguna que se sabe que es divergente, como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots; \qquad \textit{(serie armónica)}$$

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots. \quad (p < 1) \qquad \textit{(serie p)}$$

EJEMPLO 1. Estudiar la serie

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$$

Solución. Aquí

$$u_n = \frac{1}{(n-1)!}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n!},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},$$

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

y la serie es convergente.

EJEMPLO 2. Averiguar la convergencia o divergencia de la serie

$$\frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \ldots.$$

Solución. Aquí

$$u_n = \frac{n!}{10^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}.$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \frac{n+1}{10}.$$

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty,$$

y la serie es divergente.

EJEMPLO 3. Estudiar la serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots.$$

Solución. Aquí $u_n = \frac{1}{(2n-1)2n}$, $u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)2n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2}.$$

$$\varrho = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2-2n}{4n^2+6n+2} = 1,$$

según la regla dada en el Artículo 18. Luego el criterio de D'Alembert falla.

Pero si comparamos la serie dada con la "serie p" cuando $p = 2$, a saber

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots,$$

vemos que la serie es convergente, puesto que sus términos son menores que los términos correspondientes de esta serie p, y hemos demostrado que ésta es convergente.

PROBLEMAS

Estudiar cada una de las siguientes series, respecto a su convergencia o divergencia.

1. $\frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots$ *Sol.* Convergente.

2. $\frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{6}{2^4} + \dots$ Convergente.

3. $\frac{3}{2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{3^4}{4 \cdot 2^4} + \dots$ Divergente.

4. $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \frac{\lfloor n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)} + \dots$ Convergente.

5. $\frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \dots \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)} + \dots$ Convergente.

6. $\frac{1}{1} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots$ Convergente.

7. $\frac{5}{1} + \frac{5^2}{\lfloor 2} + \frac{5^3}{\lfloor 3} + \frac{5^4}{\lfloor 4} + \dots$ Convergente.

8. $\frac{1}{9} + \frac{\lfloor 2}{9^2} + \frac{\lfloor 3}{9^3} + \frac{\lfloor 4}{9^4} + \dots$ Divergente.

9. $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{7}{3^4} + \dots$

10. $1 + \frac{2\lfloor 2}{5} + \frac{2^2\lfloor 3}{10} + \frac{2^3\lfloor 4}{17} + \dots$

11. $\frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} + \frac{1}{6 \cdot 3^3} + \frac{1}{7 \cdot 3^4} + \cdots$

12. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{5}{5^3} + \frac{6}{5^4} + \cdots$

13. $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + \cdots$

191. Series de potencias. Una serie cuyos términos son monomios de potencias enteras, positivas y ascendentes de una variable, digamos x, de la forma

$$(1) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

en donde los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... son independientes de x, se llama una *serie de potencias en* x. Tales series son de la mayor importancia en el Análisis matemático.

Una serie de potencias de x puede converger para todos los valores de x, o para ningún valor con excepción de $x = 0$, o puede converger para algunos valores de x distintos de cero y ser divergente para otros valores.

Vamos a examinar la serie (1) sólo para el caso de ser los coeficientes tales que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = L,$$

siendo L un número determinado. Para ver el motivo de esto, apliquemos el criterio de D'Alembert (Art. 187) a la serie (1), omitiendo el primer término. Entonces tenemos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x.$$

Luego, para cualquier valor fijo de x,

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} x \right) = x \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = xL.$$

Tenemos dos casos:

I. Si $L = 0$, la serie (1) será convergente para todos los valores de x, puesto que $\rho = 0$.

II. Si L no es cero, la serie será convergente cuando xL $(= \rho)$ es numéricamente menor que 1, es decir, para valores de x en el intervalo

$$-\frac{1}{|L|} < x < \frac{1}{|L|},$$

que se llama *intervalo de convergencia* o *campo de convergencia*, y será divergente para valores de x fuera de este intervalo.

Los extremos del intervalo deben examinarse separadamente. Para toda serie dada debe formarse la razón de D'Alembert y determinarse el intervalo de convergencia aplicando lo dicho en el Artículo 187.

EJEMPLO 1. Hallar el intervalo de convergencia de la serie

$$(2) \qquad x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \frac{x^4}{4^2} + \dots .$$

Solución. Aquí la razón de D'Alembert es $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n^2}{(n+1)^2}x$. Según el Artículo 18, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Luego $\rho = -x$, y la serie converge cuando x es numéricamente menor que 1, y diverge cuando x es numéricamente mayor que 1.

Ahora examinemos los extremos del intervalo. Sustituyendo en (2) $x = 1$, obtenemos

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots,$$

que es una serie alternada convergente. Sustituyendo en (2) $x = -1$, obtenemos

$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots,$$

que es convergente por comparación con la serie p $(p > 1)$.

La serie del ejemplo dado tiene $[-1, 1]$ como intervalo de convergencia. Esto puede escribirse $-1 \leqq x \leqq 1$, o puede indicarse gráficamente como se indica en la figura 179:

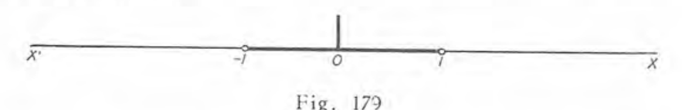


Fig. 179

EJEMPLO 2. Determinar el intervalo de convergencia para la serie

$$1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \frac{x^{2n+2}}{\underline{|2n+2}} + \dots .$$

Solución. Prescindiendo del primer término, la razón de D'Alembert es

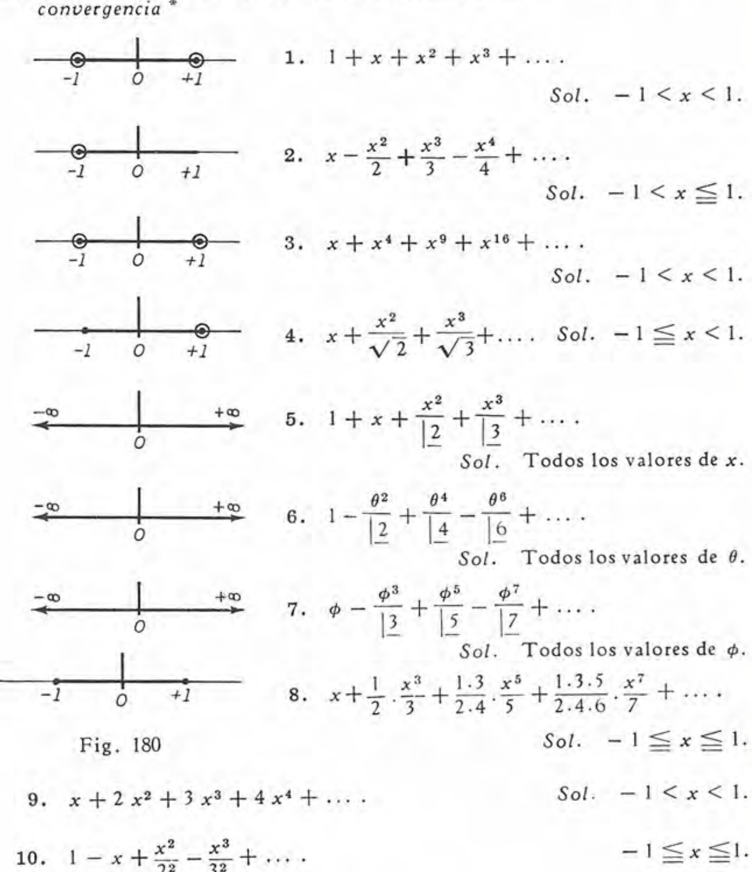
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|2n+2}}\,x^2 = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\,x^2.$$

Además, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0$. Luego la serie converge para todos los valores de x.

PROBLEMAS

Representaciones gráficas de los intervalos de convergencia *

¿Para qué valores de la variable son convergentes las siguientes series?



1. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots .$ *Sol.* $-1 < x < 1.$

2. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots .$ *Sol.* $-1 < x \leqq 1.$

3. $x + x^4 + x^9 + x^{16} + \ldots .$ *Sol.* $-1 < x < 1.$

4. $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \ldots .$ *Sol.* $-1 \leqq x < 1.$

5. $1 + x + \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^3}{|\underline{3}} + \ldots .$ *Sol.* Todos los valores de x.

6. $1 - \frac{\theta^2}{|\underline{2}} + \frac{\theta^4}{|\underline{4}} - \frac{\theta^6}{|\underline{6}} + \ldots .$ *Sol.* Todos los valores de θ.

7. $\phi - \frac{\phi^3}{|\underline{3}} + \frac{\phi^5}{|\underline{5}} - \frac{\phi^7}{|\underline{7}} + \ldots .$ *Sol.* Todos los valores de ϕ.

8. $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots .$ *Sol.* $-1 \leqq x \leqq 1.$

Fig. 180

9. $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots .$ *Sol.* $-1 < x < 1.$

10. $1 - x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2} + \ldots .$ $-1 \leqq x \leqq 1.$

11. $\frac{x}{1 \cdot 2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{x^4}{4 \cdot 2^4} + \ldots .$ $-2 < x \leqq 2.$

12. $x + \frac{2x^2}{|\underline{2}} + \frac{3x^3}{|\underline{3}} + \frac{4x^4}{|\underline{4}} + \ldots .$ Todos los valores.

---

* Los extremos del intervalo que no están incluídos en el intervalo de convergencia se han marcado con círculos.

13. $1+\frac{x^2}{2\cdot 2^2}+\frac{1\cdot 3\, x^4}{2\cdot 4\cdot 2^4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\, x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2^6}+\dots.$ *Sol.* $-2 < x < 2.$

14. $\frac{ax}{2}+\frac{a^2x^2}{5}+\frac{a^3x^3}{10}+\dots+\frac{a^n x^n}{n^2+1}+\dots. \quad (a > 0)$ $-\frac{1}{a}\leqq x\leqq\frac{1}{a}.$

15. $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2\,a^2}+\frac{x^3}{3\,a^3}+\dots. \quad (a > 0)$ $-a\leqq x < a.$

16. $1+\frac{2^2\,x}{\underline{|2}}+\frac{3^2\,x^2}{\underline{|3}}+\frac{4^2\,x^3}{\underline{|4}}+\dots.$ Todos los valores.

17. $\frac{1}{3}+\frac{2\,x}{2\cdot 3^2}+\frac{3\,x^2}{2^2\cdot 3^3}+\frac{4\,x^3}{2^3\cdot 3^4}+\dots.$ $-6 < x < 6.$

18. $x+4\,x^2+9\,x^3+16\,x^4+\dots.$

19. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{2\,x^2}{2\cdot 2\cdot 3}+\frac{3\,x^3}{2^2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4\,x^4}{2^3\cdot 4\cdot 5}+\dots.$

20. $\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{5}+\dots.$

21. $\frac{10\,x}{1}+\frac{100\,x^2}{\underline{|2}}+\frac{1\,000\,x^3}{\underline{|3}}+\dots.$

22. $1-\frac{x}{10}+\frac{\underline{|2}\,x^2}{100}-\frac{\underline{|3}\,x^3}{1\,000}+\dots.$

23. $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots.$

24. $1-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{4^2}-\frac{x^6}{6^2}+\dots.$

192. La serie binómica. Esta importante serie es

$$(1)\quad 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\dots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{\underline{|n}}x^n+\dots$$

en donde m es una constante.

Si m es un número entero positivo, (1) es una serie finita de $m+1$ términos, puesto que todos los términos que siguen al que contiene x^m tienen en el numerador el factor $m-m$, y se anulan. En este caso (1) es el resultado que se obtiene de elevar $1+x$ a la potencia emésima. Si m no es un número entero positivo, la serie es una serie infinita.

Ahora bien, analicemos (1) con respecto a su convergencia. Tenemos

$$u_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}x^{n-1};$$

y $$u_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)n}x^n.$$

Luego $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n}x = \left(\frac{m+1}{n}-1\right)x.$$

Entonces, puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{m+1}{n}-1\right) = -1$, vemos que $\rho = -x$, y la serie es convergente si x es menor que 1, en valor absoluto y divergente cuando x es numéricamente mayor que 1.

La serie de Maclaurin (Art. 194) contiene la siguiente proposición:

Suponiendo que m no es número entero positivo y que $|x| < 1$, el valor de la serie binómica es exactamente el valor de $(1+x)^m$. Es decir que

$$(2) \qquad (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \ldots \qquad (|x|<1)$$

Si m es un número entero positivo, la serie es finita y es igual al valor del primer miembro para *todos los valores* de x.

La igualdad (2) expresa un caso especial del *teorema del binomio*. Podemos también escribir

$$(3) \qquad (a+b)^m = a^m(1+x)^m, \text{ si } x = \frac{b}{a}.$$

Esto nos dice que el primer miembro de (3) puede también expresarse como serie de potencias.

A continuación se dan ejemplos de cálculo aproximado de ciertas expresiones mediante la serie binómica.

EJEMPLO. Hallar un valor aproximado de $\sqrt{630}$, empleando la serie binómica.

Solución. El cuadrado perfecto más próximo a 630 es 625. Por tanto, escribimos

$$\sqrt{630} = \sqrt{625+5} = 25\left(1+\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora apliquemos (2) con $m = \frac{1}{2}$. El resultado es

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \ldots$$

En este ejemplo, $x = \frac{1}{125} = 0,008$. Luego,

$$\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 0,004 - 0,000008 + 0,000000032 + \ldots .$$

$$(4) \qquad 25\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 25 + 0,1 - 0,0002 + 0,0000008 = 25,099801$$

(hasta la cifra más aproximada a la sexta cifra decimal).

La serie (4) es una serie alternada, y el error en la solución es menor que 0,0000008.

193. Otro tipo de serie de potencias. Frecuentemente emplearemos series de la forma

$$(1) \qquad b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n + \ldots$$

en las cuales a y los coeficientes b_0, b_1, ..., b_n, ... son constantes. Tal serie se llama una *serie de potencias en* (x − a).

Apliquemos a (1) el criterio de D'Alembert, como en el Artículo 191. Entonces, si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = M,$$

tendremos, para un valor fijo cualquiera de x,

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = (x-a)M.$$

Tenemos dos casos:

I. Si $M = 0$, la serie (1) es convergente para todos los valores de x.

II. Si M no es cero, la serie (1) será convergente en el intervalo

$$a - \frac{1}{|M|} < x < a + \frac{1}{|M|}.$$

Una serie de potencias de x convergente es útil en el cálculo numérico para valores de x próximos a cero. La serie (1), si es convergente, es útil para valores de x cercanos al valor fijo a, dado de antemano.

EJEMPLO. Estudiar la serie infinita

$$1 - (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots$$

con respecto a su convergencia.

Solución. Despreciando el primer término, tenemos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{n}{n+1}(x-1)$$

También, $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1.$$

Luego $|\varrho| = |x-1|$, y la serie será convergente para valores de x comprendidos entre 0 y 2. El extremo $x = 2$ del intervalo puede incluirse.

PROBLEMAS

1. Empleando la serie binómica, demostrar que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots .$$

Verificar la solución por división directa.

Empleando la serie binómica, hallar valores aproximados de los siguientes números:

2. $\sqrt{98}$. **5.** $\sqrt[5]{35}$. **8.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{990}}$. **11.** $\sqrt{\dfrac{26}{25}}$.

3. $\sqrt[3]{120}$. **6.** $\dfrac{1}{412}$. **9.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{15}}$. **12.** $\sqrt[3]{\dfrac{128}{125}}$.

4. $\sqrt[4]{630}$. **7.** $\dfrac{1}{\sqrt{412}}$. **10.** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{30}}$. **13.** $\sqrt[4]{\dfrac{17}{16}}$.

¿Para qué valores de la variable son convergentes las siguientes series?

14. $(x+1) - \dfrac{(x+1)^2}{2} + \dfrac{(x+1)^3}{3} - \dfrac{(x+1)^4}{4} + \ldots .$

Sol. $-2 < x \leqq 0$.

15. $(x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{3}} + \dfrac{(x-1)^4}{\sqrt{4}} + \ldots .$ $0 \leqq x < 2$.

16. $2(2x+1) + \dfrac{3(2x+1)^2}{\lfloor 2} + \dfrac{4(2x+1)^3}{\lfloor 3} + \ldots .$ Todos los valores.

17. $1 + (x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{2^2} + \dfrac{(x-2)^3}{3^2} + \dfrac{(x-2)^4}{4^2} + \ldots .$

18. $1 - 2(2x-3) + 3(2x-3)^2 - 4(2x-3)^3 + \ldots .$

19. $\dfrac{x-3}{1\cdot 3} + \dfrac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \dfrac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \ldots .$

CAPITULO XX

DESARROLLO DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS

194. Serie de Maclaurin. En este capítulo se estudiará la manera de poder representar una función por una serie de potencias; dicho de otro modo, de desarrollar la función en serie de potencias.

Evidentemente, una serie convergente de potencias de x es una función de x para todos los valores dentro del intervalo de convergencia. Así podemos escribir

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots .$$

Entonces, si una función se representa por una serie de potencias, ¿cuál debe ser la forma de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, etc.? Para contestar a esta pregunta, procederemos como sigue:

Hagamos $x = 0$ en (1). Se obtiene:

$$(2) \qquad f(0) = a_0,$$

y ya se ha determinado a_0, el primer coeficiente de la serie (1). Ahora *supongamos* que la serie (1) puede derivarse término a término, y que admite derivadas sucesivas. Entonces tendremos

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x) = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \\ f''(x) = 2\,a_2 + 6\,a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots \\ f'''(x) = 6\,a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \ldots \end{cases}$$

etcétera.

Haciendo $x = 0$, se obtiene:

$$(4) \qquad f'(0) = a_1,\ f''(0) = \underline{|2}\, a_2,\ f'''(0) = \underline{|3}\, a_3,\ \ldots$$

$$\ldots,\ f^{(n)}(0) = \underline{|n}\, a_n$$

Despejando de (4) los valores de a_1, a_2, ..., a_n, etc., y sustituyendo en (1) resulta:

$$(A) \quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{\underline{|1}} + f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{\underline{|n}} + \dots.$$

Esta fórmula expresa a $f(x)$ como una serie de potencias, y decimos que "la función $f(x)$ ha sido desarrollada en una serie de potencias en x". Esta es la serie (o fórmula) de Maclaurin. *

Ahora es preciso discutir la fórmula (*A*). Con este fin recurramos a (*G*) del Artículo 124, y escribámosla de nuevo, haciendo ahora $a = 0$, $b = x$. El resultado es

$$(5) \quad f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{\underline{|1}} + f''(0)\frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R,$$

en donde $$R = f^{(n)}(x_1)\frac{x^n}{\underline{|n}}. \qquad (0 < x_1 < x)$$

El término R se llama *término complementario* o *residuo después de* n *términos*. El miembro de la derecha de (5) concuerda con la serie de Maclaurin (*A*) hasta n términos. Si representamos esta suma por S_n, entonces (5) es

$$f(x) = S_n + R, \text{ o sea, } f(x) - S_n = R.$$

Supongamos ahora que para un valor fijo, $x = x_0$, el término complementario R tiende a cero cuando n se hace infinito. Entonces S_n tenderá a $f(x_0)$ como límite (Art. 14). Es decir, que la serie de Maclaurin (*A*) converge para $x = x_0$, y su valor es $f(x_0)$. Así tenemos el siguiente resultado:

Teorema. *Para que la serie* (A) *sea convergente y represente a la función* f (x), *es necesario y suficiente que*

$$(6) \qquad \lim_{n \to \infty} R = 0.$$

Ordinariamente es más fácil determinar el intervalo de convergencia como en el capítulo anterior que determinar aquel en el cual se verifica la condición (6). Pero en los casos sencillos los dos son idénticos.

---

* Publicada por primera vez en el *Treatrise of Fluxions* (Edinburgh, 1742) de Colin Maclaurin (1698-1746), cuyo nombre lleva. Realmente la serie es debida a Stirling (1692-1770).

Para representar una función $f(x)$ por la serie de potencias (A) es *necesario*, evidentemente, que la función y sus derivadas de todos órdenes sean finitas. Pero esto no es *suficiente*.

Ejemplos de funciones que no se pueden desarrollar en serie por la fórmula de Maclaurin son

$$\ln x \ \text{ y } \ \operatorname{ctg} x,$$

puesto que las dos se hacen infinitas cuando x es cero.

El lector no debe dejar de notar la importancia de un desarrollo tal como (A). En todos los cálculos prácticos se buscan resultados que sean exactos hasta cierto número de cifras decimales, y puesto que el procedimiento en cuestión reemplaza una función, tal vez difícil de calcular, por un *polinomio ordinario con coeficientes constantes,* es muy útil para simplificar tales cálculos. Por supuesto, debemos emplear un número de términos suficientes para dar el grado deseado de exactitud.

En el caso de una serie alternada (Art. 188), el error que se comete deteniéndose en cualquier término, es numéricamente menor que este término.

EJEMPLO 1. Desarrollar $\cos x$ en serie infinita de potencias, y determinar para qué valores de x es convergente.

Solución. Hallando las derivadas sucesivas y haciendo después $x = 0$, obtenemos:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x, & f(0) = 1, \\
f'(x) = -\operatorname{sen} x, & f'(0) = 0, \\
f''(x) = -\cos x, & f''(0) = -1, \\
f'''(x) = \operatorname{sen} x, & f'''(0) = 0, \\
f^{\text{IV}}(x) = \cos x, & f^{\text{IV}}(0) = 1, \\
f^{\text{V}}(x) = -\operatorname{sen} x, & f^{\text{V}}(0) = 0, \\
f^{\text{VI}}(x) = -\cos x, & f^{\text{VI}}(0) = -1, \\
\text{etcétera}, & \text{etcétera}.
\end{array}$$

Sustituyendo en (A), resulta:

$$(7) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \cdots .$$

Comparando con el problema 6 del Artículo 191, vemos que la serie converge para todos los valores de x.

De la misma manera para $\operatorname{sen} x$,

$$(8) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \cdots ,$$

que también es convergente para todos los valores de x (problema 7 del Artículo 191).

En (7) y (8) no es difícil demostrar que el término complementario R tiende a cero al crecer n infinitamente, cuando x tiene un valor fijo *cualquiera*. Consideremos, por ejemplo, la serie (7). Podemos escribir la enésima derivada en la forma

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Luego,
$$R = \cos\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{|\underline{n}}.$$

Ahora bien, $\cos\left(x_1 + \frac{n\pi}{2}\right)$ nunca excede a 1 en valor absoluto. Además, el segundo factor de R es el término enésimo de la serie

$$x + \frac{x^2}{|\underline{2}} + \frac{x^3}{|\underline{3}} + \dots + \frac{x^n}{|\underline{n}} + \dots,$$

que es convergente para todos los valores de x. Luego tiende a cero cuando n se hace infinito (véase (A) del Artículo 185). Por tanto, se puede aplicar la fórmula (6).

Según hemos visto,

$$\lim_{n \to x} \frac{x^n}{|\underline{n}} = 0,$$

y

$$R = f^{(n)}(x_1)\frac{x^n}{|\underline{n}}. \qquad (0 < x_1 < x)$$

Luego $\lim\limits_{n \to \infty} R = 0$ si $f^{(n)}(x_1)$ permanece finita cuando n tiende a infinito.

EJEMPLO 2. Empleando la serie (8) que hemos obtenido en el ejemplo anterior, calcular sen 1 con cuatro cifras decimales exactas.

Solución. Aquí $x = 1$ radián; es decir, que el ángulo se expresa en medida circular. Sustituyendo $x = 1$ en (8) del ejemplo anterior, resulta:

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{|\underline{3}} + \frac{1}{|\underline{5}} - \frac{1}{|\underline{7}} + \frac{1}{|\underline{9}} - \dots.$$

Sumando separadamente los términos positivos y negativos,

$$1 = 1{,}00000 \dots \qquad \frac{1}{|\underline{3}} = 0{,}16667 \dots$$

$$\frac{1}{|\underline{5}} = 0{,}00833 \dots \qquad \frac{1}{|\underline{7}} = 0{,}00020 \dots$$

$$\overline{\quad 1{,}00833 \dots} \qquad \overline{\quad 0{,}16687 \dots}$$

Por tanto, $\operatorname{sen} 1 = 1{,}00833 - 0{,}16687 = 0{,}84146 \dots$

que podría suponerse exacto hasta la quinta cifra decimal (puesto que el error de no tomar más términos ha de ser menos de $\frac{1}{\lfloor 9}$, es decir, menos de 0,000003) al despreciar los errores cometidos al no tener en cuenta la sexta cifra decimal. *

Evidentemente, el valor de sen 1 puede calcularse con cualquier grado de exactitud deseado, con sólo tomar un número suficiente de términos.

PROBLEMAS

Verificar por la serie de Maclaurin los siguientes desarrollos de funciones, y determinar para qué valores de la variable son convergentes.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} + \ldots$

Sol. Todos los valores.

2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1} + \ldots .$

Sol. Todos los valores.

3. $\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \ldots .$

Sol. $-1 < x \leqq 1$.

4. $\ln (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots .$

Sol. $-1 \leqq x < 1$.

5. $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-3) x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \ldots .$$

Sol. $-1 \leqq x \leqq 1$.

6. $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots .$

Sol. $-1 \leqq x \leqq 1$.

---

* N. DEL T. Es usual despreciar tales errores, suponiendo que los errores por exceso y los errores por defecto se compensaran mutuamente. Pero éste no es siempre el caso. En nuestros ejemplo, los errores cometidos al despreciar la sexta cifra decimal de $\frac{1}{\lfloor 3}$, de $\frac{1}{\lfloor 5}$, de $\frac{1}{\lfloor 7}$ y de no tomar $\frac{1}{\lfloor 9}$ todos disminuyen el valor de sen 1, de suerte que no se compensan sino se acumulan, y todos juntos hacen un error de más de 0,00001; un valor más exacto sería 0,84147098. Pero como se deseaba el resultado con cuatro cifras decimales exactas, el valor obtenido es correcto.

7. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x-\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}\right.$

$\left.+\frac{x^5}{\underline{|5}}-\frac{x^6}{\underline{|6}}-\frac{x^7}{\underline{|7}}+\ldots\right).$

Sol. Todos los valores.

8. $\ln(a+x)=\ln a+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\ldots$

$+\frac{(-1)^n x^{n-1}}{(n-1)a^{n-1}}+\ldots. \qquad -a<x\leqq a.$

Verificar los siguientes desarrollos.

9. $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots.$

10. $\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\ldots.$

11. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+x-\frac{\sqrt{3}x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{\sqrt{3}x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}\ldots\right).$

12. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1+2x+2x^2+\frac{8x^3}{3}+\ldots.$

13. $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\ldots.$

14. $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^6}{\underline{|6}}+\ldots.$

15. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=x-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{9x^5}{\underline{|5}}\ldots.$

16. $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}\ldots.$

Hallar tres términos del desarrollo en potencias de x de cada una de las funciones siguientes:

17. $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$

18. $\operatorname{sen}(x+1).$

19. $e^{\operatorname{sen} x}.$

20. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}).$

Calcular los valores de las siguientes funciones, sustituyendo directamente en las series equivalentes de potencias, tomando términos suficientes para hacer que los resultados concuerden con los que se dan aquí.

21. $e = 2,7182\ldots$.

Solución. En la serie del problema 1, sea $x = 1$; entonces

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{\underline{|2}} + \frac{1}{\underline{|3}} + \frac{1}{\underline{|4}} + \frac{1}{\underline{|5}} + \ldots .$$

Primer término	$= 1,00000$	
Segundo término	$= 1,00000$	
Tercer término	$= 0,50000$	
Cuarto término	$= 0,16667\ldots$	(dividiendo el tercer término por 3)
Quinto término	$= 0,04167\ldots$	(dividiendo el cuarto término por 4)
Sexto término	$= 0,00833\ldots$	(dividiendo el quinto término por 5)
Séptimo término	$= 0,00139\ldots$	(dividiendo el sexto término por 6)
Octavo término	$= 0,00020\ldots$, etc.	(dividiendo el séptimo término por 7)

Sumando, $e = 2,71826\ldots$

22. $\text{arc tg}\ \frac{1}{5} = 0,1973\ldots$; empléese la serie del problema 6.

23. $\cos 1 = 0,5403\ldots$; empléese la serie (7) del ejemplo 1.

24. $\cos 10^\circ = 0,9848\ldots$; empléese la misma serie.

25. $\text{sen}\ 0,1 = 0,0998\ldots$; empléese la serie del problema 2.

26. $\text{arc sen}\ 1 = 1,5708\ldots$; empléese la serie del problema 5.

27. $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = 0,7071\ldots$; empléese la serie del problema 2.

28. $\text{sen}\ 0,5 = 0,4794\ldots$; empléese la misma serie.

29. $e^2 = 1 + 2 + \frac{2^2}{\underline{|2}} + \frac{2^3}{\underline{|3}} + \ldots = 7,3890.$

30. $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\underline{|2}} + \frac{1}{2^3\underline{|3}} + \ldots = 1,6487.$

195. Operaciones con series infinitas. Muchas de las operaciones del Algebra y del Cálculo se pueden efectuar con series convergentes, tal como con polinomios. Las siguientes proposiciones se dan sin demostración.

Sean $$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

y $$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

series convergentes de potencias. De éstas obtenemos nuevas series convergentes de potencias operando con ellas como sigue:

1. *Sumando (o restando) término a término.*

$$(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \dots + (a_n \pm b_n)x^n + \dots .$$

2. *Multiplicando y agrupando términos.*

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots .$$

EJEMPLO 1. *Cálculo de logaritmos.* De las series (problemas 3 y 4 del Artículo 194)

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \dots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \dots,$$

obtenemos, restando los términos correspondientes y empleando la fórmula (2) del Artículo 1, la nueva serie

$$(1) \qquad \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \dots\right).$$

Esta serie converge cuando $|x| < 1$.

A fin de transformar (1) a una forma mejor para el cálculo, sea N un número positivo, y hagamos:

$$(2) \qquad x = \frac{1}{2N+1}, \text{ de donde, } \frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N},$$

siendo $|x| < 1$ para todos los valores de N. Sustituyendo en (1), obtenemos la fórmula

$$(3) \qquad \ln(N+1) = \ln N + 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2N+1)^3} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2N+1)^5} + \dots\right].$$

Esta serie converge para todos los valores positivos de N, y se adapta bien al cálculo numérico. Por ejemplo, sea $N = 1$. Entonces

$$\ln(N+1) = \ln 2, \quad \frac{1}{2N+1} = \frac{1}{3}.$$

Sustituyendo en (3), el resultado es $\ln 2 = 0{,}69315\dots$.

Haciendo $N = 2$ en (3), obtenemos

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \dots\right) = 1{,}09861\dots .$$

No es necesario calcular de esta manera sino los logaritmos de los números primos; después se hallan los logaritmos de los números compuestos empleando las fórmulas (2) del Artículo 1. Así,

$$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 = 2{,}07944 \ldots .$$

$$\ln 6 = \ln 3 + \ln 2 = 1{,}79176 \ldots .$$

Todos estos son *logaritmos neperianos* o *naturales*; es decir, la base es $e = 2{,}71828 \ldots$. Si queremos hallar *logaritmos comunes* o de *Briggs*, que son los de base 10, no es menester más que cambiar la base por medio de la fórmula

$$\log n = \frac{\ln n}{\ln 10}.$$

Así,
$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} = \frac{0{,}69315}{2{,}30258} = 0{,}3010 \ldots .$$

En el cálculo real de una tabla de logaritmos, no se calculan por series sino unos pocos de los valores que ahí aparecen; todos los otros se hallan empleando teoremas de la teoría de los logaritmos y varios artificios ingeniosos ideados con el fin de economizar trabajo.

EJEMPLO 2. Desarrollar en serie de potencias $e^x \operatorname{sen} x$.

Solución. De las series

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots \qquad \text{Problema 2, Art. 194}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots \qquad \text{Problema 1, Art. 194}$$

obtenemos, por multiplicación,

$$e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \text{términos en } x^6, \text{ etc.}$$

3. *Por división.* Un caso especial se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3. De la serie que da el valor de $\cos x$ (véase (7), Art. 194)

$$(4) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \ldots ,$$

deducir el desarrollo en serie de $\sec x$.

Solución. Por la fórmula $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ vemos que tenemos que ejecutar la división de 1 por la serie (4). Para ello se procede como sigue.

Escríbase (4) en la forma $\cos x = 1 - z$, siendo

$$(5) \qquad z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} - \ldots .$$

Entonces

$$(6) \qquad \sec x = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots,$$

si $|z| < 1$ (problema 1 del Artículo 193).

De (5) tenemos la serie

$$z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \text{términos de grado superior.}$$

$$z^3 = \frac{x^6}{8} + \cdots.$$

Sustituyendo en (6), el resultado es

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots.$$

PROBLEMAS

Dados $\ln 2 = 0{,}69315$ y $\ln 3 = 1{,}09861$, calcular los siguientes logaritmos naturales aplicando el método del ejemplo 1.

1. $\ln 5 = 1{,}60944$.
2. $\ln 7 = 1{,}94591$.
3. $\ln 11 = 2{,}39790$.
4. $\ln 13 = 2{,}56495$.

Demostrar los siguientes desarrollos en serie.

5. $e^{-t}\cos t = 1 - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4 + \cdots.$

6. $\frac{e^x}{1-x} = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \cdots.$

7. $\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{49}{384}x^4 + \cdots.$

8. $\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta}{1 - \frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\theta^2 + \frac{5}{48}\theta^3 + \frac{5}{96}\theta^4 + \cdots.$

9. $\frac{\sqrt{1-x^2}}{\cos x} = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots.$

10. $e^x \operatorname{tg} x = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots.$

11. $e^{-x}\sec x = 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots.$

12. $e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{sen} 2t = 2t - t^2 - \frac{13}{12}t^3 + \frac{5}{8}t^4 + \cdots.$

13. $(1+x)\cos\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{24}x^2 + \frac{29}{720}x^3 - \frac{11}{8\,064}x^4 + \cdots.$

14. $(1+2x)\ \text{arc sen}\ x = x + 2x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \ \dots\ .$

15. $\sqrt{1-x}\ \text{arc tg}\ x = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + \frac{5}{48}x^4 + \dots\ .$

16. $\sqrt{1-\text{tg}\ x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 - \frac{47}{384}x^4 + \dots\ .$

17. $\sqrt{\sec x} = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{96}x^4 + \dots\ .$

18. $\frac{\ln(1+x)}{1+\text{sen}\ x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{23}{12}x^4 + \dots\ .$

19. $\frac{1}{\sqrt{5-e^x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}x + \frac{11}{256}x^2 + \frac{151}{6\,144}x^3 + \dots\ .$

20. $\sqrt{4+\text{sen}\ \varphi} = 2 + \frac{1}{4}\phi - \frac{1}{64}\phi^2 - \frac{61}{1\,536}\phi^3 + \dots\ .$

Obtener los desarrollos en serie de las siguientes funciones, limitados hasta los términos que no contienen potencias de x superiores a x^4.

21. $e^{-\frac{x}{5}}\ \text{sen}\ x.$

22. $e^x \cos\frac{1}{2}\sqrt{x}.$

23. $\frac{\text{sen}\ x}{\cos 2x}.$

24. $\sqrt{3+e^{-x}}\ .$

25. $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}.$

26. $\sqrt{5-\cos x}\ .$

196. Derivación e integración de series de potencias. Una serie convergente de potencias

$$(1)\qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$$

puede derivarse término a término para cualquiera valor de x dentro del intervalo de convergencia, y la serie resultante es también convergente.

Por ejemplo, de la serie

$$\text{sen}\ x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \frac{x^7}{\underline{|7}} + \dots$$

obtenemos, por derivación, la nueva serie

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|5}} - \frac{x^6}{\underline{|6}} + \dots\ .$$

Ambas series convergen para todos los valores de x (véanse los problemas 6 y 7 del Artículo 191).

Por otra parte, la serie (1) puede integrarse término a término si los límites están dentro del intervalo de convergencia, y la serie resultante será convergente.

EJEMPLO 1. Hallar, por integración, el desarrollo en serie de $\ln(1+x)$.

Solución. Puesto que $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$, tenemos

$$(2) \qquad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

Ahora bien, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$

cuando $|x| < 1$ (Art. 192). Sustituyendo en (2), e integrando término a término el segundo miembro, obtenemos el resultado

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

También esta serie converge cuando $|x| < 1$ (véase el problema 2 del Artículo 191).

EJEMPLO 2. Hallar, por integración, el desarrollo en serie de potencias, de arc sen x.

Solución. Puesto que $\frac{d}{dx}\text{arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, obtenemos

$$(3) \qquad \text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \qquad (x^2 < 1)$$

Por la serie binómica [(2) del Artículo 192], haciendo $m = -\frac{1}{2}$, y reemplazando x por $-x^2$, tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots.$$

Esta serie converge cuando $|x| < 1$. Sustituyendo en (3) e integrando término a término, obtenemos:

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \ldots.$$

Esta serie converge igualmente cuando $|x| < 1$ (véase el problema 8 del Artículo 191).

Mediante esta serie se calcula fácilmente el valor de π. En efecto, puesto que la serie converge para valores de x entre -1 y $+1$, podemos hacer $x = \frac{1}{2}$, lo que da

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots.$$

o sea, $\pi = 3{,}1415\ldots.$

Evidentemente, hubiéramos podido emplear la serie del problema 6 del Artículo 194 en lugar de ésta. Estas dos series convergen algo lentamente; pero hay otras series, obtenidas por otros métodos, con las cuales se puede calcular rápidamente el valor de π con muchas cifras decimales.

EJEMPLO 3. Empleando series, hallar un valor aproximado de

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx.$$

Solución. Haciendo $z = x^2$, tendremos:

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{\underline{|3}} + \frac{z^5}{\underline{|5}} - \dots . \qquad \text{Problema 2, Art. 194}$$

Luego $$\operatorname{sen} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{\underline{|3}} + \frac{x^{10}}{\underline{|5}} \dots ,$$

y $$\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{\underline{|3}} + \frac{x^{10}}{\underline{|5}} \right) dx, \text{ aproximadamente,}$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1\,320} \right]_0^1 = 0{,}3333 - 0{,}0238 + 0{,}0008$$

$$= 0{,}3103.$$

PROBLEMAS

1. Por integración, hallar el desarrollo en serie de $\operatorname{arc\,tg} x$.

2. Por integración, hallar el desarrollo en serie de $\ln(1 - x)$.

3. Hallar el desarrollo en serie de $\sec^2 x$ derivando la serie para $\operatorname{tg} x$.

4. Hallar el desarrollo en serie de $\ln \cos x$ integrando la serie para $\operatorname{tg} x$.

Empleando series, hallar un valor aproximado de las siguientes integrales:

5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\cos x\, dx}{1 + x}$. *Sol.* 0,3914.

6. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{1 - x}$ 0,185.

7. $\displaystyle\int_0^{1/3} e^x \ln(1 + x)\, dx$. 0,0628.

8. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. 0,4815.

9. $\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{\ln(1 + x)\, dx}{\cos x}$ 0,0295.

10. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

11. $\displaystyle\int_0^{1/9} \ln(1 + \sqrt{x})\, dx$.

12. $\displaystyle\int_0^1 e^x \operatorname{sen} \sqrt{x}\, dx$.

13. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^3}\, dx$.

14. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} \cos \sqrt{x}\, dx$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2 - \operatorname{sen} x}\, dx$.

197. Deducción de fórmulas aproximadas de la serie de Maclaurin. Empleando unos cuantos términos de la serie de potencias que representa una función, obtenemos para la función una fórmula aproximada que posee algún grado de exactitud. Tales fórmulas aproximadas se emplean mucho en la Matemática aplicada.

Por ejemplo, de la serie binómica (2) del Artículo 192, podemos escribir inmediatamente las siguientes fórmulas aproximadas:

$$\begin{aligned} & \quad\ \ \textit{1ª aproximación} \qquad \textit{2ª aproximación} \\ (1+x)^m &= 1 + mx = 1 + mx + \tfrac{1}{2}m(m-1)x^2; \\ \frac{1}{(1+x)^m} &= 1 - mx = 1 - mx + \tfrac{1}{2}m(m+1)x^2. \end{aligned}$$

En éstas, $|x|$ es pequeño y m es positivo.

Asimismo, de la serie del seno,

$$(1) \qquad \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \cdots,$$

se deduce:

$$\operatorname{sen} x = x,$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}, \text{ etc.},$$

que son fórmulas aproximadas. Examinemos la primera.

En (1) tómense valores de x tales que los términos de la serie disminuyan. Si se conserva sólo el primer término, el valor de la serie que resta es, en valor absoluto, menor que su primer término $\frac{1}{6}x^3$ (Art. 188). Es decir,

$$\operatorname{sen} x = x, \text{ siendo } |\text{error}| < \left|\frac{1}{6}x^3\right|.$$

Se puede preguntar, ¿para qué valores de x será (2) válida hasta tres decimales? Entonces

$$\left|\frac{1}{6}x^3\right| < 0{,}0005,$$

es decir, $\qquad |x| < \sqrt[3]{0{,}003} < 0{,}1443 \text{ rad}.$

De aquí se deduce que la fórmula (2) da tres cifras decimales exactas para valores de x entre $-0{,}1443$ y $+0{,}1443$; o sea, en grados, para valores entre $-8{,}2°$ y $+8{,}2°$.

PROBLEMAS

1. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$, cuando: *a*) $x = 30°$; *b*) $x = 60°$; *c*) $x = 90°$?

Sol. *a*) Error $< 0{,}00033$; *b*) error $< 0{,}01$; *c*) error $< 0{,}08$.

2. ¿Qué error se comete al aplicar la fórmula aproximada $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$, cuando: *a*) $x = 30°$; *b*) $x = 60°$; *c*) $x = 90°$?

Sol. *a*) Error $< 0{,}0032$; *b*) error $< 0{,}05$; *c*) error $< 0{,}25$.

3. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $e^{-x} = 1 - x$ cuando: *a*) $x = 0{,}1$; *b*) $x = 0{,}5$?

4. ¿Qué error se comete al usar la fórmula aproximada $\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3}$, cuando: *a*) $x = 0{,}1$; *b*) $x = 0{,}5$; *c*) $x = 1$?

Sol. *a*) Error $< 0{,}000002$; *b*) error $< 0{,}006$; *c*) error $< 0{,}2$.

5. ¿Cuántos términos de la serie $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} - \dots$ deben tomarse para obtener sen 45° con cinco cifras decimales exactas? *Sol.* Cuatro.

6. ¿Cuántos términos de la serie $\cos x = 1 - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} - \dots$ deben tomarse para obtener cos 60° con cinco cifras decimales exactas?

7. ¿Cuántos términos de la serie $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ deben tomarse para obtener log 1,2 con cinco decimales exactas? *Sol.* Seis.

Verificar las siguientes fórmulas aproximadas:

8. $\frac{\operatorname{sen} x}{1 - x} = x + x^2$.

9. $\frac{\cos x}{1 - x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$.

10. $e^{-\theta} \cos \theta = 1 - \theta + \frac{\theta^3}{3}$.

11. $\int \cos \sqrt{x}\, dx = C + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{72}$.

12. $\int e^{-x^2}\, dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}$.

13. $\int \ln(1 - x)\, dx = C - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.

14. $\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

15. $\int e^{\theta} \operatorname{sen} \theta\, d\theta = C + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3}$.

198. Serie de Taylor. Una serie de potencias de x convergente se adapta bien al propósito de calcular el valor de la función que representa para valores *pequeños* de x (próximos a cero). Ahora deduciremos un desarrollo de potencias de $x - a$ (véase el Artículo 193), siendo a un número fijo. La serie que así se obtiene se adapta al objeto de calcular la función que representa para valores de x cercanos a a.

Supóngase que

$$(1) \quad f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots + b_n(x-a)^n + \dots,$$

y que la serie representa la función. La *forma necesaria* de los coeficientes b_0, b_1, etc., se obtiene como en el Artículo 194, es decir, derivando sucesivamente (1) con respecto a x, suponiéndose que esto es posible. Así tenemos

$$f'(x) = b_1 + 2\,b_2(x-a) + \dots + nb_n(x-a)^{n-1} + \dots,$$
$$f''(x) = 2\,b_2 + \dots + n(n-1)\,b_n(x-a)^{n-2} + \dots,$$

etcétera.

Sustituyendo $x = a$ en estas ecuaciones y en (1) y despejando a b_0, b_1, b_2, obtenemos

$$b_0 = f(a), \quad b_1 = f'(a), \quad b_2 = \frac{f''(a)}{\underline{|2}}, \quad \dots, \quad b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{\underline{|n}}, \quad \dots .$$

Sustituyendo estos valores en (1), el resultado es la serie

$$(B) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{\underline{|1}} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{\underline{|n}} + \dots .$$

La serie se llama *serie* (o *fórmula*) *de Taylor*. *

Ahora examinemos la serie (*B*). Haciendo $b = x$ en la fórmula (*G*) del Artículo 124, se obtiene:

$$(2) \quad f(x) = f(a) + f'(a)\frac{(x-a)}{\underline{|1}} + \dots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R,$$

* Publicada por el doctor Brook Taylor (1685-1731) en sus *Methodus Incrementorum* (Londres, 1715).

en donde, $$R = f^{(n)}(x_1)\,\frac{(x-a)^n}{\lfloor n}. \qquad (a < x_1 < x)$$

El término R se llama *término complementario* o *residuo después de* n *términos*.

Ahora bien, la serie del segundo miembro de (2) concuerda con la serie de Taylor (B) hasta n términos. Representando la suma de estos términos por S_n, de (2) se deduce:

$$f(x) = S_n + R, \text{ o sea, } f(x) - S_n = R.$$

Si suponemos ahora que para un valor fijo $x = x_0$ el residuo R tiende a cero cuando n se hace infinito, entonces

(3) $$\lim_{n\to\infty} S_n = f(x_0),$$

y (B) converge para $x = x_0$ y su límite es $f(x_0)$.

Teorema. *La serie infinita* **(B)** *representa la función para aquellos valores de* x, *y solamente para aquellos, para los cuales el residuo tiende a cero cuando el número de términos aumenta infinitamente.*

Si la serie es convergente para valores de x para los cuales el residuo no tiende a cero al crecer n infinitamente, entonces para tales valores de x la serie no representa la función $f(x)$.

Por lo común es más fácil determinar el intervalo de convergencia de la serie que determinar el intervalo para el que el residuo tiende a cero; pero en los casos sencillos los dos intervalos son idénticos.

Cuando los valores de una función y de sus derivadas sucesivas son conocidos, y son finitos para algún valor fijo de la variable, como $x = a$, entonces (B) se emplea a fin de hallar el valor de la función para valores de x cercanos a a, y (B) se llama también *el desarrollo de* f (x) *en la vecindad de* x = a.

EJEMPLO 1. Desarrollar $\ln x$ en potencias de $(x-1)$.

Solución.

$$f(x) = \ln x, \qquad f(1) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(1) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(1) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(1) = 2,$$

etc. etc.

Sustituyendo en (B), $\ln x = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \ldots$.

Esta serie converge para valores de x entre 0 y 2, y es *el desarrollo de* ln x *en la vecindad de* x = 1. Véase el ejemplo del Artículo 193.

EJEMPLO 2. Obtener cuatro términos del desarrollo de $\cos x$ en serie de potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución. Aquí $f(x) = \cos x$ y $a = \frac{\pi}{4}$. Entonces tenemos

$$f(x) = \cos x, \qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x, \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f''(x) = -\cos x, \qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x, \qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

etc., etc.

Por tanto, la serie es

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\underline{|2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\underline{|3}} + \ldots,$$

que puede escribirse en la forma

$$\cos x = 0{,}70711\left[1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 \ldots\right].$$

Para verificar este resultado, calculemos $\cos 50°$. Entonces $x - \frac{\pi}{4} = 5°$ expresado en radianes, o sea,

$$x - \frac{\pi}{4} = 0{,}08727, \quad \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 = 0{,}00762, \quad \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 0{,}00066.$$

Con estos valores la serie anterior da $\cos 50° = 0{,}64278$. Las tablas de cinco decimales dan $\cos 50° = 0{,}64279$.

199. Otra forma de la serie de Taylor. Si en (B) del Artículo 198 reemplazamos a por x_0 y hacemos $x - a = h$, es decir, $x = a + h = x_0 + h$, el resultado es

$$(C) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{h}{\underline{|1}} + f''(x_0)\frac{h^2}{\underline{|2}} + \ldots$$

$$\ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{\underline{|n}} + \ldots .$$

En esta segunda forma el *nuevo valor* de $f(x)$ cuando x cambia de x_0 a $x_0 + h$ se desarrolla en una serie de potencias de h, que es el incremento de x.

EJEMPLO. Desarrollar sen x en una serie de potencias de h cuando x pasa de x_0 a $x_0 + h$.

Solución. Aquí $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x_0 + h) = \operatorname{sen}(x_0 + h)$. Derivemos, y dispongamos el trabajo como sigue.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \operatorname{sen} x, & f(x_0) = \operatorname{sen} x_0, \\ f'(x) = \cos x, & f'(x_0) = \cos x_0, \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x, & f''(x_0) = -\operatorname{sen} x_0, \\ \text{etc.,} & \text{etc.} \end{array}$$

Sustituyendo en (C), obtenemos

$$\operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 + \cos x_0 \frac{h}{1} - \operatorname{sen} x_0 \frac{h^2}{2} - \cos x_0 \frac{h^3}{6} + \cdots.$$

PROBLEMAS

Verificar los siguientes desarrollos en serie por la fórmula de Taylor.

1. $e^x = e^a \left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} + \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} + \cdots\right].$

2. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} \operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} \cos a + \cdots.$

3. $\cos x = \cos a - (x-a)\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} \cos a + \frac{(x-a)^3}{\underline{|3}} \operatorname{sen} a + \cdots.$

4. $\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \cdots.$

5. $\cos(a+x) = \cos a - x \operatorname{sen} a - \frac{x^2}{\underline{|2}} \cos a + \frac{x^3}{\underline{|3}} \operatorname{sen} a + \cdots.$

6. $\operatorname{tg}(x+h) = \operatorname{tg} x + h \sec^2 x + h^2 \sec^2 x \operatorname{tg} x + \cdots.$

7. $(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} x^{n-2}h^2$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} x^{n-3}h^3 + \cdots.$$

8. Obtener cuatro términos del desarrollo en serie de sen x en potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Sol. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{\underline{|2}} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{\underline{|3}} + \cdots\right].$

9. Obtener tres términos del desarrollo de tg x en serie de potencias de $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Sol. $\operatorname{tg} x = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots$.

10. Obtener cuatro términos del desarrollo de $\ln x$ en serie de potencias de $(x - 2)$.

11. Obtener cinco términos del desarrollo de e^x en serie de potencias de $(x - 1)$.

12. Obtener cuatro términos del desarrollo de sen $\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$ en serie de potencias de x.

13. Obtener tres términos del desarrollo de ctg $\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ en serie de potencias de x.

200. Fórmulas aproximadas deducidas de la serie de Taylor. Se obtienen las fórmulas aproximadas empleando solamente algunos términos de las series **(B)** o **(C)**.

Por ejemplo, si $f(x) = \operatorname{sen} x$, tenemos (véase el problema 2 del Artículo 199):

$$(1) \qquad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x - a) \cos a$$

como primera aproximación.

Tomando tres términos de la serie, resulta como segunda aproximación:

$$(2) \qquad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x - a) \cos a - \frac{(x-a)^2}{\underline{|2}} \operatorname{sen} a.$$

De (1), transponiendo sen a y dividiendo por $x - a$, obtenemos

$$(3) \qquad \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} = \cos a.$$

Puesto que $\cos a$ es constante, esto quiere decir que (aproximadamente):

La variación del seno es proporcional a la variación del ángulo para valores del ángulo próximos a a.

La fórmula (3) expresa el principio de *interpolación por partes proporcionales*.

EJEMPLO 1. Dado $a = 30° = 0{,}5236$ radianes, calcular los senos de 31° y 32° por la fórmula aproximada (1).

Para sen 31°, $x - a = 1° = 0{,}01745$ radianes. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{sen } 31° &= \text{sen } 30° + (0{,}01745) \cos 30° \\ &= 0{,}5000 + 0{,}01745 \times 0{,}8660 \\ &= 0{,}5000 + 0{,}0151 = 0{,}5151. \end{aligned}$$

Análogamente, sen 32° = sen 30° + (0,03490) cos 30° = 0,5302.

Estos valores, dados por (1), tienen solamente tres cifras exactas. Si se desea mayor exactitud, podemos emplear (2).

Entonces,
$$\begin{aligned} \text{sen } 31° &= \text{sen } 30° + (0{,}01745) \cos 30° - \frac{(0{,}01745)^2}{2} \text{sen } 30° \\ &= 0{,}50000 + 0{,}01511 - 0{,}00008 \\ &= 0{,}51503. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen } 32° &= \text{sen } 30° + (0{,}03490) \cos 30° - \frac{(0{,}03490)^2}{2} \text{sen } 30° \\ &= 0{,}50000 + 0{,}03022 - 0{,}00030 \\ &= 0{,}52992. \end{aligned}$$

Estos resultados son exactos hasta la cuarta cifra decimal.

De (*C*) obtenemos fórmulas aproximadas para el incremento de $f(x)$ al pasar x de x_0 a $x_0 + h$. En efecto, trasponiendo el primer término del segundo miembro, encontramos

$$(4) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + f''(x_0) \frac{h^2}{\lfloor 2} + \dots .$$

El segundo miembro expresa el incremento de $f(x)$ en una serie de potencias del incremento de $x\ (= h)$.

De (4) deducimos, como *primera aproximación*,

$$(5) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h.$$

Esta fórmula se empleó en el Artículo 92. En efecto, el segundo miembro es el valor de la diferencial de $f(x)$ para los valores $x = x_0$ y $\Delta x = h$.

Como *segunda aproximación* tenemos

$$(6) \qquad f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)\, h + f''(x_0) \frac{h^2}{2}.$$

EJEMPLO 2. Calcular, aplicando las fórmulas (5) y (6), un valor aproximado del incremento de tg x cuando x cambia de 45° a 46°.

Solución. Del problema 6 del Artículo 199, si $x = x_0$, tenemos

$$\text{tg } (x_0 + h) = \text{tg } x_0 + \sec^2 x_0\, h + \sec^2 x_0 \text{ tg } x_0\, h^2 + \dots .$$

En este ejemplo $x_0 = 45°$, $\operatorname{tg} x_0 = 1$, $\sec^2 x_0 = 2$ y $h = 1° = 0{,}01745$ radianes. Luego,

por (5), $\operatorname{tg} 46° - \operatorname{tg} 45° = 2\,(0{,}01745) = 0{,}0349$;

por (6), $\operatorname{tg} 46° - \operatorname{tg} 45° = 0{,}0349 + 2\,(0{,}01745)^2 = 0{,}0349 + 0{,}0006 = 0{,}0355$.

De la segunda aproximación obtenemos $\operatorname{tg} 46° = 1{,}0355$, valor exacto hasta la cuarta cifra decimal.

PROBLEMAS

1. Verificar la fórmula aproximada

$$\ln\,(10 + x) = 2{,}303 + \frac{x}{10}.$$

Calcular el valor de la función según esta fórmula, y comparar el resultado con las tablas: *a*) cuando $x = -0{,}5$; *b*) cuando $x = -1$.

Sol. *a*) Fórmula: 2,253; tablas: 2,251.
b) Fórmula: 2,203; tablas: 2,197.

2. Verificar la fórmula aproximada

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0{,}5 + 0{,}8660\, x.$$

Emplear la fórmula para calcular sen 27°, sen 33° y sen 40°, y comparar los resultados con las tablas.

3. Verificar la fórmula aproximada

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + 2\,x + 2\,x^2.$$

Emplear la fórmula para calcular tg 46° y tg 50°, y comparar los resultados con las tablas.

4. Verificar la fórmula aproximada

$$\cos x = \cos a - (x - a)\operatorname{sen} a.$$

Dados
$$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = 0{,}8660,$$
$$\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = 0{,}7071,$$
y
$$\cos 60° = \operatorname{sen} 30° = 0{,}5,$$

emplear la fórmula para calcular cos 32°, cos 47° y cos 62°, y comparar los resultados con las tablas.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Dada la integral definida $\int_0^{1/2} x^5 \ln\,(1 + x)\,dx$:

a) obtener mediante una serie su valor con cuatro decimales exactas;
Sol. 0,0009.

b) obtener su valor por cálculo directo y compararlo con el valor aproximado obtenido en (*a*);

c) demostrar que si en el cálculo se toman n términos de la serie, el error es menor que

$$\frac{1}{2^{n+7}(n+1)(n+7)}.$$

2. Dada $f(x) = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2}$:

a) demostrar que $f^{IV}(x) = -\frac{1}{4} f(x)$;

b) desarrollar $f(x)$ en serie de Maclaurin con seis términos;

c) ¿cuál es el coeficiente de x^{12} en esta serie? *Sol.* $-\frac{1}{64\,\underline{|12}}$.

CAPITULO XXI

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS *

201. Ecuaciones diferenciales; orden y grado. Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene derivadas o diferenciales. En este libro hemos utilizado, frecuentemente, ecuaciones diferenciales. Los ejemplos del Artículo 139 muestran casos sencillos. Así, en el ejemplo 1, de la ecuación diferencial

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = 2x,$$

encontramos, integrando,

$$(2) \qquad y = x^2 + C.$$

Asimismo, en el ejemplo 2, la integración de la ecuación diferencial

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

nos llevó a la solución

$$(4) \qquad x^2 + y^2 = 2C.$$

Las ecuaciones (1) y (3) son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias de *primer orden*, y (2) y (4) son, respectivamente, las *soluciones generales*.

Otro ejemplo de ecuación diferencial es

$$(5) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

---

* En este capítulo solamente se tratarán algunos tipos de ecuaciones diferenciales; a saber, aquellos que el estudiante encontrará en las aplicaciones elementales de la Mecánica y la Física.

Esta es una ecuación diferencial de *segundo orden*, así llamada por el orden de la derivada.

El *orden de una ecuación diferencial* es el mismo que el de la derivada de mayor orden que en ella aparece.

La derivada de mayor orden que aparece en una ecuación diferencial puede ser afectada de exponentes. El mayor exponente indica el *grado* de la ecuación diferencial.

Así, la ecuación diferencial

$$(6) \qquad y''^2 = (1 + y'^2)^3,$$

en donde y' y y'' son, respectivamente, la primera y la segunda derivada de y con respecto a x, es de segundo grado y de segundo orden.

202. Soluciones de una ecuación diferencial. Constantes de integración. Una *solución* o *integral* de una ecuación diferencial es una relación entre las variables, que define a una de ellas como función de la otra, que satisface a la ecuación. Así,

$$(1) \qquad y = a \operatorname{sen} x$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

En efecto, derivando (1),

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -a \operatorname{sen} x.$$

Si ahora sustituímos (1) y (3) en (2), obtenemos

$$-a \operatorname{sen} x + a \operatorname{sen} x = 0,$$

que nos dice que (2) queda satisfecha. Aquí a es una constante arbitraria. De la misma manera puede demostrarse que

$$(4) \qquad y = b \cos x$$

es una solución de (2) para cualquier valor de b. La relación

$$(5) \qquad y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$$

es una solución todavía más general de (2). Efectivamente, si damos ciertos valores a c_1 y c_2 vemos que la solución (5) incluye las soluciones (1) y (4).

Las constantes arbitrarias c_1 y c_2 que aparecen en (5) se llaman *constantes de integración*. Una solución como (5), que contiene constantes arbitrarias en número igual al orden de la ecuación (en este caso, dos) se llama la *solución completa* o *general*, o también, *integral general*.* Las soluciones que se obtienen de ésta dando a las constantes valores particulares se llaman *soluciones particulares*. En la práctica, una solución particular se obtiene de la solución general por condiciones dadas del problema, que la solución particular ha de satisfacer.

EJEMPLO. La solución general de la ecuación diferencial

(1) $$y'' + y = 0$$

es, según hemos visto, $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$.

Hallar una solución particular tal que

(2) $$y = 2, \quad y' = -1, \quad \text{cuando } x = 0.$$

Solución. De la solución general

(3) $$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

derivando, obtenemos,

(4) $$y' = -c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x.$$

Sustituyendo (2) en (3) y (4), encontramos $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Introduciendo estos valores en (3), tenemos la solución particular que se pidió,

$$y = 2 \cos x - \operatorname{sen} x.$$

Una ecuación diferencial se considera resuelta cuando se ha reducido a una expresión en términos de integrales, pueda o no efectuarse la integración.

203. Verificación de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Antes de emprender el problema de resolver ecuaciones diferenciales, mostraremos cómo se verifica una solución dada.

EJEMPLO 1. Demostrar que

(1) $$y = c_1 x \cos \ln x + c_2 x \operatorname{sen} \ln x + x \ln x$$

es una solución de la ecuación diferencial

(2) $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x.$$

---

* En los tratados sobre ecuaciones diferenciales se demuestra que la solución general de una ecuación diferencial de orden n, tiene n constantes arbitrarias.

Solución. Derivando (1), obtenemos

(3) $$\frac{dy}{dx} = (c_2 - c_1) \operatorname{sen} \ln x + (c_2 + c_1) \cos \ln x + \ln x + 1.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2} = -(c_2 + c_1) \frac{\operatorname{sen} \ln x}{x} + (c_2 - c_1) \frac{\cos \ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Sustituyendo en (2) los valores dados por (1), (3) y (4), encontramos que la ecuación se satisface, pues se obtiene una identidad.

EJEMPLO 2. Demostrar que

(5) $$y^2 - 4x = 0$$

es una solución particular de la ecuación diferencial

(6) $$xy'^2 - 1 = 0.$$

Solución. Derivando (5), se obtiene

$$yy' - 2 = 0, \quad \text{de donde,} \quad y' = \frac{2}{y}.$$

Sustituyendo este valor de y' en (6) y reduciendo, obtenemos

$$4x - y^2 = 0,$$

que, según (5), es cierto.

PROBLEMAS

Verificar las siguientes soluciones de las ecuaciones diferenciales correspondientes.

	Ecuaciones diferenciales	*Soluciones*
1.	$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} = 0.$	$y = c_1 + 2x + c_2x^2.$
2.	$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0.$	$V = \frac{c_1}{r} + c_2.$
3.	$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{ds}{dt} - 6s = 0.$	$s = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}.$
4.	$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$	$x = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{-2t}.$
5.	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\frac{dy}{dx} + 8y^2 = 0.$	$y = c(x - c)^2.$
6.	$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - xy = 0.$	$xy = 2e^x - 3e^{-x}.$
7.	$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$	$s = c_1 \cos(2t + c_2).$

8. $\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 13x = 39.$ $\qquad x = e^{3t}\cos 2t + 3.$

9. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = 0.$ $\qquad y = ae^{\frac{x}{b}} - b.$

10. $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$ $\qquad \frac{x^2}{c_1} + \frac{y^2}{c_2} = 1.$

11. $\frac{du}{dv} = \frac{1+u^2}{1+v^2}.$ $\qquad u = \frac{c+v}{1-cv}.$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 8t.$ $\qquad s = 2\operatorname{sen} 2t + \cos 2t + 2t.$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}.$ $\qquad y = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{3}e^{2x}.$

14. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5\cos 2t.$ $\qquad x = \cos 2t + 2\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t.$

15. $\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 3\cos 3t.$ $\qquad x = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{2}t\operatorname{sen} 3t.$

16. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3.$ $\qquad \frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}.$

204. Ecuaciones diferenciales de primer orden y de primer grado. Una ecuación de primer orden y de primer grado puede reducirse a la forma

$$(A) \qquad M\,dx + N\,dy = 0,$$

siendo M y N funciones de x y y. De las ecuaciones diferenciales que pertenecen a esta clase, las más comunes pueden dividirse en cuatro tipos.

Tipo I. Ecuaciones con variables separables. Cuando los términos de una ecuación diferencial pueden disponerse de manera que tome la forma

$$(1) \qquad f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0,$$

siendo $f(x)$ una función de x únicamente y $F(y)$ una función de y únicamente, el procedimiento de resolución se llama de *separación de las variables*, y la solución se obtiene por integración directa. Así, integrando (1) obtenemos la solución general

$$(2) \qquad \int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = c,$$

en donde c es una constante arbitraria.

Frecuentemente muchas ecuaciones, que no se dan en la forma sencilla (1), pueden reducirse a esa forma mediante la siguiente regla para separar las variables.

PRIMER PASO. *Quitar denominadores; si la ecuación contiene derivadas, se multiplican todos los términos por la diferencial de la variable independiente.*

SEGUNDO PASO. *Se sacan las diferenciales como factor común. Si entonces la ecuación toma la forma*

$$\mathrm{XY\,dx} + \mathrm{X'\,Y'\,dy} = 0,$$

en donde X y X′ *son funciones de* x *únicamente y* Y y Y′ *son funciones de* y *únicamente, puede reducirse a la forma* (1) *dividiendo todos los términos por* X′Y.

TERCER PASO. *Se integra cada parte separadamente, como en* (2).

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{(1 + x^2)\,xy}.$$

Solución.

Primer paso. $(1 + x^2)\,xy\,dy = (1 + y^2)\,dx.$

Segundo paso. $(1 + y^2)\,dx - x\,(1 + x^2)\,y\,dy = 0.$

A fin de separar las variables, dividiremos por $x\,(1 + x^2)\,(1 + y^2)$, lo que da

$$\frac{dx}{x\,(1 + x^2)} - \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0.$$

Tercer paso. $$\int \frac{dx}{x\,(1 + x^2)} - \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = C.$$

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1 + x^2} - \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = C. \qquad \text{Art. 167}$$

$$\ln x - \tfrac{1}{2}\ln (1 + x^2) - \tfrac{1}{2}\ln (1 + y^2) = C.$$

$$\ln (1 + x^2)\,(1 + y^2) = 2 \ln x - 2\,C.$$

Este resultado puede escribirse en forma más abreviada si damos otra forma a la constante arbitraria, escribiendo $\ln c$ en vez de $-2\,C$. Entonces la solución se convierte en

$$\ln (1 + x^2)\,(1 + y^2) = \ln x^2 + \ln c.$$

$$\ln (1 + x^2)\,(1 + y^2) = \ln cx^2.$$

$$(1 + x^2)\,(1 + y^2) = cx^2.$$

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

$$a\left(x\frac{dy}{dx}+2y\right)=xy\frac{dy}{dx}.$$

Solución.

Primer paso. $$ax\,dy+2ay\,dx=xy\,dy.$$

Segundo paso. $$2ay\,dx+x(a-y)\,dy=0.$$

A fin de separar las variables, dividiremos por xy. Resulta:

$$\frac{2a\,dx}{x}+\frac{(a-y)\,dy}{y}=0.$$

Tercer paso. $$2a\int\frac{dx}{x}+a\int\frac{dy}{y}-\int dy=C,$$

$$2a\ln x+a\ln y-y=C,$$

$$a\ln x^2y=C+y,$$

$$\ln x^2y=\frac{C}{a}+\frac{y}{a}.$$

Pasando de logaritmos a exponenciales, este resultado puede escribirse en la forma

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}+\frac{y}{a}},$$

o sea,

$$x^2y=e^{\frac{C}{a}}\cdot e^{\frac{y}{a}}.$$

Representando la constante $e^{\frac{C}{a}}$ por c, obtenemos nuestra solución en la forma

$$x^2y=ce^{\frac{y}{a}}.$$

Tipo II. Ecuaciones homogéneas. Se dice que la ecuación diferencial

(A) $$M\,dx+N\,dy=0$$

es homogénea cuando M y N son funciones homogéneas de x y y del mismo grado.* Tales ecuaciones diferenciales pueden resolverse haciendo la sustitución

(3) $$y=vx.$$

Esto nos dará una ecuación diferencial en v y x en la que las variables son separables; luego podremos seguir la regla que se dió para las ecuaciones del tipo I.

---

* Se dice que una función de x y y es *homogénea* en las variables si el resultado de reemplazar x y y por λx y λy (siendo λ una constante arbitraria) se reduce a la función primitiva multiplicada por alguna potencia de λ. El exponente de esta potencia de λ se llama el *grado* de la función primitiva.

En efecto, de (A) obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}. \tag{4}$$

Igualmente, de (3),

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v. \tag{5}$$

Empleando la sustitución (3), el segundo miembro de (4) se convierte en una función de v únicamente. Luego, empleando (5) y (3) obtendremos de (4)

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v), \tag{6}$$

en donde pueden separarse las variables x y v.

EJEMPLO. Resolver la ecuación

$$y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}.$$

Solución. $y^2\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0.$

Aquí $M = y^2$ y $N = x^2 - xy$. Ambas son homogéneas y de segundo grado en x y y. Además, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Hagamos la sustitución $y = vx$. Se obtiene:

$$x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{v^2}{1 - v},$$

o sea, $$v\,dx + x(1 - v)\,dv = 0.$$

A fin de separar las variables, dividiremos por vx. Esto da

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - v)\,dv}{v} = 0,$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v} - \int dv = C,$$

$$\ln x + \ln v - v = C,$$

$$\ln vx = C + v,$$

$$vx = e^{C+v} = e^C \cdot e^v,$$

$$vx = ce^v.$$

Pero $v = \frac{y}{x}$. Luego la solución general es

$$y = ce^{\frac{y}{x}}.$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $(2+y)\,dx-(3-x)\,dy=0.$ *Sol.* $(2+y)(3-x)=c.$

2. $xy\,dx-(1+x^2)\,dy=0.$ $cy^2=1+x^2.$

3. $x(x+3)\,dy-y(2x+3)\,dx=0.$ $y=cx(x+3).$

4. $\sqrt{1+x^2}\,dy-\sqrt{1-y^2}\,dx=0.$
Sol. $\operatorname{arc\,sen} y=\ln c(x+\sqrt{1+x^2}).$

5. $d\varrho+\varrho\operatorname{tg}\theta\,d\theta=0.$ $\varrho=c\cos\theta.$

6. $(1-x)\,dy-y^2\,dx=0.$ $y\ln c(1-x)=1.$

7. $(x+2y)\,dx+(2x-3y)\,dy=0.$ $x^2+4xy-3y^2=c.$

8. $(3x+5y)\,dx+(4x+6y)\,dy=0.$ $(x+y)^2(x+2y)=c.$

9. $2(x+y)\,dx+y\,dy=0.$
Sol. $\frac{1}{2}\ln(2x^2+2xy+y^2)-\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+y}{x}\right)=c.$

10. $(8y+10x)\,dx+(5y+7x)\,dy=0.$ $(x+y)^2(2x+y)^3=c.$

11. $(2x+y)\,dx+(x+3y)\,dy=0.$ $2x^2+2xy+3y^2=c.$

12. $\sqrt{1-4t^2}\,ds+2\sqrt{1-s^2}\,dt=0.$
Sol. $s\sqrt{1-4t^2}+2t\sqrt{1-s^2}=c.$

13. $2z(3z+1)\,dw+(1-2w)\,dz=0.$ $(2w-1)(1+3z)=3cz.$

14. $2x\,dz-2z\,dx=\sqrt{x^2+4z^2}\,dx.$ $1+4cz-c^2x^2=0.$

15. $(x+4y)\,dx+2x\,dy=0.$ $x^3+6x^2y=c.$

16. $(2x^2+y^2)\,dx+(2xy+3y^2)\,dy=0.$ $2x^3+3xy^2+3y^3=c.$

17. $\frac{du}{dv}=\frac{1+u^2}{1+v^2}.$ $u=\frac{v+c}{1-cv}.$

18. $(3+2y)x\,dx+(x^2-2)\,dy=0.$

19. $2(1+y)\,dx-(1-x)\,dy=0.$

20. $(1+y)x\,dx-(1+x)y\,dy=0.$

21. $(ax+b)\,dy-y^2\,dx=0.$

22. $(3x+y)\,dx+(x+y)\,dy=0.$

23. $xy(y+2)\,dx-(y+1)\,dy=0.$

24. $(1+x^2)\,dy-(1-y^2)\,dx=0.$

25. $(x-2y)\,dx-(2x+y)\,dy=0.$

26. $(3x + 2y)\,dx + x\,dy = 0.$

27. $3(5x + 3y)\,dx + (11x + 5y)\,dy = 0.$

28. $(x^2 + y^2)\,dx + (2xy + y^2)\,dy = 0.$

29. $2y\,dx - (2x - y)\,dy = 0.$

En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular que se determina por los valores dados de x y y.

30. $\dfrac{dx}{y} + \dfrac{4\,dy}{x} = 0;\ x = 4,\ y = 2.$ *Sol.* $x^2 + 4y^2 = 32.$

31. $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy;\ x = 1,\ y = 0.$ $y^2 = x^2 - x.$

32. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx;\ x = \frac{1}{2},\ y = 0.$ $1 + 4y - 4x^2 = 0.$

33. $(1 + y^2)\,dy = y\,dx;\ x = 2,\ y = 2.$

34. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (2, 1), y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $-(1 + \dfrac{y}{x})$.

Sol. $x^2 + 2xy = 8.$

35. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0), y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $\dfrac{y - 1}{x^2 + x}$.

Sol. $y(1 + x) = 1 - x.$

Tipo III. Ecuaciones lineales. La ecuación diferencial lineal de primer orden en y es de la forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q, \tag{B}$$

siendo P y Q funciones de x únicamente, o constantes.

Asimismo, la ecuación

$$\frac{dx}{dy} + Hx = J, \tag{C}$$

siendo H y J funciones de y o constantes, es una ecuación diferencial lineal.

Para integrar **(B)**, hagamos

$$y = uz, \tag{7}$$

en donde z y u son funciones de x que deben determinarse. Derivando (7),

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}. \tag{8}$$

Sustituyendo en (B) los valores dados por (8) y (7), el resultado es

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + Puz = Q, \text{ o sea,}$$

$$(9) \qquad u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + Pu\right)z = Q.$$

Ahora determinamos u integrando la ecuación

$$(10) \qquad \frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

en donde las variables x y u son separables. Empleando el valor de u así obtenido, hallamos z resolviendo la ecuación

$$(11) \qquad u\frac{dz}{dx} = Q,$$

en donde x y z pueden separarse. Evidentemente, los valores de u y z así obtenidos satisfarán (9), y la solución de (B) se da entonces por (7).

Los siguientes ejemplos muestran los detalles del método.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$(12) \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{5/2}.$$

Solución. Evidentemente esta ecuación es de la forma (B), siendo

$$P = -\frac{2}{x+1} \quad \text{y} \quad Q = (x+1)^{5/2}.$$

Hagamos $y = uz$; entonces

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación dada (12), obtenemos

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{2uz}{1+x} = (x+1)^{5/2}, \text{ o sea,}$$

$$(13) \qquad u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x}\right)z = (x+1)^{5/2}.$$

A fin de determinar u, igualemos a cero el coeficiente de z. Esto da

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{1+x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2\,dx}{1+x}.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln u = 2 \ln (1 + x) = \ln (1 + x)^2.$$

(14) $$\therefore \quad u = (1 + x)^2. *$$

Ahora la ecuación (13), puesto que el término en z desaparece, se convierte en

$$u \frac{dz}{dx} = (x + 1)^{5/2}.$$

Reemplazando u por su valor según (14),

$$\frac{dz}{dx} = (x + 1)^{1/2},$$

o sea,

$$dz = (x + 1)^{1/2} dx.$$

Integrando, obtenemos

(15) $$z = \frac{2(x + 1)^{3/2}}{3} + C.$$

Sustituyendo los valores de (15) y (14) en $y = uz$, obtenemos la solución general

$$y = \frac{2(x + 1)^{7/2}}{3} + C(x + 1)^2.$$

EJEMPLO 2. Deducir una fórmula para la solución general de la ecuación (B).

Solución. Resolviendo la ecuación (10), tenemos

$$\ln u + \int P\, dx = \ln k,$$

siendo $\ln k$ la constante de integración.

Despejando u, resulta

$$u = ke^{-\int P\, dx}.$$

Sustituyendo en (11) este valor de u, y separando las variables z y x, el resultado es

$$dz = \frac{Q}{k} e^{\int P\, dx} dx.$$

Integrando y sustituyendo en (7), obtenemos

$$y = e^{-\int P\, dx}\left(\int Q e^{\int P\, dx} dx + C\right).$$

---

* Por razones de sencillez, hemos tomado para constante de integración el valor particular cero. De otro modo tendríamos $u = c(1 + x)^2$. Pero en el desarrollo que sigue veremos que, finalmente, c desaparece. (Véase el ejemplo 2.)

Debe observarse que la constante k desaparece del resultado final. Por esta causa es usual omitir la constante de integración en la resolución de la ecuación (10).

Tipo IV. Ecuaciones que pueden reducirse a la forma lineal. Algunas ecuaciones no lineales pueden reducirse a la forma lineal mediante una transformación apropiada. Un tipo de tales ecuaciones es

$$(D) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = Qy^n,$$

siendo P y Q funciones de x únicamente o constantes. La ecuación (D) puede reducirse a la forma lineal (B) del tipo III por medio de la sustitución $z = y^{-n+1}$. Pero tal reducción no es necesaria si resolvemos la ecuación según el método que se dió para el tipo III. Ilustremos esto con un ejemplo.

EJEMPLO. Resolver la ecuación

$$(16) \qquad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a \ln x \cdot y^2.$$

Solución. Evidentemente esta ecuación es de la forma (D), siendo

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = a \ln x, \quad n = 2.$$

Hagamos $y = uz$; entonces

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}.$$

Sustituyendo en (16), obtenemos

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} + \frac{uz}{x} = a \ln x \cdot u^2z^2,$$

$$(17) \qquad u\frac{dz}{dx} + \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)z = a \ln x \cdot u^2z^2.$$

A fin de determinar u, igualemos a cero el coeficiente de z. Esto da

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtenemos

$$\ln u = -\ln x = \ln\frac{1}{x},$$

$$(18) \qquad u = \frac{1}{x}.$$

Ahora la ecuación (17), puesto que el término en z desaparece, se convierte en

$$u\frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot u^2 z^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot uz^2.$$

Reemplazando u por su valor según (18), resulta

$$\frac{dz}{dx} = a \ln x \cdot \frac{z^2}{x},$$

$$\frac{dz}{z^2} = a \ln x \cdot \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtenemos

$$-\frac{1}{z} = \frac{a(\ln x)^2}{2} + C.$$

(19) $$z = -\frac{2}{a(\ln x)^2 + 2C}.$$

Sustituyendo los valores de (19) y (18) en $y = uz$, obtenemos la solución general

$$y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{a(\ln x)^2 + 2C},$$

o sea,

$$xy[a(\ln x)^2 + 2C] + 2 = 0.$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x.$ *Sol.* $y = cx^2 - 2x.$

2. $x\frac{dy}{dx} - 2y = -x.$ $y = x + cx^2.$

3. $\frac{dy}{dx} - 2y = 1 - 2x.$ $y = x + ce^{2x}.$

4. $x\frac{dy}{dx} - 3y = -2nx.$ $y = nx + cx^3.$

5. $\frac{dy}{dx} - y = -2e^{-x}.$ $y = e^{-x} + ce^{x}.$

6. $\frac{ds}{dt} - s \operatorname{ctg} t = 1 - (t + 2) \operatorname{ctg} t.$ $s = t + 2 + c \operatorname{sen} t.$

7. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2y^2.$ $cx^2y + 2xy - 1 = 0.$

8. $\frac{ds}{dt} + s \operatorname{tg} t = 2t + t^2 \operatorname{tg} t.$ *Sol.* $s = t^2 + c \cos t.$

9. $x\frac{dy}{dx} - y = (x-1)e^x.$ $y = e^x + cx.$

10. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^3.$ $cx^2y^2 + 2xy^2 - 1 = 0.$

11. $\frac{ds}{dt} + \frac{s}{t} = \cos t + \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$ $s = \operatorname{sen} t + \frac{c}{t}.$

12. $nx\frac{dy}{dx} + 2y = xy^{n+1}.$ $cx^2y^n + xy^n - 1 = 0.$

13. $\frac{ds}{dt} + s = \cos t - \operatorname{sen} t.$ $s = \cos t + ce^{-t}.$

14. $\frac{ds}{dt} - s \operatorname{ctg} t = e^t(1 - \operatorname{ctg} t).$ $s = e^t + c \operatorname{sen} t.$

15. $x\frac{dy}{dx} - 2y + 3x = 0.$

16. $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x.$

17. $x\frac{dy}{dx} + y = (1+x)e^x.$

18. $\frac{dy}{dx} - y = 1 - 2x.$

19. $x\frac{dy}{dx} + y + x^2y^2 = 0.$

20. $\frac{ds}{dt} - s \operatorname{ctg} t + \csc t = 0.$

21. $2\frac{dy}{dx} + y = (x-1)y^3.$

22. $x\frac{dy}{dx} - y = x \cos x - \operatorname{sen} x.$

23. $n\frac{dy}{dx} - y + (x^2 + 2x)y^{n+1} = 0.$

24. $\frac{ds}{dt} + s \operatorname{tg} t = e^{-t}(\operatorname{tg} t - 1).$

En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular determinada por los valores dados de x y y.

25. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2e^x;\ x = 1,\ y = 0.$ *Sol.* $y = x^2(e^x - e).$

26. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2};\ x = 1,\ y = 2.$ $y = \frac{x+1}{x^2}.$

27. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \sec x;\ x = 0,\ y = -1.$ $y = \operatorname{sen} x - \cos x.$

28. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3;\ x = 0,\ y = 1.$ $2y = (x+1)^4 + (x+1)^2.$

29. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 0), y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $\frac{2y + x + 1}{x}$.

Sol. $2y = 3x^2 - 2x - 1.$

30. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1) y cuya pendiente en un punto cualquiera es igual a $\frac{y^2 \ln x - y}{x}$.

Sol. $y(1 + \ln x) = 1$.

205. Dos tipos especiales de ecuaciones diferenciales de orden superior. Las ecuaciones diferenciales que vamos a estudiar en este artículo se presentan muy frecuentemente.

El primer tipo lo constituyen las ecuaciones de la forma

$$(E) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

en las que X es una función de x únicamente, o una constante.

Para integrar, en primer lugar multiplicaremos ambos miembros por dx. Entonces, integrando, tenemos

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{dx^n}\,dx = \int X\,dx + c_1.$$

Después se repite el procedimiento $(n - 1)$ veces. De esta manera se obtendrá la solución general, que contendrá n constantes arbitrarias

EJEMPLO. Resolver la ecuación $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$.

Solución. Multiplicando ambos miembros por dx e integrando, resulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x\,dx + C_1,$$

o sea,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1.$$

Repitiendo el procedimiento,

$$\frac{dy}{dx} = \int xe^x\,dx - \int e^x\,dx + \int C_1\,dx + C_2,$$

o sea,

$$\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int xe^x\,dx - \int 2e^x\,dx + \int C_1 x\,dx + \int C_2\,dx + C_3$$

$$= xe^x - 3e^x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Luego, $\quad y = xe^x - 3e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3.$

Un segundo tipo de mucha importancia son las ecuaciones de la forma

$$(F) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = Y,$$

siendo Y una función de y únicamente.

Para integrar, procederemos de la siguiente manera: escribiremos la ecuación en la forma

$$dy' = Y\,dx,$$

y multiplicaremos ambos miembros por y'. El resultado es

$$y'\,dy' = Y\,y'\,dx.$$

Pero, por ser $y'\,dx = dy$ la ecuación anterior se convierte en

$$y'\,dy' = Y\,dy.$$

En esta ecuación las variables y y y' quedan separadas. Integrando, resulta

$$\frac{1}{2}y'^2 = \int Y\,dy + C_1.$$

El segundo miembro es una función de y. Extrayendo la raíz cuadrada, las variables x y y quedan separadas y podemos integrar otra vez. Veamos un ejemplo del método.

EJEMPLO. Resolver la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = 0$.

Solución. Aquí $\frac{dy'}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -a^2y$; luego la ecuación es del tipo (F).

Multiplicando ambos miembros por $y'dx$ y procediendo como hemos indicado, obtenemos

$$y'\,dy' = -a^2y\,dy.$$

Integrando,

$$\tfrac{1}{2}y'^2 = -\tfrac{1}{2}a^2y^2 + C.$$

$$y' = \sqrt{2C - a^2y^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - a^2y^2},$$

haciendo $2C = C_1$ y tomando el signo positivo del radical. Separando las variables, resulta

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 - a^2y^2}} = dx.$$

Integrando,

$$\frac{1}{a}\operatorname{arc\,sen}\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = x + C_2,$$

o sea,

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = ax + aC_2.$$

Esto es lo mismo que decir

$$\frac{ay}{\sqrt{C_1}} = \operatorname{sen}(ax + aC_2)$$

$$= \operatorname{sen} ax \cos aC_2 + \cos ax \operatorname{sen} aC_2. \quad \text{(4) del Art. 2}$$

o sea,
$$y = \frac{\sqrt{C_1}}{a}\cos aC_2 \cdot \operatorname{sen} ax + \frac{\sqrt{C_1}}{a}\operatorname{sen} aC_2 \cdot \cos ax.$$

Luego,
$$y = c_1 \operatorname{sen} ax + c_2 \cos ax.$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = t^2.$ *Sol.* $x = \dfrac{t^4}{12} + c_1t + c_2.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = x.$ $x = c_1e^t + c_2e^{-t}.$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 4 \operatorname{sen} 2t.$ $x = -\operatorname{sen} 2t + c_1t + c_2.$

4. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = e^{2t}.$ $x = \dfrac{e^{2t}}{4} + c_1t + c_2.$

5. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{(s+1)^3}.$ $c_1(s+1)^2 = (c_1t + c_2)^2 + 1.$

6. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{1}{\sqrt{as}}.$ $3t = 2a^{1/4}(s^{1/2} - 2c_1)(s^{1/2} + c_1)^{1/2} + c_2.$

7. $\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{a}{y^3}.$ $c_1y^2 = a + (c_1t + c_2)^2.$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{a^2}{y^2} = 0.$

Sol. $\sqrt{c_1y^2 + y} - \dfrac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left(\sqrt{c_1y} + \sqrt{1 + c_1y}\right) = ac_1\sqrt{2}\,x + c_2.$

9. $\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{s^2} = 0$. Hallar t, si para $t = 0$ es $s = a$ y $\frac{ds}{dt} = 0$.

Sol. $t = \sqrt{\frac{a}{2k}}\left\{\sqrt{as - s^2} + a \text{ arc sen} \sqrt{\frac{a - s}{a}}\right\}$.

10. $\frac{d^3y}{dx^3} = x + \text{sen } x$. 11. $\frac{d^2s}{dt^2} = a \cos nt$. 12. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$.

206. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Las ecuaciones de la forma

$$\text{(G)} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

en donde p y q son constantes, son muy importantes en las matemáticas aplicadas.

Se obtiene una solución particular de (G), determinando el valor de la constante r de manera que (G) se satisfaga por

$$(1) \qquad y = e^{rx}.$$

Derivando (1), obtenemos

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = re^{rx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 e^{rx}.$$

Sustituyendo en (G) los valores dados en (1) y (2), y eliminando por división el factor e^{rx} resulta

$$(3) \qquad r^2 + pr + q = 0,$$

es decir, la expresión $y = e^{rx}$ es una solución particular de la ecuación dada si r es una raíz de esta ecuación de segundo grado. La ecuación (3) se llama **ecuación auxiliar** o *ecuación característica* de (G).

PRIMER CASO. *La ecuación* (3) *tiene raíces distintas,* r_1 *y* r_2. Entonces

$$(4) \qquad y = e^{r_1x} \text{ y } y = e^{r_2x}$$

son soluciones particulares distintas de (G), y la solución general es

$$(5) \qquad y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}.$$

En efecto, (5) contiene dos constantes arbitrarias esenciales, y (G) se satisface por esta relación.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

(6) $$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0.$$

Solución. La ecuación auxiliar es

(7) $$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Resolviendo (7), las raíces son 3 y -1, y según (5) la solución general es

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}.$$

Verificación. Sustituyendo en (6) este valor de y, la ecuación se satisface.

SEGUNDO CASO. *Las raíces de la ecuación* (3) *son imaginarias.* Si las raíces de la ecuación auxiliar (3) son imaginarias, los exponentes en (5) serán también imaginarios. Sin embargo, se puede hallar una solución general real, tomando en (5) valores imaginarios para c_1 y c_2. En efecto, sean

(8) $$r_1 = a + b\sqrt{-1}, \quad r_2 = a - b\sqrt{-1}$$

el par de raíces imaginarias conjugadas de (3). Entonces

(9) $$e^{r_1 x} = e^{(a+b\sqrt{-1})x} = e^{ax}e^{bx\sqrt{-1}},$$
$$e^{r_2 x} = e^{(a-b\sqrt{-1})x} = e^{ax}e^{-bx\sqrt{-1}}.$$

Sustituyendo estos valores en (5), obtenemos

(10) $$y = e^{ax}(c_1 e^{bx\sqrt{-1}} + c_2 e^{-bx\sqrt{-1}}).$$

En Algebra se demuestra * que

$$e^{bx\sqrt{-1}} = \cos bx + \sqrt{-1}\ \text{sen}\ bx,$$
$$e^{-bx\sqrt{-1}} = \cos bx - \sqrt{-1}\ \text{sen}\ bx.$$

---

* Sea $i = \sqrt{-1}$, y supóngase que el desarrollo en serie de e^x, dado en el problema 1, Artículo 194, representa la función cuando x se reemplaza por ibx. Entonces, puesto que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, etc., tenemos

(14) $$e^{ibx} = 1 + ibx - \frac{b^2x^2}{\underline{|2}} - i\frac{b^3x^3}{\underline{|3}} + \frac{b^4x^4}{\underline{|4}} + i\frac{b^5x^5}{\underline{|5}} - \dots.$$

Además, reemplazando x por bx en (7) y (8) del Artículo 194,

$$\cos bx = 1 - \frac{b^2x^2}{\underline{|2}} + \frac{b^4x^4}{\underline{|4}} - \dots, \quad \text{sen}\ bx = bx - \frac{b^3x^3}{\underline{|3}} + \frac{b^5x^5}{\underline{|5}} - \dots.$$

Entonces, según el Artículo 195,

(15) $$\cos bx + i\ \text{sen}\ bx = 1 + ibx - \frac{b^2x^2}{\underline{|2}} - i\frac{b^3x^3}{\underline{|3}} + \frac{b^4x^4}{\underline{|4}} + i\frac{b^5x^5}{\underline{|5}} - \dots,$$

suponiendo que la serie represente la función. Los miembros de la derecha de (14) y (15) son idénticos. Por tanto, $e^{ibx} = \cos bx + i\ \text{sen}\ bx$.

Sustituyendo estos valores en (10), la solución general puede escribirse en la forma

(11) $$y = e^{ax}(A \cos bx + B \operatorname{sen} bx,$$

determinándose las nuevas constantes arbitrarias A y B, de c_1 y c_2 por las condiciones $A = c_1 + c_2$, $B = (c_1 - c_2)\sqrt{-1}$. Esto es, para c_1 y c_2 en (5) tomamos los valores imaginarios

$$c_1 = \tfrac{1}{2}(A - B\sqrt{-1}), \quad c_2 = \tfrac{1}{2}(A + B\sqrt{-1}).$$

Si en (11) damos a A y B los valores 1 y 0, y después 0 y 1, vemos que

(12) $$y = e^{ax} \cos bx \quad \text{y} \quad y = e^{ax} \operatorname{sen} bx$$

son soluciones particulares reales de (G).

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

(13) $$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0$$

Solución. La ecuación auxiliar (3) es ahora $r^2 + k^2 = 0$. Luego, $r = \pm k\sqrt{-1}$.

Comparando esto con (8), vemos que $a = 0$, $b = k$. Luego, según (11), la solución completa es

$$y = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx.$$

Verificación. Cuando este valor de y se sustituye en (13), la ecuación se satisface.

Compárese este método con el que se empleó para el mismo ejemplo en el Artículo 205 $(k = a)$.

OBSERVACION. Otra forma de la solución se obtiene haciendo

$$A = C \cos \alpha, \quad B = C \operatorname{sen} \alpha,$$

en el valor de y arriba dado. Entonces $y = C \cos(kx - \alpha)$. (Según (4) del Artículo 2.)

TERCER CASO. *Las raíces de la ecuación* (3) *son reales e iguales*. Las raíces de la ecuación auxiliar (3) serán iguales si $p^2 = 4q$. Entonces (3) puede escribirse, sustituyendo $q = \tfrac{1}{4}p^2$,

(14) $$r^2 + pr + \tfrac{1}{4}p^2 = (r + \tfrac{1}{2}p)^2 = 0,$$

siendo las raíces $r_1 = r_2 = -\tfrac{1}{2}p$. En este caso:

(15) $$y = e^{r_1x} \quad \text{y} \quad y = xe^{r_1x}$$

son soluciones particulares distintas, y

(16) $$y = e^{r_1x}(c_1 + c_2x)$$

es la solución general.

Para comprobar esta proposición bastará demostrar que la segunda ecuación de (15) es una solución. En efecto, derivando, tenemos

$$(17)\quad y=xe^{r_1x},\quad \frac{dy}{dx}=e^{r_1x}(1+r_1x),\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{r_1x}(2\,r_1+r_1^2x).$$

Sustituyendo los valores de (17) en el primer miembro de (G), se obtiene, después de suprimir e^{r_1x},

$$(18)\qquad (r_1^2+pr_1+q)\,x+2\,r_1+p.$$

Esta expresión es igual o cero puesto que r_1 satisface (3) y es igual a $-\frac{1}{2}p$.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación

$$(19)\qquad \frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0.$$

Hallar la solución particular tal que $s=4$ y $\frac{ds}{dt}=-2$, cuando $t=0$.

Solución. La ecuación auxiliar es

$$r^2+2\,r+1=0,\ \text{o sea},\ (r+1)^2=0.$$

Por tanto, las raíces son iguales a $r_1=-1$, y según (16)

$$(20)\qquad s=e^{-t}(c_1+c_2t),$$

es la solución general.

A fin de hallar la solución particular que se pide, debemos determinar las constantes c_1 y c_2 de manera que se satisfagan las condiciones dadas, es decir,

$$s=4\ \text{y}\ \frac{ds}{dt}=-2\ \text{cuando}\ t=0.$$

Sustituyendo en la solución general los valores dados $s=4$, $t=0$, tenemos $4=c_1$, y de aquí

$$(21)\qquad s=e^{-t}(4+c_2t).$$

Derivemos ahora (21) con respecto a t. Obtenemos

$$\frac{ds}{dt}=e^{-t}(c_2-4-c_2t).$$

Y como según las condiciones dadas,

$$\frac{ds}{dt}=-2\ \text{cuando}\ t=0,\ \text{se obtiene:}$$

$$-2=c_2-4;\ \text{luego},\ c_2=2.$$

Por consiguiente, la solución particular buscada es $s=e^{-t}(4+2\,t)$.

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0.$ *Sol.* $x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$ $y = c_1e^{x} + c_2e^{3x}.$

3. $\frac{d^2s}{dt^2} - 2\frac{ds}{dt} + s = 0.$ $s = c_1e^{t} + c_2te^{t}.$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0.$ $x = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t.$

5. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 0.$ $s = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t}.$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 0.$ $y = c_1 + c_2e^{-4x}.$

7. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0.$ $s = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$

8. $\frac{d^2s}{dt^2} - 2\frac{ds}{dt} + 5s = 0.$ $s = e^{t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$

9. $\frac{d^2\theta}{dt^2} - 5\frac{d\theta}{dt} + 4\theta = 0.$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0.$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3s = 0.$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} - 3s = 0.$

14. $\frac{d^2y}{dx^2} - n\frac{dy}{dx} = 0.$

15. $\frac{d^2s}{dt^2} - 6\frac{ds}{dt} + 25s = 0.$

16. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$

En los siguientes problemas hallar la solución particular que satisface las condiciones dadas.

17. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 0;$ $s = 0,$ $\frac{ds}{dt} = 1,$ cuando $t = 0.$
Sol. $s = e^{-t} - e^{-2t}.$

18. $\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = 0;$ $x = a,$ $\frac{dx}{dt} = 0,$ cuando $t = 0.$ $x = a \cos nt.$

19. $\frac{d^2x}{dt^2} - n^2x = 0;$ $x = 2,$ $\frac{dx}{dt} = 0,$ cuando $t = 0.$ $x = e^{nt} + e^{-nt}.$

20. $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 8y = 0;$ $y = 0,$ $\frac{dy}{dt} = 24,$ cuando $t = 0.$
Sol. $y = 4(e^{2t} - e^{-4t}).$

21. $\dfrac{d^2s}{dt^2} - 8\dfrac{ds}{dt} + 16\,s = 0,\quad s = 0;\quad \dfrac{ds}{dt} = 1,$ cuando $t = 0.$

Sol. $s = te^{4t}.$

22. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - a\dfrac{dx}{dt} = 0;\quad x = 0,\quad \dfrac{dx}{dt} = a,$ cuando $t = 0.$ $x = e^{at} - 1.$

23. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 8\dfrac{ds}{dt} + 25\,s = 0;\quad s = 4,\quad \dfrac{ds}{dt} = -16,$ cuando $t = 0.$

Sol. $s = 4\,e^{-4t}\cos 3\,t.$

24. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 10\,x = 0;\quad x = 1,\quad \dfrac{dx}{dt} = 4,$ cuando $t = 0.$

Sol. $x = e^{3t}(\cos t + \operatorname{sen} t).$

25. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4\,s = 0;\quad s = 0,\quad \dfrac{ds}{dt} = 4,$ cuando $t = 0.$

26. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\,x = 0;\quad x = 10,\quad \dfrac{dx}{dt} = 0,$ cuando $t = 0.$

27. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} = 0;\quad y = 1,\quad \dfrac{dy}{dt} = 2,$ cuando $t = 0.$

28. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 4\,x = 0;\quad x = 2,\quad \dfrac{dx}{dt} = 5,$ cuando $t = 0.$

29. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 13\,x = 0;\quad x = 2,\quad \dfrac{dx}{dt} = 4,$ cuando $t = 0.$

30. $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 4\dfrac{ds}{dt} + 8\,s = 0;\quad s = 0,\quad \dfrac{ds}{dt} = 8,$ cuando $t = 0.$

Para resolver la ecuación diferencial

$$(H)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = X,$$

en donde p y q son constantes y X es una función de la variable independiente x o una constante, son necesarios tres pasos.

PRIMER PASO. *Resolver la ecuación* (G). *Sea la solución general*

$$(22)\qquad \mathrm{y} = \mathrm{u}.$$

La función u *se llama* ***función complementaria*** *de* (H).

SEGUNDO PASO. *Obtener por ensayo una solución particular de* (H). *Sea esta solución*

$$(23)\qquad \mathrm{y} = \mathrm{v}.$$

TERCER PASO. *La solución general de* (H) *es*

$$(24)\qquad \mathrm{y} = \mathrm{u} + \mathrm{v}.$$

En efecto, al sustituir en (H) el valor de y dado por (24), se ve que la ecuación queda satisfecha, y (24) contiene las dos constantes arbitrarias esenciales.

Para determinar la solución particular (23), las siguientes instrucciones son útiles (véase también el Artículo 208). En las fórmulas todas las letras son constantes con excepción de x, la variable independiente.

Caso general. La expresión $y = X$ no es una solución particular de (G). En este caso:

Forma de X		*Forma de* v
$X = a + bx$,	entonces se supone	$y = v = A + Bx$;
$X = ae^{bx}$,	” ”	$y = v = Ae^{bx}$;
$X = a_1 \cos bx + a_2 \operatorname{sen} bx$,	se supone	$y = v = A_1 \cos bx + A_2 \operatorname{sen} bx$.

Caso especial. Si $y = X$ es una solución particular de (G), supóngase para v la forma arriba dada multiplicada por x (la variable independiente).

El método consiste en sustituir $y = v$, según las instrucciones dadas en (H), y determinar las constantes A, B, A_1 y A_2, de manera que (H) se satisfaga.

EJEMPLO 4. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2x. \tag{25}$$

Solución. *Primer paso.* La función complementaria u es la solución general de

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0. \tag{26}$$

Luego, según el ejemplo 1,

$$y = u = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}. \tag{27}$$

Segundo paso. Puesto que $y = X = 2x$ no es solución particular de (26), supondremos que una solución particular de (25) es

$$y = v = A + Bx. \tag{28}$$

Sustituyendo este valor en (25) y asociando términos, se obtiene

$$-2B - 3A - 3Bx = 2x. \tag{29}$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, resulta

$$-2B - 3A = 0, \quad -3B = 2.$$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones, obtenemos

$$A = \tfrac{4}{9}, \quad B = -\tfrac{2}{3}.$$

Sustituyendo en (28), se obtiene la solución particular

$$(30) \qquad y = v = \tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{3}\,x.$$

Tercer paso. Entonces, de (27) y (30), la solución general es

$$y = u + v = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{3}\,x.$$

EJEMPLO 5. Resolver la ecuación

$$(31) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\,\frac{dy}{dx} - 3\,y = 2\,e^{-x}.$$

Solución. *Primer paso.* La función complementaria es (27), o sea,

$$(32) \qquad y = u = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}.$$

Segundo paso. Aquí $y = X = 2\,e^{-x}$ es una solución particular de (26), porque se obtiene de la solución general (32) haciendo $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Por tanto, supondremos que una solución particular v de (31) es

$$(33) \qquad y = v = Axe^{-x}.$$

Derivando (33), obtenemos

$$(34) \qquad \frac{du}{dx} = Ae^{-x}(1 - x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{-x}(x - 2).$$

Sustituyendo en (31) los valores dados en (33) y (34), obtenemos

$$(35) \qquad Ae^{-x}(x - 2) - 2\,Ae^{-x}(1 - x) - 3\,Axe^{-x} = 2\,e^{-x}.$$

Simplificando, obtenemos $-4\,Ae^{-x} = 2\,e^{-x}$; luego $A = -\tfrac{1}{2}$. Sustituyendo en (33), resulta

$$(36) \qquad y = v = -\tfrac{1}{2}\,xe^{-x}.$$

Tercer paso. La solución general de (31) es

$$y = u + v = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{2}\,xe^{-x}.$$

EJEMPLO 6. Determinar la solución particular de la ecuación

$$(37) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 4\,s = 2\cos 2\,t$$

tal que $s = 0$ y $\dfrac{ds}{dt} = 2$ cuando $t = 0$.

Solución. Hallaremos en primer lugar la solución general.

Primer paso. Resolviendo

$$(38) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 4\,s = 0,$$

encontramos la función complementaria

(39) $$s = u = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

Segundo paso. Examinando el segundo miembro de (37), observamos que $s = 2 \cos 2t$ es una solución particular de (38) que resulta de (39) cuando $c_1 = 2$, $c_2 = 0$. Por tanto, supóngase una solución particular $s = v$ de (37)

(40) $$s = v = t(A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t).$$

Derivando (40), obtenemos

(41) $$\begin{cases} \dfrac{ds}{dt} = A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t - 2t(A_1 \operatorname{sen} 2t - A_2 \cos 2t). \\ \dfrac{d^2s}{dt^2} = -4A_1 \operatorname{sen} 2t + 4A_2 \cos 2t - 4t(A_1 \cos 2t + A_2 \operatorname{sen} 2t). \end{cases}$$

Sustituyendo en (37) los valores dados en (40) y (41) y simplificando, resulta

(42) $$-4A_1 \operatorname{sen} 2t + 4A_2 \cos 2t = 2 \cos 2t.$$

Esta ecuación se convierte en una identidad cuando $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}$. Sustituyendo en (40), obtenemos

(43) $$s = v = \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t.$$

Tercer paso. De (39) y (43) se deduce que la solución general de (37) es

(44) $$s = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t.$$

Ahora tenemos que determinar c_1 y c_2 de manera que

(45) $$s = 0 \text{ y } \frac{ds}{dt} = 2 \text{ cuando } t = 0.$$

Derivando (44),

(46) $$\frac{ds}{dt} = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t + \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + t \cos 2t.$$

Sustituyendo en (44) y (46) las condiciones dadas en (45), se obtiene

$$0 = c_1, \quad 2 = 2c_2. \quad \text{Luego, } c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$

Poniendo en (44) estos valores, la solución particular buscada es

(47) $$s = \operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t.$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = at + b.$ *Sol.* $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + at + b.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = ae^{bt}.$ $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \dfrac{ae^{bt}}{b^2 + 1}.$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 4\cos t.$ *Sol.* $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + 2t \operatorname{sen} t.$

4. $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 4 \operatorname{sen} 2t.$ $x = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2t.$

5. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = at + b.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}(at + b).$

6. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 2e^t.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t.$

7. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = e^{2t}.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{4} te^{2t}.$

8. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4s = 2\cos 2t.$ $s = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - \frac{1}{4}\cos 2t.$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 5x^2.$ $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x + \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{81}.$

10. $\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 4t.$ $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + 1 - 2t.$

11. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 8.$ $x = c_1 e^t + c_2 te^t + 8.$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 6e^{2t}.$ $s = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - 6e^{2t}.$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 8e^{2t}.$ $s = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t) + \frac{4}{5} e^{2t}.$

14. $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 4e^t.$ $x = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - 2te^t.$

15. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\cos t.$ $y = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$
$+ \frac{3}{5}\cos t - \frac{3}{10}\operatorname{sen} t.$

16. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 5y = 3\operatorname{sen} 2t.$ $y = e^t(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t)$
$+ \frac{12}{17}\cos 2t + \frac{3}{17}\operatorname{sen} 2t.$

17. $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 3\cos 2t.$

18. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\operatorname{sen} 2t.$

19. $\frac{d^2y}{dt^2} - y = 2 + e^t.$

20. $\frac{d^2z}{dt^2} - 4z = t - e^t.$

21. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = t^2 - 2.$

22. $4\frac{d^2s}{dt^2} + s = 5\cos\frac{t}{2}.$

23. $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s = 2\operatorname{sen} t.$

24. $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 16x = 4 - 8t.$

25. $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 25y = 5\cos 2t.$

26. $\frac{d^2s}{dt^2} + 6\frac{ds}{dt} + 10s = 5\operatorname{sen} 2t.$

En los siguientes problemas hallar la solución particular que satisface las condiciones dadas.

27. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=t+\frac{1}{2}$; $s=\frac{1}{18}$, $\frac{ds}{dt}=\frac{1}{9}$ cuando $t=0$.

Sol. $s=\frac{1}{9}t+\frac{1}{18}$.

28. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=9e^{3t}$; $s=1$, $\frac{ds}{dt}=\frac{3}{2}$, cuando $t=0$.

Sol. $s=\frac{1}{2}(\cos 3t+e^{3t})$.

29. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=5\cos 2t$; $s=1$, $\frac{ds}{dt}=3$, cuando $t=0$.

Sol. $s=\operatorname{sen} 3t+\cos 2t$.

30. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=3\cos 3t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=6$, cuando $t=0$.

Sol. $s=2\operatorname{sen} 3t+\frac{1}{2}t\operatorname{sen} 3t$.

31. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-3x=2t+1$; $x=\frac{1}{3}$, $\frac{dx}{dt}=-\frac{4}{9}$, cuando $t=0$.

Sol. $x=\frac{1}{9}(e^{3t}+e^{-t}-6t+1)$.

32. $\frac{d^2x}{dt^2}-6\frac{dx}{dt}+13x=39$; $x=4$, $\frac{dx}{dt}=3$, cuando $t=0$.

Sol. $x=e^{3t}\cos 2t+3$.

33. $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=4-3t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$, cuando $t=0$.

34. $\frac{d^2s}{dt^2}-9s=6t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=0$, cuando $t=0$.

35. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}=2x$; $y=2$, $\frac{dy}{dx}=0$, cuando $x=0$.

36. $\frac{d^2x}{dt^2}+x=2\cos 2t$; $x=0$, $\frac{dx}{dt}=2$, cuando $t=0$.

37. $\frac{d^2s}{dt^2}+4s=2\cos 2t$; $s=0$, $\frac{ds}{dt}=2$, cuando $t=0$.

38. $\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}+2x=2\operatorname{sen} t$; $x=0$, $\frac{dx}{dt}=0$, cuando $t=0$.

39. $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=2e^{x}$; $y=1$, $\frac{dy}{dx}=0$, cuando $x=0$.

40. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=4e^{2x}$; $y=0$, $\frac{dy}{dx}=2$, cuando $x=0$.

207. Aplicaciones. Ley del interés compuesto. Una sencilla aplicación de las ecuaciones diferenciales se ofrece en problemas en los que la rapidez de variación de la función con respecto a la variable

(Artículo 50) para cualquier valor de la variable es proporcional al valor correspondiente de la función. Esto es, si $y = f(x)$,

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = ky,$$

siendo k una constante. Esta ecuación diferencial es de variables separables del tipo I (Art. 204). Resolviendo, obtenemos

$$(2) \qquad y = ce^{kx},$$

siendo c una constante arbitraria. En este caso, la función y es una función exponencial (Art. 62). Recíprocamente, dada la ecuación (2), fácilmente se demuestra, por diferenciación, que y satisface a (1). A esta fórmula se ha dado el nombre de "ley del interés compuesto" a causa de la siguiente analogía:

Sea: y = capital, en pesos, colocado a interés compuesto;
i = interés, en pesos, de un peso en un año;
Δt = intervalo de tiempo medido en años;
Δy = interés de y pesos en el intervalo de tiempo Δt.

Entonces, $\Delta y = iy\,\Delta t$. Por tanto,

$$(3) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} = iy.$$

La ecuación (3) expresa que la variación media de y en el tiempo Δt es proporcional a y. En la práctica, el interés se añade al capital sólo a tiempos convenidos, como, por ejemplo, anualmente o trimestralmente. Dicho de otro modo, y cambia discontinuamente con t. Pero en la Naturaleza, en general, las variaciones se efectúan continuamente. En consecuencia, para adaptar la ecuación (3) a los fenómenos naturales debemos imaginar que el capital y se capitaliza continuamente; es decir, suponer que el intervalo de tiempo Δt es un infinitésimo. Entonces la ecuación (3) se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = iy,$$

y la rapidez de variación de y es proporcional a y, lo que concuerda con (1) si $k = i$.

Se dice que la función y dada por la ecuación (1) varía de acuerdo con la ley del interés compuesto.

Un segundo ejemplo se encuentra en la solución general de la ecuación

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = ky + c,$$

siendo k y c constantes no iguales a cero. En efecto, sea $c = ak$. Entonces (4) puede escribirse

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}(y + a) = k(y + a).$$

Esta ecuación expresa que la función $(y + a)$ varía según la ley del interés compuesto. La ecuación diferencial (4), o sea (5), se resuelve como la del tipo I, del Artículo 204. La solución es

$$(6) \qquad y = ce^{kx} - a.$$

EJEMPLO 1. Cierta función y de x cambia según la ley del interés compuesto. Cuando $x = 1$, $y = 4$; cuando $x = 2$, $y = 12$. Hallar la función.

Solución. Según (1) tenemos

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = ky.$$

Separando las variables e integrando, obtenemos

$$\ln y = kx + C.$$

Para hallar los valores de k y C, bastará sustituir los valores dados de x y y. Entonces

$$\ln 4 = k + C, \quad \ln 12 = 2k + C.$$

Despejando k y C, resulta

$$k = \ln 12 - \ln 4 = \ln 3 = 1{,}0986, \quad C = \ln 4 - \ln 3 = \ln \tfrac{4}{3}.$$

Por tanto,

$$\ln y = 1{,}0986\,x + \ln \tfrac{4}{3}, \qquad y \qquad y = \tfrac{4}{3}\,e^{1{,}0986x}.$$

EJEMPLO 2. *Desleimiento continuo de una solución.* Se hace correr agua en un tanque que contiene una solución salina (o ácida), con el fin de reducir la concentración. El volumen v de la mezcla se mantiene constante. Si s representa la cantidad de sal (o de ácido) en el tanque en un tiempo cualquiera, y x la cantidad de agua que ha corrido, demostrar que la razón de la disminución de s con respecto a x varía como s, y que

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}.$$

Solución. Puesto que en la mezcla, de volumen total v, la cantidad de sal es s, la cantidad de sal en cualquier volumen u de la mezcla es $\frac{s}{v}u$.

Supongamos ahora que un volumen Δx de la mezcla se vacía del tanque. La cantidad de sal que se vacía así será $\frac{s}{v}\Delta x$, y, por tanto, el cambio de la cantidad de sal en el tanque viene dada por

$$(8) \qquad \Delta s = -\frac{s}{v}\Delta x.$$

Ahora supóngase que se añade un volumen Δx de agua, llenando el tanque hasta el volumen primitivo v. Entonces, según (8), la razón de la cantidad de sal quitada al volumen de agua añadido es

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = -\frac{s}{v}.$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos la rapidez instantánea de variación de s con respecto a x, a saber

$$\frac{ds}{dx} = -\frac{s}{v}.$$

Luego, s cambia según la ley del interés compuesto.

PROBLEMAS

1. La rapidez de variación de una función y con respecto a x es igual a $\frac{1}{3}y$, y $y = 4$ cuando $x = -1$. Hallar la ley que relaciona x y y.
Sol. $y = 5{,}58\, e^{\frac{1}{3}x}$.

2. La rapidez de variación de una función y con respecto a x es igual a $2 - y$, y $y = 8$ cuando $x = 0$. Hallar la ley. *Sol.* $y = 6\, e^{-x} + 2$.

3. En el ejemplo 2, si $v = 10\,000$ litros, ¿cuánta agua se debe hacer correr para quitar el 50 por ciento de sal? *Sol.* 6 931 litros.

4. *Ley de Newton sobre el enfriamiento.* Si el exceso de la temperatura de un cuerpo sobre la del aire ambiente es x grados, la disminución de x con respecto al tiempo es proporcional a x. Si este exceso de temperatura era al principio 80 grados, y después de un minuto es 70 grados, ¿cuál será después de 2 minutos? ¿En cuántos minutos disminuirá 20 grados?

5. La presión atmosférica p en un lugar, en función de la altura h sobre el nivel del mar, cambia según la ley del interés compuesto. Suponiendo $p = 1\,000$ g por cm^2 cuando $h = 0$, y 670 g por cm^2 cuando $h = 3\,000$ metros, hallar p: *a*) cuando $h = 2\,000$ m; *b*) cuando $h = 5\,000$ m.
Sol. *a*) 766 g/cm^2; *b*) 513 g/cm^2.

6. La velocidad de una reacción química en la que x es la cantidad que se transforma en el tiempo t es la razón de la variación de x con respecto al tiempo.

Reacción de primer orden. Sea a la concentración al principio del experimento. Entonces, $\frac{dx}{dt} = k(a - x)$, puesto que la velocidad de variación de la cantidad que se transforma es proporcional a la concentración en el mismo instante. (Obsérvese que $a - x$, la concentración, cambia según la ley del interés compuesto.)

Demostrar que k, la constante de la velocidad, es igual a $\frac{1}{t} \ln \frac{a}{a - x}$.

7. En la reacción química llamada "inversión del mascabado" la velocidad de la inversión con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad de mascabado

que queda sin invertir. Si 1 000 Kg de mascabado se reducen al cabo de 10 horas a 800 Kg, ¿cuánto quedará sin invertir después de 24 horas? *Sol.* 586 Kg.

8. En un círculo eléctrico de voltaje dado E y de intensidad i (amperios), el voltaje E se consume en vencer: 1) la resistencia R (ohmios) del circuito; 2) la inductancia L. La ecuación que rige es

$$E = Ri + L\frac{di}{dt}, \quad \text{o sea,} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(E - Ri).$$

Por tanto, a este proceso se le aplica la ecuación (4) del Artículo 207, siendo E, R y L constantes. Dados $L = 640$, $R = 250$, $E = 500$ y $i = 0$ cuando $t = 0$, demostrar que la corriente se aproximará a 2 amperios a medida que t aumenta. Además, determinar en cuántos segundos i llegará al 90 por ciento de su valor máximo. *Sol.* 5,9 seg.

9. En la descarga de un condensador, el voltaje e disminuye con el tiempo, y la variación de e con respecto al tiempo es proporcional a e. Dado $k = \frac{1}{40}$, hallar t si e disminuye hasta el 10 % de su valor primitivo. *Sol.* 92 seg.

10. El *concentrar una solución salina* (*o ácida*) añadiendo sal (o ácido), manteniendo constante el volumen, conduce a la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v}(v - y)$, en donde v = volumen constante, y = cantidad de sal (o de ácido) en el tanque en un momento cualquiera, y x = cantidad de sal (o de ácido) que se ha añadido desde el principio. Dedúzcase este resultado, y compárese con el ejemplo 2 del Artículo 207.

208. Aplicaciones a problemas de Mecánica. Muchos problemas importantes de Mecánica y Física se resuelven por los métodos explicados en este capítulo. Por ejemplo, problemas de movimiento rectilíneo conducen frecuentemente a ecuaciones diferenciales de primero o segundo orden, y la resolución de los problemas depende de la resolución de estas ecuaciones.

Antes de explicar algunos ejemplos, hay que recordar (Artículos 51 y 59) que

$$(1) \qquad v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

siendo v y a, respectivamente, la velocidad y aceleración en cualquier instante ($= t$), y s la distancia del móvil en este instante a un origen fijo sobre la trayectoria.

EJEMPLO 1. En un movimiento rectilíneo la aceleración es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia s, y es igual a -1 cuando $s = 2$. Esto es,

$$(2) \qquad \text{aceleración} = a = -\frac{4}{s^2}.$$

Además. $v = 5$ y $s = 8$, cuando $t = 0$.

a) Hallar v cuando $s = 24$.

Solución. De (2) y (1), empleando la última forma para a, obtenemos

$$(3) \qquad v\frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2}.$$

Multiplicando ambos miembros por ds e integrando, resulta

$$(4) \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{4}{s} + C, \quad \text{o sea,} \quad v^2 = \frac{8}{s} + C'.$$

Sustituyendo en (4) las condiciones dadas $v = 5$, $s = 8$, encontramos $C' = 24$. Luego (4) se convierte en

$$(5) \qquad v^2 = \frac{8}{s} + 24.$$

De esta ecuación, si $s = 24$, resulta $v = \frac{1}{3}\sqrt{219} = 4{,}93$.

b) Hallar el tiempo que transcurre cuando el punto se mueve de

$$s = 8 \text{ a } s = 24.$$

Solución. Despejando v de (5), obtenemos

$$(6) \qquad \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{8}\frac{\sqrt{s + 3s^2}}{s}.$$

Separando las variables s y t y despejando t, teniendo en cuenta los límites dados, $s = 8$, $s = 24$, encontramos para el tiempo transcurrido

$$(7) \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_8^{24}\frac{s\,ds}{\sqrt{s + 3s^2}} = 3{,}23.$$

NOTA. Empleando la primera forma de (1) para a, (2) es equivalente a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4}{s^2},$$

que tiene la forma (*F*) del Artículo 205. Para la integración se usa el mismo método allí empleado.

Un tipo importante de movimiento rectilíneo es aquel en el que la aceleración y la distancia están en razón constante y tienen signos contrarios.

Entonces podemos escribir

$$(8) \qquad a = -k^2 s,$$

siendo k^2 = magnitud de a a la unidad de distancia.

Teniendo presente que una fuerza y la aceleración que esta fuerza causa difieren sólo en magnitud, vemos en este caso que la fuerza efec-

tiva se dirige siempre hacia el punto $s = 0$, y que, en magnitud, es directamente proporcional a la distancia s. El movimiento se llama *vibración armónica simple*.

De (8) tenemos, empleando (1),

$$\frac{d^2s}{dt^2} + k^2s = 0, \tag{9}$$

una ecuación lineal de segundo orden en s y t con coeficientes constantes. Integrando (véase el ejemplo 2 del Artículo 206), obtenemos la solución completa,

$$s = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt. \tag{10}$$

De (10), por derivación,

$$v = k(-c_1 \operatorname{sen} kt + c_2 \cos kt). \tag{11}$$

Es fácil ver que el movimiento definido por (10) es una oscilación periódica entre las posiciones extremas $s = b$ y $s = -b$, determinadas por

$$b = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{k}. \tag{12}$$

En efecto, podemos reemplazar las constantes c_1 y c_2 en (10) por otras constantes b y A tales que

$$c_1 = b \operatorname{sen} A, \quad c_2 = b \cos A. \tag{13}$$

Sustituyendo estos valores, (10) se reduce a

$$s = b \operatorname{sen}(kt + A), \qquad \text{según (4), Art. 2} \tag{14}$$

que es lo que se quería demostrar.

En los siguientes ejemplos el movimiento armónico simple se perturba por otras fuerzas. En todos los casos el problema depende de la resolución de una ecuación de una de las formas **(G)** y **(H)** del Artículo 206.

EJEMPLO 1. En un movimiento rectilíneo es

$$a = -\tfrac{5}{4}s - v. \tag{15}$$

Además, $v = 2$ y $s = 0$ cuando $t = 0$.

a) Hallar la ecuación del movimiento (s en función de t).

Solución. De (15) tenemos, empleando (1),

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + \frac{5}{4}s = 0, \tag{16}$$

que es una ecuación de la forma (G).

Las raíces de la ecuación auxiliar $r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$ son

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{-1}, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{-1}.$$

Luego la solución general de (16) es

(17) $$s = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t).$$

Según las condiciones dadas, $s = 0$ cuando $t = 0$. Sustituyendo estos valores en (17), encontramos $c_1 = 0$; luego

(18) $$s = c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} t.$$

Derivando, a fin de determinar v, obtenemos

(19) $$v = c_2 e^{-\frac{1}{2}t}(-\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} t + \cos t).$$

Sustituyendo los valores dados, $v = 2$ cuando $t = 0$, tenemos $2 = c_2$.
Con este valor de c_2, (18) se convierte en

(20) $$s = 2\, e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} t.$$

b) ¿Para qué valores de t será $v = 0$?

Solución. Cuando $v = 0$, la expresión dentro del paréntesis del segundo miembro de (19) debe anularse. Igualándola a cero, se obtiene fácilmente que

(21) $$\operatorname{tg} t = 2.$$

Para cualquier valor de t que satisfaga la ecuación (21), v se anulará. Estos valores son

(22) $$t = 1{,}10 + n\pi. \qquad (n = \text{un número entero.})$$

Dos valores sucesivos cualesquiera de t dados por (22) difieren en el intervalo constante π de tiempo.

Discusión. Este ejemplo ilustra la *vibración armónica amortiguada.* En (15) la aceleración es la suma de dos componentes

(23) $$a_1 = -\tfrac{5}{4}s, \quad a_2 = -v.$$

La vibración armónica simple que corresponde a la componente a_1 es perturbada por una *fuerza amortiguadora* con la aceleración a_2, es decir, por una fuerza proporcional a la velocidad y opuesta a la dirección del movimiento. Los efectos de esta fuerza amortiguadora son dos.

En primer lugar, el intervalo de tiempo entre dos posiciones sucesivas cualesquiera del punto en donde $v = 0$ se *prolonga* por la fuerza amortiguadora. En efecto, para la vibración armónica simple

(24) $$a_1 = -\tfrac{5}{4}s$$

en la que, comparando con (8), $k = \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1{,}12$, y, según (12), el semiperíodo es $0{,}89\,\pi$. Como hemos visto, para la vibración armónica amortiguada el intervalo correspondiente es π.

En segundo lugar, los valores de s para las sucesivas posiciones extremas del punto en donde $v = 0$, en vez de ser iguales, forman ahora una progresión geométrica decreciente. Se omite la demostración.

EJEMPLO 3. En un movimiento rectilíneo es

$$a = -4s + 2\cos 2t. \tag{25}$$

Además, $s = 0$, $v = 2$, cuando $t = 0$.

a) Hallar la ecuación del movimiento.

Solución. Según (1) la ecuación (25) es

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 2\cos 2t. \tag{26}$$

La ecuación que se busca es una solución particular de (26) que ya se halló en el ejemplo 6 del Artículo 206, y es la ecuación (47) de la página 484. Luego

$$s = \operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} 2t. \tag{27}$$

b) ¿Para qué valores de t será $v = 0$?

Solución. Derivando (27), a fin de hallar v, e igualando el resultado a cero, obtenemos

$$(2 + t)\cos 2t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t = 0, \tag{28}$$

o sea, dividiendo los términos de (28) por $\cos 2t$,

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2t + 2 + t = 0. \tag{29}$$

Las raíces de esta ecuación pueden hallarse como se explicó en los Artículos 87 a 89.

La figura 181 muestra las curvas (véase el Artículo 88)

$$y = \tfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2t, \quad y = -2 - t, \tag{30}$$

y las abscisas de los puntos de intersección son, aproximadamente,

$$t = 0{,}88, \quad 2{,}36, \quad \text{etc.}$$

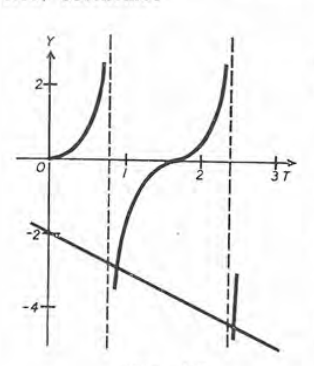


Fig. 181

Discusión. Este ejemplo ilustra la *vibración armónica forzada*. En (25) la aceleración es la suma de los dos componentes

$$a_1 = -4s, \quad a_2 = 2\cos 2t. \tag{31}$$

La vibración armónica simple que corresponde a la componente a_1 con el período π se perturba ahora por una fuerza con la aceleración a_2: es decir, por una fuerza periódica cuyo período ($= \pi$) es *el mismo* que el período de la vibración armónica simple no perturbada. Los efectos de esta fuerza perturbadora son dos.

En primer lugar, el intervalo de tiempo entre dos posiciones sucesivas del punto en donde $v = 0$ ya no es constante, sino que disminuye y tiende a $\frac{1}{2}\pi$. Esto se deduce claramente de la figura 181.

En segundo lugar, los valores de s para las posiciones extremas sucesivas en donde $v = 0$, ahora aumenta, y con el tiempo llegan a ser, en valor absoluto, infinitamente grandes.

PROBLEMAS

En cada uno de los siguientes problemas se dan la aceleración y las condiciones iniciales. Hallar la ecuación del movimiento.

1. $a = -k^2s$; $s = 0$, $v = v_0$, cuando $t = 0$. *Sol.* $s = \frac{v_0}{k}\operatorname{sen} kt$.

2. $a = -k^2s$; $s = s_0$, $v = 0$, cuando $t = 0$. $s = s_0 \cos kt$

3. $a = -k^2s$; $s = s_0$, $v = v_0$, cuando $t = 0$.

4. $a = 6 - s$; $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$. $s = 6(1 - \cos t)$.

5. $a = \operatorname{sen} 2t - s$; $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$.
Sol. $s = \frac{2}{3}\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2t$.

6. $a = 2\cos t - s$; $s = 2$, $v = 0$; cuando $t = 0$.
Sol. $s = 2\cos t + t\operatorname{sen} t$.

7. $a = -2v - 2s$; $s = 3$, $v = -3$, cuando $t = 0$.
Sol. $s = 3e^{-t}\cos t$.

8. $a = -k^2s + b$; $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$.

9. $a = -nv$; $s = 0$, $v = n$, cuando $t = 0$.

10. $a = 8t - 4s$; $s = 0$, $v = 4$, cuando $t = 0$.

11. $a = 4\operatorname{sen} t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$.

12. $a = 2\operatorname{sen} 2t - 4s$; $s = 0$, $v = 0$, cuando $t = 0$.

13. $a = -2v - 5s$; $s = 1$, $v = 1$, cuando $t = 0$.

14. Se dan $a = 8 - 4s$ y $v = 0$, $s = 0$, cuando $t = 0$. Demostrar que el movimiento es una vibración armónica simple cuyo centro es $s = 2$, su amplitud 2 y su período π.

15. La aceleración de un punto material viene dada por la fórmula

$$a = 5\cos 2t - 9s.$$

a) Si el punto parte del reposo en el origen, hallar su ecuación de movimiento. *Sol.* $s = \cos 2t - \cos 3t$.

¿Cuál es la mayor distancia del origen que el punto alcanza?

b) Si el punto parte del origen con velocidad $v = 6$, hallar su ecuación de movimiento. *Sol.* $s = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 3t - \cos 3t$.

¿Cuál es la mayor distancia del origen que el punto alcanza?

16. Hallar las soluciones del problema anterior si la aceleración es

$$a = 3 \cos 3t - 9s.$$

Sol. a) $s = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} 3t$; b) $s = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} 3t + 2 \operatorname{sen} 3t$.

17. Un cuerpo cae del reposo bajo la acción de su peso y una resistencia pequeña que varía como la velocidad. Demostrar las siguientes relaciones:

$$a = g - kv.$$

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}).$$

$$s = \frac{g}{k^2}(kt + e^{-kt} - 1).$$

$$ks + v + \frac{g}{k} \ln\left(1 - \frac{kv}{g}\right) = 0.$$

18. Un cuerpo cae, partiendo del reposo, y recorre una distancia de 24,5 m. Suponiendo $a = 9{,}8 - v$, hallar el tiempo durante el cual cae.

Sol. 3,47 seg.

19. Un bote que se mueve en agua tranquila está sujeto a una fuerza retardatriz proporcional a su velocidad en un instante cualquiera. Demostrar que la velocidad del bote, t segundos después que la fuerza motriz se suprime, está dada por la fórmula $v = ce^{-kt}$, en donde c es la velocidad en el instante de suprimir la fuerza.

20. En cierto instante un bote que flota en agua tranquila tiene una velocidad de 6 Km por hora. Después de un minuto la velocidad es 3 Km por hora. Hallar la distancia que ha recorrido.

21. Bajo ciertas condiciones la ecuación que define las oscilaciones de un galvanómetro es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\mu \frac{d\theta}{dt} + k^2\theta = 0.$$

Demostrar que no oscilará de un lado al otro del punto cero si $\mu > k$. Hallar la solución general si $\mu < k$.

209. Ecuaciones diferenciales lineales de enésimo orden con coeficientes constantes. Vamos ahora a estudiar la resolución de la ecuación diferencial lineal

$$(I) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y = 0,$$

en donde los coeficientes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son constantes.

Si sustituímos por y e^{rx} en el primer miembro, obtenemos

$$(r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n) e^{rx}.$$

Esta expresión se anula para todos los valores de r que satisfacen la ecuación

(1) $$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n = 0;$$

por tanto, para cada uno de estos valores de r, e^{rx} es una solución de (I). La ecuación (1) se llama la *ecuación auxiliar* o *ecuación característica* de (I). Observemos que los coeficientes son los mismos en las dos ecuaciones, que los exponentes en (1) corresponden al orden de las derivadas en (I), y que y se reemplaza por 1.

Una vez obtenidas las raíces de la ecuación auxiliar podemos escribir soluciones particulares de la ecuación diferencial (I). Los resultados son los del Artículo 206 extendidos a los casos en que el orden excede a dos. La demostración puede verse en textos más adelantados.

Regla para resolver la ecuación (I):

PRIMER PASO. *Se escribe la ecuación auxiliar correspondiente*

(1) $$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n = 0.$$

SEGUNDO PASO. *Se resuelve la ecuación auxiliar.*

TERCER PASO. *De las raíces de la ecuación auxiliar se deducen las soluciones particulares correspondientes de la ecuación diferencial como sigue:*

ECUACIÓN AUXILIAR	ECUACIÓN DIFERENCIAL
a) *Cada raíz real y distinta* r_1	*da una solución particular* $e^{r_1 x}$.
b) *Cada pareja distinta de raíces imaginarias* $a \pm bi$	*da* *dos soluciones particulares* $e^{ax} \cos bx$, $e^{ax} \operatorname{sen} bx$.
c) *Una raíz múltiple de orden* s	*da* s (*o* $2s$) *soluciones particulares que se obtienen multiplicando las soluciones particulares* (a) [*o* (b)] *por* $1, x, x^2, \ldots, x^{s-1}$.

CUARTO PASO. *Se multiplican cada una de las n* soluciones independientes así halladas por una constante arbitraria, y se suman los resultados. Este resultado igualado a y da la solución completa.*

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$$

Solución. Procediendo según la regla dada, tendremos:

Primer paso. $r^3 - 3r^2 + 4 = 0$, ecuación auxiliar.

Segundo paso. Resolviendo, las raices son $-1,\ 2,\ 2$.

Tercer paso. *a*) La raíz -1 da la solución e^{-x}.

c) La raíz doble 2 da las dos soluciones $e^{2x},\ xe^{2x}$.

Cuarto paso. La solución general es

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{2x}.$$

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 10\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 5y = 0.$$

Solución. Siguiendo la regla, resulta:

Primer paso. $r^4 - 4r^3 + 10r^2 - 12r + 5 = 0$, ecuación auxiliar.

Segundo paso. Resolviendo, las raices son $1,\ 1,\ 1 \pm 2i$.

Tercer paso. *b*) La pareja de raíces imaginarias $1 \pm 2i$ da las dos soluciones

$$e^x \cos 2x,\quad e^x \operatorname{sen} 2x. \qquad (a = 1,\ b = 2)$$

c) La raíz doble 1 da las dos soluciones $e^x,\ xe^x$.

Cuarto paso. La solución general es

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x\cos 2x + c_4e^x \operatorname{sen} 2x,$$

o sea,

$$y = (c_1 + c_2x + c_3\cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x)e^x.$$

La ecuación diferencial lineal

$$(J) \qquad \frac{d^ny}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + p_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + p_ny = X,$$

en donde $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ son constantes y X es una función de x o una constante, se resuelve por métodos semejantes a los que se

* Una comprobación de la exactitud del trabajo realizado se encuentra en el hecho de que los tres primeros pasos conducen a n soluciones particulares independientes.

emplearon en el Artículo 206 para la ecuación (H). Los tres pasos allí descritos deben seguirse igualmente aquí. En primer lugar, pues, resolveremos la ecuación (I). Si

$$(2) \qquad y = u,$$

es la solución general de (I), entonces u es la función complementaria de (J).

Después, si de alguna manera podemos hallar una solución particular de (J),

$$(3) \qquad y = v,$$

entonces la solución general de (J) es

$$(4) \qquad y = u + v.$$

Para hallar la solución particular (3) se pueden emplear métodos de ensayo análogos a los que se dieron en la página 482 para $n = 2$. Las reglas allí dadas para el caso general se aplican también para cualquier valor de n. En todo caso podemos seguir la siguiente regla:

Regla para hallar la solución particular de (J).

PRIMER PASO. *Se deriva sucesivamente la ecuación dada (J), y se obtiene directamente, o por eliminación, una ecuación diferencial de orden superior del tipo (I).*

SEGUNDO PASO. *Resolviendo esta nueva ecuación según la regla de la página 497, obtenemos una solución general*

$$\mathrm{y} = \mathrm{u} + \mathrm{v},$$

en donde la parte u *es la función complementaria de (J) ya hallada en el primer paso* * *y* v *es la suma de los términos adicionales que se han hallado.*

TERCER PASO. *A fin de hallar los valores de las constantes de integración en la solución particular* v, *se sustituyen* y = v *y sus derivadas en la ecuación dada (J). En la identidad que resulta, se igualan los coeficientes de las mismas potencias de la variable, se despejan las cons-*

---

* En virtud del método de deducción de la nueva ecuación, es evidente que toda solución de la ecuación primitiva es también la solución de la ecuación obtenida por derivación.

tantes de integración de las ecuaciones resultantes y se sustituyen sus valores en

$$y = u + v,$$

lo que da la solución general de (J).

Este método se ilustrará ahora por medio de un ejemplo.

NOTA La resolución de la ecuación auxiliar de la nueva ecuación diferencial deducida se facilita observando que el primer miembro de esa ecuación es divisible por el primer miembro de la ecuación auxiliar que se ha empleado en hallar la función complementaria.

EJEMPLO. Resolver la ecuación

(5) $$y'' - 3\,y' + 2\,y = xe^x.$$

Solución. En primer lugar, determinaremos la función complementaria u, resolviendo la ecuación

(6) $$y'' - 3\,y' + 2\,y = 0.$$

El resultado es

(7) $$y = u = c_1e^{2x} + c_2e^x.$$

Primer paso. Derivando (5), obtenemos

(8) $$y''' - 3\,y'' + 2\,y' = xe^x + e^x.$$

Restando (5) de (8), resulta

(9) $$y''' - 4\,y'' + 5\,y' - 2\,y = e^x.$$

Derivando (9), obtenemos

(10) $$y^{\text{IV}} - 4\,y''' + 5\,y'' - 2\,y' = e^x.$$

Restando (9) de (10), resulta

(11) $$y^{\text{IV}} - 5\,y''' + 9\,y'' - 7\,y' + 2\,y = 0,$$

que es una ecuación del tipo (I).

Segundo paso. Resolvamos la ecuación (11). La ecuación auxiliar es

(12) $$r^4 - 5\,r^3 + 9\,r^2 - 7\,r + 2 = 0.$$

El primer miembro debe de ser divisible por $r^2 - 3\,r + 2$, puesto que la ecuación auxiliar de (6) es $r^2 - 3\,r + 2 = 0$. Efectivamente, encontramos que (12) puede escribirse

(13) $$(r^2 - 3\,r + 2)\,(r - 1)^2 = 0.$$

Las raíces son $r = 1,\ 1,\ 1,\ 2$. Luego la solución general de (11) es

(14) $$y = c_1e^{2x} + e^x\,(c_2 + c_3x + c_4x^2).$$

Tercer paso. Comparando (7) y (14), vemos que

(15) $$y = v = e^x(c_3x + c_4x^2)$$

será una solución particular de (5) con valores apropiados de las constantes c_3 y c_4.

Derivando (15), obtenemos

(16) $$y' = e^x(c_3 + (c_3 + 2\,c_4)\,x + c_4x^2),$$
$$y'' = e^x(2\,(c_3 + c_4) + (c_3 + 4\,c_4)\,x + c_4x^2).$$

Sustituyendo en (5) (15) y (16), dividiendo ambos miembros por e^x y reduciendo, el resultado es

(17) $$2\,c_4 - c_3 - 2\,c_4x = x.$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, obtenemos $-2\,c_4 = 1$, $2\,c_4 - c_3 = 0$, de donde hallamos $c_3 = -1$, $c_4 = -\tfrac{1}{2}$. Sustituyendo estos valores en (15), la solución particular es

(18) $$y = v = e^x(-x - \tfrac{1}{2}x^2),$$

y la solución general es

$$y = u + v = c_1e^{2x} + c_2e^x - e^x(x + \tfrac{1}{2}x^2).$$

PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0.$ *Sol.* $y = c_1 + c_2\cos 2\,x + c_3 \operatorname{sen} 2\,x.$

2. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 4\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0.$ $y = c_1 + c_2x + c_3\cos 2\,x + c_4 \operatorname{sen} 2\,x.$

3. $\dfrac{d^5y}{dx^5} - \dfrac{dy}{dx} = 0.$ $y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + c_4\cos x + c_5 \operatorname{sen} x.$

4. $\dfrac{d^4s}{dt^4} + 3\dfrac{d^2s}{dt^2} - 4\,s = 0.$ $s = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos 2\,t + c_4 \operatorname{sen} 2\,t.$

5. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - \dfrac{d^3y}{dx^3} + 9\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} = 0.$

   Sol. $y = c_1 + c_2e^x + c_3\cos 3\,x + c_4 \operatorname{sen} 3\,x.$

6. $\dfrac{d^4s}{dt^4} + 8\dfrac{d^2s}{dt^2} + 16\,s = 0.$ $s = (c_1 + c_2t)\cos 2\,t + (c_3 + c_4t)\operatorname{sen} 2\,t$

7. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + 6\dfrac{d^2x}{dt^2} + 12\dfrac{dx}{dt} + 8\,x = 0.$ *Sol.* $x = e^{-2t}(c_1 + c_2t + c_3t^2).$

8. $\dfrac{d^4s}{dt^4} - s = t^3 + 3\,t.$

   Sol. $s = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4 \operatorname{sen} t - t^3 - 3\,t.$

9. $\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{dy}{dx} = 2x^2.$ *Sol.* $y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x.$

10. $\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} = 4x.$ $y = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4e^{-x} - \frac{2}{3}x^3.$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = xe^{3x}.$ $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - \frac{3}{4}e^{3x} + \frac{1}{2}xe^{3x}.$

12. $\frac{d^2s}{dt^2} - 9\frac{ds}{dt} + 20s = t^2e^{3t}.$ $s = c_1e^{4t} + c_2e^{5t} + \frac{e^{3t}(7+6t+2t^2)}{4}.$

13. $\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = t \operatorname{sen}^2 t.$

Sol. $s = c_1\cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{t}{8} - \frac{t\cos 2t}{32} - \frac{t^2 \operatorname{sen} 2t}{16}.$

14. $\frac{d^4y}{dx^4} - 9\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$

15. $\frac{d^3x}{dt^3} + 8x = 0.$

16. $\frac{d^4y}{dx^4} - 13\frac{d^2y}{dx^2} + 36y = 0.$

17. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} - 36y = 0.$

18. $\frac{d^4s}{dt^4} + 13\frac{d^2s}{dt^2} + 36s = 18t - 36.$

19. $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = t + 2.$

20. $\frac{d^3s}{dt^3} - 2\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} = e^t.$

MISCELANEAS DE PROBLEMAS

Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $8\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 = 27y.$ *Sol.* $y = (t + c)^{\frac{3}{2}}.$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 27y^2 = 0.$ $y = (x + c)^3.$

3. $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9x.$ $y = x^{\frac{3}{2}} + c.$

4. $(1 + x^2)\,dy = \sqrt{1 - y^2}\,dx.$ $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x + c}{1 - cx}.$

5. $(x + y)\,dx = (x - y)\,dy.$ $\ln(x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arc tg} \frac{y}{x} = c.$

6. $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}.$ $y = (x + c)e^{-x}.$

7. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 0.$ $s = c_1e^t + c_2e^{3t}.$

8. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 4s = 0.$ $s = c_1e^{2t} + c_2te^{2t}.$

9. $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 8s = 0.$ *Sol.* $s = e^{2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t).$

10. $\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}.$ $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}.$

11. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = at + b.$ $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt + \frac{at+b}{k^2}.$

12. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = ae^{bt}.$ $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt + \frac{ae^{bt}}{b^2+k^2}.$

13. $\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = a \cos kt.$ $x = c_1e^{kt} + c_2e^{-kt} - \frac{a}{2k^2}\cos kt.$

14. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = a \operatorname{sen} kt.$ $x = c_1 \cos kt + c_2 \operatorname{sen} kt - \frac{a}{2k}t \cos kt.$

15. $(x^2 - 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$ $y^2 + x^2 \ln cx = 0.$

16. $\frac{dy}{dx} + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^3}.$ $y(x^2+1)^2 = \operatorname{arc\,tg} x + c.$

17. $\frac{d^4s}{dt^4} - 5\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$ $s = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}.$

18. $\frac{d^4s}{dt^4} + 5\frac{d^2s}{dt^2} + 4s = 0.$

Sol. $s = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos 2t + c_4 \operatorname{sen} 2t.$

19. $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)\,dx.$

20. $dy + xy(1 - x^2y^2)\,dx = 0.$

21. $\frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$

22. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8t + 2.$

23. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = e^{-t}.$

24. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 6 \cos 3t.$

25. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2 \cos 2t.$

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, haciendo las transformaciones indicadas.

26. $t^2\frac{ds}{dt} - 2st - s^3 = 0.$ Sea $s = \frac{t^2}{v}.$ *Sol.* $\frac{t^4}{2s^2} + \frac{t^3}{3} = c.$

27. $(t^2 + t)\,ds = (t^2 + 2st + s)\,dt.$ Sea $s = vt.$ $s = ct(1+t) - t.$

28. $(3 + 2st)s\,dt = (3 - 2st)t\,ds.$ Sea $st = v.$

29. $(x+y)^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y + 5.$ Sea $x + y = v.$

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Cierta curva pasa por el punto $(0, k)$ y el área limitada por la curva, el eje de las x y dos ordenadas cualesquiera es k veces la longitud del arco interceptado entre las ordenadas. Demostrar que la curva tiene que ser una catenaria.

2. La aceleración de un hombre que desciende en un paracaídas desde un globo estacionario es $9,8 - \frac{1}{90} v^2$ m por segundo por segundo, siendo v la velocidad en metros por segundo. Si llega al suelo en un minuto, demostrar que la altura del globo es un poco más de 290 m.

3. Un punto que se mueve sobre el eje de las x está sujeto a una aceleración dirigida hacia el origen y proporcional a su distancia del origen, y a una fuerza retardatriz proporcional a su velocidad. Si la ecuación diferencial que define x es de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{dx}{dt} + nx = 0,$$

siendo m y n positivas, y las condiciones iniciales son $x = 10$, $\frac{dx}{dt} = 0$, cuando $t = 0$, hallar x y $\frac{dx}{dt}$ en cada uno de los casos siguientes y discutir el movimiento.

a) $m = 4, \quad n = 5;$

b) $m = 4, \quad n = 4;$

c) $m = 4, \quad n = 3.$

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

CAPITULO XXII

FUNCIONES HIPERBOLICAS

210. Seno y coseno hiperbólicos. Ciertas expresiones sencillas en las que entran funciones exponenciales (Art. 62) se presentan frecuentemente en las matemáticas aplicadas. Se llaman *funciones hiperbólicas*. La justificación de este nombre se pone de manifiesto en el Artículo 215. Dos de estas funciones, el *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* de una variable v, que se escriben, respectivamente, sen h v y cos h v, se definen por las ecuaciones

$$(A) \qquad \operatorname{senh} v = \frac{e^{v} - e^{-v}}{2}, \quad \cosh v = \frac{e^{v} + e^{-v}}{2},$$

en donde e es, como de costumbre, la base de los logaritmos neperianos (Art. 61). Pero estas funciones no son independientes, porque según (A) tenemos

$$(B) \qquad \cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1.$$

[De la ecuación (A), elevando al cuadrado, $\cosh^2 v = \frac{e^{2v} + 2 + e^{-2v}}{4}$, $\operatorname{senh}^2 v = \frac{e^{2v} - 2 + e^{-2v}}{4}$. Por tanto, restando, $\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1$.]

De (A), despejando las funciones exponenciales, obtenemos

$$(1) \qquad e^{v} = \cosh v + \operatorname{senh} v, \quad e^{-v} = \cosh v - \operatorname{senh} v.$$

EJEMPLO. Demostrar que la solución general de la ecuación diferencial

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} - a^2 y = 0$$

se puede escribir $\qquad y = A \operatorname{senh} ax + B \cosh ax,$

siendo A y B constantes.

Solución. Según el Artículo 206, la ecuación auxiliar de (2) es $r^2 - a^2 = 0$, cuyas raíces son a y $-a$. Luego la solución general de (2) es

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}.$$

Los valores de e^{ax} y e^{-ax} se obtienen de (1), tomando $v = ax$. Luego

$$e^{ax} = \cosh ax + \operatorname{senh} ax, \quad e^{-ax} = \cosh ax - \operatorname{senh} ax,$$

$$y = c_1(\cosh ax + \operatorname{senh} ax) + c_2(\cosh ax - \operatorname{senh} ax)$$

$$= (c_1 + c_2)\cosh ax + (c_1 - c_2)\operatorname{senh} ax.$$

Haciendo $c_1 - c_2 = A$, $c_1 + c_2 = B$, obtenemos la forma deseada.
El resultado debe compararse con el del ejemplo 2 en la página 478.

211. Otras funciones hiperbólicas. La *tangente hiperbólica*, tgh v, se define por la igualdad

$$(C) \qquad \operatorname{tgh} v = \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v} = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

Las igualdades

$$(1) \qquad \operatorname{ctgh} v = \frac{1}{\operatorname{tgh} v}, \quad \operatorname{sech} v = \frac{1}{\cosh v}, \quad \operatorname{csch} v = \frac{1}{\operatorname{senh} v}$$

definen, respectivamente, la *cotangente hiperbólica,* la *secante hiperbólica* y la *cosecante hiperbólica*. Las razones que se emplean en **(C)** y (1) son las mismas que se dieron en **(2)** del Artículo 2 para las correspondientes funciones trigonométricas.

Son válidas las siguientes relaciones:

$$(2) \qquad 1 - \operatorname{tgh}^2 v = \operatorname{sech}^2 v, \quad \operatorname{ctgh}^2 v - 1 = \operatorname{csch}^2 v,$$

análogas a fórmulas dadas en **(2)**, Art. 2. La demostración de la primera fórmula se da más adelante.

Las siguientes proposiciones son ciertas con respecto a los valores de las funciones hiperbólicas. Deben verificarse.

senh v, puede tener cualquier valor; cosh v, cualquier valor positivo no menor que 1; sech v, cualquier valor positivo no mayor que 1; tgh v, cualquier valor menor que 1 en valor absoluto; ctgh v, cualquier valor mayor que 1 en valor absoluto; csch v, cualquier valor con excepción de cero. Además, de las definiciones tenemos

$$\operatorname{senh}(-v) = -\operatorname{senh} v, \qquad \operatorname{csch}(-v) = -\operatorname{csch} v,$$

$$(3) \qquad \cosh(-v) = \cosh v, \qquad \operatorname{sech}(-v) = \operatorname{sech} v,$$

$$\operatorname{tgh}(-v) = -\operatorname{tgh} v, \qquad \operatorname{ctgh}(-v) = -\operatorname{ctgh} v.$$

FUNCIONES HIPERBOLICAS

v	Senh *v*	Cosh *v*	Tgh *v*	*v*	Senh *v*	Cosh *v*	Tgh *v*	*v*	Senh *v*	Cosh *v*	Tgh *v*
,00	,0000	1,000	,0000	,50	,5211	1,128	,4621	1,0	1,175	1,543	,7616
,01	,0100	1,000	,0100	,51	,5324	1,133	,4700	1,1	1,336	1,669	,8005
,02	,0200	1,000	,0200	,52	,5438	1,138	,4777	1,2	1,509	1,811	,8337
,03	,0300	1,000	,0300	,53	,5552	1,144	,4854	1,3	1,698	1,971	,8617
,04	,0400	1,001	,0400	,54	,5666	1,149	,4930	1,4	1,904	2,151	,8854
,05	,0500	1,001	,0500	,55	,5782	1,155	,5005	1,5	2,129	2,352	,9052
,06	,0600	1,002	,0599	,56	,5897	1,161	,5080	1,6	2,376	2,577	,9217
,07	,0701	1,002	,0699	,57	,6014	1,167	,5154	1,7	2,646	2,828	,9354
,08	,0801	1,003	,0798	,58	,6131	1,173	,5227	1,8	2,942	3,107	,9468
,09	,0901	1,004	,0898	,59	,6248	1,179	,5299	1,9	3,268	3,418	,9562
,10	,1002	1,005	,0997	,60	,6367	1,185	,5370	2,0	3,627	3,762	,9640
,11	,1102	1,006	,1096	,61	,6485	1,192	,5441	2,1	4,022	4,144	,9705
,12	,1203	1,007	,1194	,62	,6605	1,198	,5511	2,2	4,457	4,568	,9757
,13	,1304	1,008	,1293	,63	,6725	1,205	,5581	2,3	4,937	5,037	,9801
,14	,1405	1,010	,1391	,64	,6846	1,212	,5649	2,4	5,466	5,557	,9837
,15	,1506	1,011	,1489	,65	,6967	1,219	,5717	2,5	6,050	6,132	,9866
,16	,1607	1,013	,1587	,66	,7090	1:226	,5784	2,6	6,695	6,769	,9890
,17	,1708	1,014	,1684	,67	,7213	1,233	,5850	2,7	7,406	7,473	,9910
,18	,1810	1,016	,1781	,68	,7336	1,240	,5915	2,8	8,192	8,253	,9926
,19	,1911	1,018	,1878	,69	,7461	1,248	,5980	2,9	9,060	9,115	,9940
,20	,2013	1,020	,1974	,70	,7586	1,255	,6044	3,0	10,02	10,07	,9951
,21	,2115	1,022	,2070	,71	,7712	1,263	,6107	3,1	11,08	11,12	,9960
,22	,2218	1,024	,2165	,72	,7838	1,271	,6169	3,2	12,25	12,29	,9967
,23	,2320	1,027	,2260	,73	,7966	1,278	,6231	3,3	13,54	13,57	,9973
,24	,2423	1,029	,2355	,74	,8094	1,287	,6291	3,4	14,97	15,00	,9978
,25	,2526	1,031	,2449	,75	,8223	1,295	,6352	3,5	16,54	16,57	,9982
,26	,2629	1,034	,2543	,76	,8353	1,303	,6411	3,6	18,29	18,31	,9985
,27	,2733	1,037	,2636	,77	,8484	1,311	,6469	3,7	20,21	20,24	,9988
,28	,2837	1,039	,2729	,78	,8615	1,320	,6527	3,8	22,34	22,36	,9990
,29	,2941	1,042	,2821	,79	,8748	1,329	,6584	3,9	24,69	24,71	,9992
,30	,3045	1,045	,2913	,80	,8881	1,337	,6640	4,0	27,29	27,31	,9993
,31	,3150	1,048	,3004	,81	,9015	1,346	,6696	4,1	30,16	30,18	,9995
,32	,3255	1,052	,3095	,82	,9150	1,355	,6751	4,2	33,34	33,35	,9996
,33	,3360	1,055	,3185	,83	,9286	1,365	,6805	4,3	36,84	36,86	,9996
,34	,3466	1,058	,3275	,84	,9423	1,374	,6858	4,4	40,72	40,73	,9997
,35	,3572	1,062	,3364	,85	,9561	1,384	,6911	4,5	45,00	45,01	,9998
,36	,3678	1,066	,3452	,86	,9700	1,393	,6963	4,6	49,74	49,75	,9998
,37	,3785	1,069	,3540	,87	,9840	1,403	,7014	4,7	54,97	54,98	,9998
,38	,3892	1,073	,3627	,88	,9981	1,413	,7064	4,8	60,75	60,76	,9999
,39	,4000	1,077	,3714	,89	1,012	1,423	,7114	4,9	67,14	67,15	,9999
,40	,4108	1,081	,3800	,90	1,027	1,433	,7163	5,0	74,20	74,21	,9999
,41	,4216	1,085	,3885	,91	1,041	1,443	,7211	5,1	82,01	82,01	,9999
,42	,4325	1,090	,3969	,92	1,055	1,454	,7259	5,2	90,63	90,64	,9999
,43	,4434	1,094	,4053	,93	1,070	1,465	,7306	5,3	100,17	100,17	1,0000
,44	,4543	1,098	,4136	,94	1,085	1,475	,7352	5,4	110,70	110,71	1,0000
,45	,4653	1,103	,4219	,95	1,099	1,486	,7398	5,5	122,34	122,35	1,0000
,46	,4764	1,108	,4301	,96	1,114	1,497	,7443	5,6	135,21	135,22	1,0000
,47	,4875	1,112	,4382	,97	1,129	1,509	,7487	5,7	149,43	149,44	1,0000
,48	,4986	1,117	,4462	,98	1,145	1,520	,7531	5,8	165,15	165,15	1,0000
,49	,5098	1,122	,4542	,99	1,160	1,531	,7574	5,9	182,52	182,52	1,0000

EJEMPLO. Dada $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$, hallar los valores de las otras funciones hiperbólicas.

Solución. Dividamos cada término de (B) por $\cosh^2 x$. Tendremos:

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

Luego $$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x. \qquad \text{Según } (C) \text{ y } (1)$$

Puesto que $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$, esta ecuación da $\operatorname{sech} x = \frac{3}{5}$, siendo inadmisible el valor negativo. Entonces

$$\cosh x = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{5}{3}, \qquad \text{según } (1)$$

$$\operatorname{senh} x = \cosh x \operatorname{tgh} x = \frac{4}{3}, \qquad \text{según } (C)$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{5}{4}, \text{ y } \operatorname{csch} x = \frac{3}{4}. \qquad \text{según } (1)$$

212. Tabla de valores de senos, cosenos y tangentes hiperbólicos. Gráficas. La tabla de la página 509 da con cuatro cifras exactas los valores de $\operatorname{senh} v$, $\cosh v$, $\operatorname{tgh} v$ para valores de v de 0 a 5,9. Para valores negativos de v, hay que emplear las relaciones de (3) del Artículo 211.

Cuando $v \rightarrow +\infty$, $\operatorname{senh} v$ y $\cosh v$ se hacen infinitos y $\operatorname{tgh} v$ tiende a la unidad.

Las gráficas de $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ y $\operatorname{tgh} x$ (figuras 182, 183 y 184) se trazan fácilmente sirviéndose de la tabla.

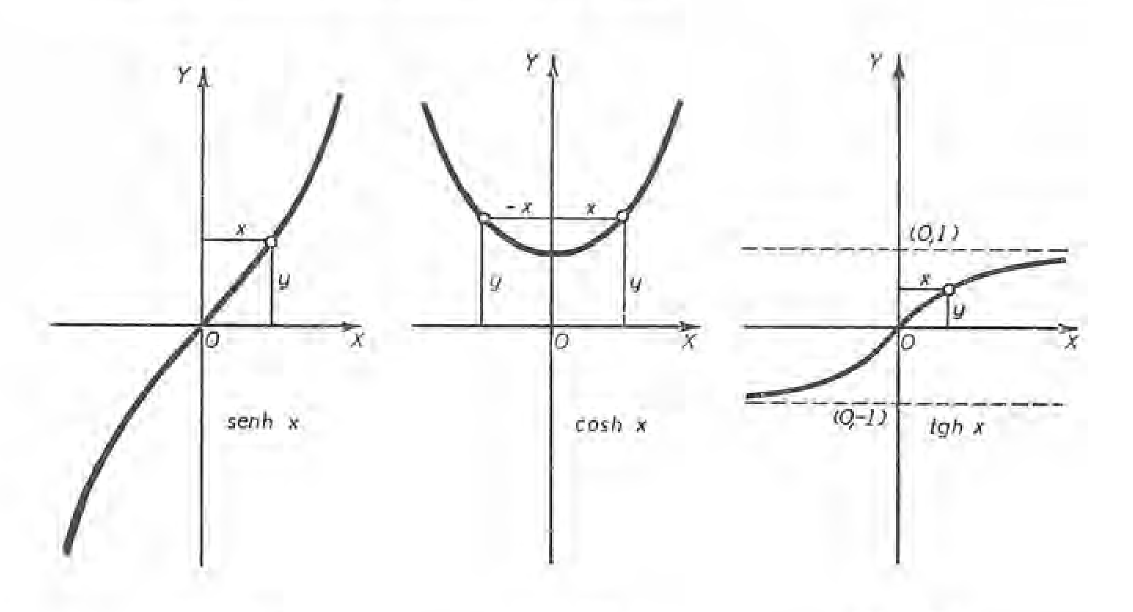


Fig. 182 Fig. 183 Fig. 184

213. Funciones hiperbólicas de v y w. Las fórmulas para funciones hiperbólicas, correspondientes a dos de las **(4)** del Artículo 2, son

$$(D) \qquad \operatorname{senh}(v+w) = \operatorname{senh} v \cosh w + \cosh v \operatorname{senh} w,$$

$$(E) \qquad \cosh(v+w) = \cosh v \cosh w + \operatorname{senh} v \operatorname{senh} w.$$

Demostración de (D). De la definición **(A)**, reemplazando v por $v+w$, tenemos

$$(1) \qquad \operatorname{senh}(v+w) = \frac{e^{v+w} - e^{-v-w}}{2},$$

$$(2) \qquad \cosh(v+w) = \frac{e^{v+w} + e^{-v-w}}{2}.$$

El segundo miembro de (1) se transforma como sigue, empleando (1) del Artículo 210.

$$\frac{e^{v+w} - e^{-v-w}}{2} = \frac{e^v e^w - e^{-v} e^{-w}}{2}$$

$$= \frac{(\cosh v + \operatorname{senh} v)(\cosh w + \operatorname{senh} w) - (\cosh v - \operatorname{senh} v)(\cosh w - \operatorname{senh} w)}{2}.$$

Efectuando las multiplicaciones y reduciendo, obtenemos **(D)**. La fórmula **(E)** se demuestra de la misma manera.

Si en **(D)** y **(E)** hacemos $w = v$, tenemos

$$(3) \qquad \operatorname{senh} 2v = 2 \operatorname{senh} v \cosh v,$$

$$(4) \qquad \cosh 2v = \cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v.$$

Estas fórmulas son análogas a las **(5)**, Art. 2, que dan sen $2x$ y $\cos 2x$. De **(B)** y (4) obtenemos resultados que corresponden a las fórmulas **(5)**, Art. 2, para $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$. Estos son

$$(5) \qquad \operatorname{senh}^2 v = \tfrac{1}{2} \cosh 2v - \tfrac{1}{2}, \quad \cosh^2 v = \tfrac{1}{2} \cosh 2v + \tfrac{1}{2}.$$

Otras relaciones para funciones hiperbólicas, que pueden compararse con las del Artículo 2 para las funciones trigonométricas, se dan en los problemas.

EJEMPLO. Deducir la fórmula

$$(6) \qquad \operatorname{tgh} v = \frac{\operatorname{senh} 2v}{\cosh 2v + 1}.$$

Solución. De (5), por división, obtenemos

(7) $$\operatorname{tgh}^2 v = \frac{\cosh 2v - 1}{\cosh 2v + 1}.$$

Ahora bien, $$\frac{\cosh 2v - 1}{\cosh 2v + 1} \cdot \frac{\cosh 2v + 1}{\cosh 2v + 1} = \frac{\cosh^2 2v - 1}{(\cosh 2v + 1)^2}.$$

Según (B), $\cosh^2 2v - 1 = \operatorname{senh}^2 2v$. Luego (7) se convierte en

(8) $$\operatorname{tgh}^2 v = \frac{\operatorname{senh}^2 2v}{(\cosh 2v + 1)^2},$$

y, por tanto, $$\operatorname{tgh} v = \pm \frac{\operatorname{senh} 2v}{\cosh 2v + 1}.$$

Ahora debe examinarse el signo del segundo miembro. De (3) tenemos

$$\operatorname{senh} 2v = \frac{2 \operatorname{senh} v}{\cosh v} \cosh^2 v = 2 \operatorname{tgh} v \cosh^2 v.$$

Por tanto, $\operatorname{senh} 2v$ y $\operatorname{tgh} v$ tendrán siempre el mismo signo. Además, como $\cosh 2v + 1$ es siempre positivo, debe escogerse el signo positivo, y obtenemos (6).

Si v se reemplaza por $\frac{1}{2} v$, (6) se convierte en

(9) $$\operatorname{tgh} \frac{v}{2} = \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v + 1}.$$

PROBLEMAS

1. Se da el valor de una función hiperbólica. Hallar los valores de las otras, y verificar los resultados, hasta donde sea posible, por la tabla de la página 509.

a) $\cosh x = 1{,}25$. *c*) $\operatorname{senh} x = 10$.

b) $\operatorname{csch} x = -0{,}75$. *d*) $\operatorname{ctgh} x = -2{,}5$.

Demostrar cada una de las fórmulas de los problemas 2 a 7 y comparar cada una con la fórmula correspondiente (si la hay) de (2), (4), (5) y (6) del Artículo 2.

2. $1 - \operatorname{ctgh}^2 v = -\operatorname{csch}^2 v$.

3. $\operatorname{senh}(v - w) = \operatorname{senh} v \cosh w - \cosh v \operatorname{senh} w$,

$\cosh(v - w) = \cosh v \cosh w - \operatorname{senh} v \operatorname{senh} w$.

4. $\operatorname{tgh}(v \pm w) = \dfrac{\operatorname{tgh} v \pm \operatorname{tgh} w}{1 \pm \operatorname{tgh} v \operatorname{tgh} w}$.

5. $\operatorname{senh} \dfrac{v}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh v - 1}{2}}$, $\cosh \dfrac{v}{2} = + \sqrt{\dfrac{\cosh v + 1}{2}}$.

6. $\operatorname{senh} v + \operatorname{senh} w = 2 \operatorname{senh} \frac{1}{2}(v + w) \cosh \frac{1}{2}(v - w)$,

$\cosh v + \cosh w = 2 \cosh \frac{1}{2}(v + w) \cosh \frac{1}{2}(v - w)$.

7. $\operatorname{tgh} \frac{1}{2}(v - w) = \dfrac{\operatorname{senh} v - \operatorname{senh} w}{\cosh v + \cosh w}$.

8. Demostrar que la ecuación de la catenaria (fig. 262) puede escribirse $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$.

9. Resolver la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ en términos de funciones hiperbólicas, en el caso en que $y = 3$ cuando $x = 0$ y $y = 0$ cuando $\operatorname{tgh} x = \frac{4}{5}$.

Sol. $y = 3 \cosh x - 3{,}75 \operatorname{senh} x$.

10. Demostrar que $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$. Trazar la gráfica y comprobar que $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{sech} x = 0$.

11. Demostrar que $\operatorname{ctgh}(-x) = -\operatorname{ctgh} x$. Trazar la gráfica y comprobar que $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{ctgh} x = 1$.

12. Demostrar que $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$. Trazar la gráfica y comprobar que $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{csch} x = 0$.

13. Demostrar que

a) $\operatorname{senh} 3u = 3 \operatorname{senh} u + 4 \operatorname{senh}^3 u$;

b) $\cosh 3u = 4 \cosh^3 u - 3 \cosh u$.

14. Demostrar que $(\operatorname{senh} x + \cosh x)^n = \operatorname{senh} nx + \cosh nx$. ($n$ un número entero positivo cualquiera.)

15. Demostrar que $\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \operatorname{senh}(x + y) \operatorname{senh}(x - y)$.

16. Simplificar $\dfrac{\cosh 2u + \cosh 4v}{\operatorname{senh} 2u + \operatorname{senh} 4v}$. *Sol.* $\operatorname{ctgh}(u + 2v)$.

17. Las ecuaciones paramétricas de la *tractriz* pueden escribirse en la forma

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}.$$

El parámetro es t, y a es una constante. Dibujar la curva cuando $a = 4$. (La tractriz es la curva en la que la longitud de la tangente (Art. 43) es constante e igual a a. Véase la figura en el Capítulo XXVI.)

18. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = n^2(y - mx^2)$.

Sol. $y = A \cosh nx + B \operatorname{senh} nx + mx^2 + \dfrac{2m}{n^2}$.

214. Derivadas. Las fórmulas de derivación (siendo v una función de x) son las siguientes:

XXVII $$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} v = \cosh v \frac{dv}{dx}.$$

XXVIII $$\frac{d}{dx}\cosh v = \operatorname{senh} v \frac{dv}{dx}.$$

XXIX $$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh} v = \operatorname{sech}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

XXX $$\frac{d}{dx}\operatorname{ctgh} v = -\operatorname{csch}^2 v \frac{dv}{dx}.$$

XXXI $$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} v = -\operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v \frac{dv}{dx}.$$

XXXII $$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} v = -\operatorname{csch} v \operatorname{ctgh} v \frac{dv}{dx}.$$

Demostración de la fórmula XXVII. Según **(A)**,

$$\operatorname{senh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}.$$

Entonces, $$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} v = \frac{e^v \frac{dv}{dx} + e^{-v}\frac{dv}{dx}}{2}$$

$$= \frac{e^v + e^{-v}}{2}\frac{dv}{dx}$$

$$= \cosh v \frac{dv}{dx},$$

empleando **(A)**.

La fórmula **XXVIII** se demuestra de manera semejante. La demostración de **XXIX** es análoga a la que se dió en el Artículo 72 para la derivada de tg v. Para demostrar **XXX, XXXI** y **XXXII**, basta derivar las formas que se dieron en (1) del Artículo 211. Los detalles se dejan como ejercicios.

215. Relaciones con la hipérbola equilátera. La curva cuyas ecuaciones paramétricas son

(1) $$x = a\cosh v,\quad y = a\operatorname{senh} v$$

es la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$. En efecto, si eliminamos el parámetro v elevando al cuadrado y restando, tenemos

$$x^2 - y^2 = a^2 (\cosh^2 v - \operatorname{senh}^2 v) = a^2. \qquad \text{Según } (B)$$

La figura 186 muestra un sector hiperbólico limitado por el arco AP_1 de (1), el semieje transverso OA y el radio vector OP_1. En P_1, $v = v_1$.

Teorema. *El área del sector hiperbólico* $\mathrm{OAP_1}$ *es* $\frac{1}{2}\mathrm{a^2 v_1}$.

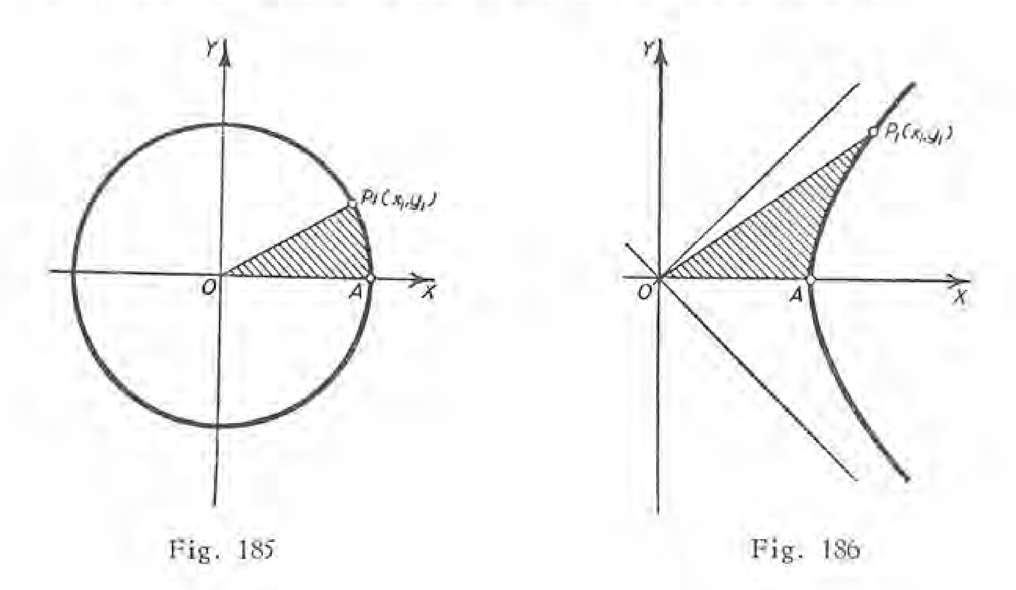


Fig. 185

Fig. 186

Demostración. Sean (ρ, θ) las coordenadas polares de un punto cualquiera del arco AP_1. Entonces el elemento de área (Art. 159) es $dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$.

Pero $\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 = a^2 (\cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v)$. Empleando (1)

Además, según (5) del Artículo 3,

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tgh} v). \qquad \text{Según } (1)$$

Luego
$$\frac{d\theta}{dv} = \frac{\operatorname{sech}^2 v}{1 + \operatorname{tgh}^2 v}.$$
Según XXII, Art. 60, y XXIX

Empleando (*C*) y (1) del Artículo 211, obtenemos

$$d\theta = \frac{dv}{\cosh^2 v + \operatorname{senh}^2 v},$$

y, por tanto, $\qquad dA = \frac{1}{2} a^2 dv.$

Integrando, y teniendo en cuenta que $v = 0$ en A, se obtiene la fórmula que demuestra el teorema.

Las ecuaciones paramétricas del círculo (fig. 185) son

$$x = r \cos t, \quad y = r \operatorname{sen} t. \qquad \text{Art. 81}$$

En P_1 el parámetro t es igual a t_1, y t_1 es la medida en radianes del ángulo central AOP_1. Luego el área del sector circular AOP_1 es $\frac{1}{2} r^2 t_1$.

Sea $r = a = 1$. Entonces, en la figura 185, para $P(x, y)$, tendremos

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad \tfrac{1}{2} t = \text{área } AOP.$$

En la figura 186, para $P(x, y)$,

$$x = \cosh v, \qquad y = \operatorname{senh} v, \qquad \tfrac{1}{2} v = \text{área } AOP.$$

Según estas igualdades las funciones hiperbólicas tienen las mismas relaciones con la hipérbola equilátera que las funciones trigonométricas tienen con el círculo.

PROBLEMAS

1. Demostrar que el elemento de longitud de arco de la catenaria

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad \text{es} \quad ds = \cosh \frac{x}{a}\, dx.$$

2. En la catenaria del problema 1, demostrar que el radio de curvatura es igual a $\frac{y^2}{a}$.

Verificar los siguientes desarrollos de funciones por la serie de Maclaurin, y determinar para qué valores de la variable son convergentes.

3. $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{\underline{|3}} + \frac{x^5}{\underline{|5}} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}} + \dots .$

Sol. Todos los valores.

4. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^4}{\underline{|4}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \dots .$

Sol. Todos los valores.

Verificar los siguientes desarrollos, empleando las series de los problemas 3 y 4 y los métodos que se explicaron en el Artículo 195.

5. $\operatorname{sech} x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 - \frac{61}{720} x^6 + \dots .$

6. $\operatorname{tgh} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 +$

7. Estudiar la función $5 \cosh x + 4 \operatorname{senh} x$ con respecto a valores máximos o mínimos. *Sol.* Valor mínimo, 3.

8. Estudiar la función A senh $x + B \cosh x$ con respecto a valores máximos y mínimos.

Sol. Si $B^2 > A^2$, un valor máximo $-\sqrt{B^2 - A^2}$ si $B < 0$.
un valor mínimo $+\sqrt{B^2 - A^2}$ si $B > 0$.

9. Deducir las series de los problemas 3 y 4 de las series para e^x y e^{-x} por adición y sustracción. (Emplear (A) y el Artículo 195.)

10. Sea ds = longitud del elemento de arco; sea $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ = radio vector de $P(x, y)$ en el círculo o en la hipérbola equilátera (Art. 215), y tómense límites de integración para el arco AP_1 en las figuras 185 y 186. Demostrar que

$a)\quad \int \frac{ds}{\varrho} = t_1$ para el círculo;

$b)\quad \int \frac{ds}{\varrho} = v_1$ para la hipérbola.

11. Demostrar que $\lim\limits_{x \to +\infty} (\cosh x - \operatorname{senh} x) = 0$.

12. Determinar el valor de cada una de las siguientes formas indeterminadas.

$a)\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x}$. $\qquad b)\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x}$.

$c)\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2}$. *Sol.* $-\frac{1}{2}$.

13. Si $\operatorname{tg} \phi = \operatorname{senh} x$, demostrar que $\frac{d\phi}{dx} = \operatorname{sech} x$.

14. Deducir el desarrollo

$$\operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} x) = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^5 - \frac{61}{5\,040} x^7 + \dots,$$

por integración, tal como en el Artículo 196, empleando el resultado del problema 5.

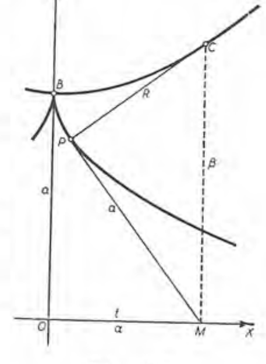


Fig. 187

15. Demostrar los siguientes teoremas para la tractriz de la figura 187, cuyas ecuaciones son

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}.$$

a) El parámetro t es igual al segmento que la tangente determina en el eje de las x.

b) La constante a es igual a la longitud de la tangente (Art. 43).

c) La evoluta es la catenaria $\beta = a \cosh \frac{\alpha}{a}$.

d) El radio de curvatura PC es $a \operatorname{senh} \frac{t}{a}$.

216. Funciones hiperbólicas inversas. La relación

(1) $$y = \operatorname{senh} v$$

se escribe también

(2) $$v = \operatorname{senh}^{-1} y$$

y se lee "v es igual al seno hiperbólico inverso de y".* Luego $\operatorname{senh} v$ y $\operatorname{senh}^{-1} y$ son funciones inversas (Art. 39). La misma notación y nomenclatura se emplean para las otras funciones hiperbólicas inversas: $\cosh^{-1} v$ ("coseno hiperbólico inverso de v"), etc.

Las gráficas de las curvas

(3) $$y = \operatorname{senh} x, \qquad y = \cosh x, \qquad y = \operatorname{tgh} x$$

se repiten por comodidad en las figuras 188, 189 y 190. Supóngase ahora que se da y.

En la figura 188, vemos que y puede tener un valor cualquiera positivo o negativo, y que cada uno de ellos determina un solo valor de x.

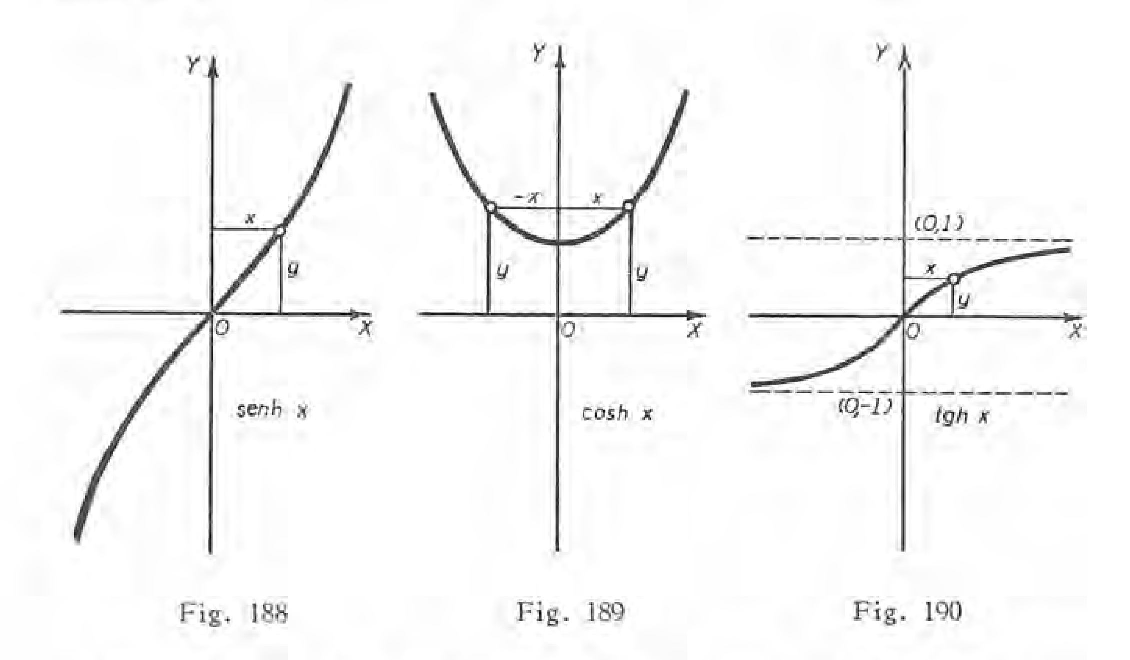


Fig. 188 Fig. 189 Fig. 190

En la figura 189, se ve que y puede tener cualquier valor positivo no menor que 1. A cada valor de $y > 1$, corresponden dos valores de x numéricamente iguales y de signos opuestos.

---

* Algunos escriben "$v = \arg \operatorname{senh} y$" y leen "$v$ es igual al argumento cuyo seno hiperbólico es y".

En la figura 190, vemos que y puede tener cualquier valor que sea menor que 1 en valor absoluto, y entonces queda determinado un valor de x.

En resumen:

La función $\operatorname{senh}^{-1} v$ está determinada únicamente para cualquier valor de v. Además, $\operatorname{senh}^{-1}(-v) = -\operatorname{senh}^{-1} v$.

La función $\cosh^{-1} v$, cuando $v > 1$, tiene dos valores que difieren sólo en el signo. Además, $\cosh^{-1} 1 = 0$.

La función $\operatorname{tgh}^{-1} v$ está determinada únicamente cuando $v^2 < 1$. Además, $\operatorname{tgh}^{-1}(-v) = -\operatorname{tgh}^{-1} v$.

En el Artículo 210 se definieron las funciones hiperbólicas en términos de funciones exponenciales. Las funciones hiperbólicas inversas pueden expresarse en términos de funciones logarítmicas. Las relaciones son:

$$(F) \qquad \operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right). \qquad \text{(Para cualquier valor de } x\text{)}$$

$$(G) \qquad \cosh^{-1} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right). \qquad (x \leqq 1)$$

$$(H) \qquad \operatorname{tgh}^{-1} x = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \qquad (x^2 < 1)$$

Demostración de (*F*). Sea $v = \operatorname{senh}^{-1} x$. Entonces

$$(4) \qquad x = \operatorname{senh} v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}. \qquad \text{Según } (A)$$

A fin de despejar v de (4), la escribiremos como sigue:

$$e^v - \frac{1}{e^v} - 2x = 0, \quad \text{o} \quad e^{2v} - 2xe^v - 1 = 0.$$

Esta ecuación es de segundo grado en e^v. Resolviendo, resulta $e^v = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$.

Puesto que e^v es siempre positivo, hay que rechazar el signo negativo delante del radical. En consecuencia, tomando logaritmos neperianos, tenemos (*F*).

Demostración de (*G*). Sea $v = \cosh^{-1} x$. Entonces

$$(5) \qquad x = \cosh v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}. \qquad \text{Según } (A)$$

Multiplicando por $2e^v$ y reduciendo, tenemos

$$e^{2v} - 2xe^v + 1 = 0.$$

Resolviendo,

$$e^v = x \pm \sqrt{x^2 - 1}.$$

Ambos valores deben retenerse. Tomando logaritmos, resulta **(*G*)**.

Demostración de (*H*). Sea $v = \text{tgh}^{-1}\, x$. Entonces

$$(6) \qquad x = \text{tgh}\, v = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}. \qquad \text{Según } (C)$$

Quitando el denominador y simplificando, el resultado es

$$(x - 1)\, e^v + (x + 1)\, e^{-v} = 0. \quad \text{Luego } e^{2v} = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

Tomando logaritmos, tenemos **(*H*)**.

EJEMPLO. Transformar

$$(7) \qquad 5 \cosh x + 4 \text{ senh } x$$

en la forma $(C) \cosh (x + a)$, en donde C y a son constantes, y determinar C y a.

Solución. Según (*E*) del Artículo 213 tenemos

$$(8) \qquad C \cosh (x + a) = C \cosh x \cosh a + C \text{ senh } x \text{ senh } a.$$

Luego (7) tendrá la forma deseada si C y a satisfacen las ecuaciones

$$(9) \qquad C \cosh a = 5, \quad C \text{ senh } a = 4.$$

Elevando al cuadrado, restando y empleando (*B*) del Artículo 210, obtenemos $C^2 = 9$. Entonces $C = +3$, puesto que $\cosh a$ debe ser positivo.
Además, por división, $\text{tgh}\, a = \frac{4}{5}$. Luego

$$a = \text{tgh}^{-1}\, 0{,}8 = \tfrac{1}{2} \ln 9. \qquad \text{Según } (H)$$

Luego $a = 1{,}099$, y

$$(10) \qquad 5 \cosh x + 4 \text{ senh } x = 3 \cosh (x + 1{,}099).$$

La gráfica de la función $5 \cosh x + 4 \text{ senh } x$ puede obtenerse en la gráfica de $3 \cosh x$ trasladando el eje de las y al nuevo origen $(1{,}099, 0)$. (Compárese con el ejemplo 2, pág. 478.)

Cuando se da x, los valores de $\text{senh}^{-1}\, x$, $\cosh^{-1}\, x$ o $\text{tgh}^{-1}\, x$ se pueden determinar por la tabla de la página 509 con no más de tres cifras exactas. Por ejemplo tomaremos, $\text{senh}^{-1}\, 0{,}25 = 0{,}247$, $\cosh^{-1}\, 3 = \pm 1{,}76$. Para mayor exactitud **(*F*)**, **(*G*)** o **(*H*)**

pueden emplearse si se tienen a la mano tablas de logaritmos neperianos. *

217. Derivadas (continuación). Las fórmulas de derivación, siendo v una función de x, son:

XXXIII $$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} v = \frac{\frac{dv}{dx}}{\sqrt{v^2+1}}.$$

(Para cualquier valor de v)

XXXIV $$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} v = \frac{\frac{dv}{dx}}{\pm\sqrt{v^2-1}}. \qquad (v > 1)$$

XXXV $$\frac{d}{dx}\operatorname{tgh}^{-1} v = \frac{\frac{dv}{dx}}{1-v^2}. \qquad (v^2 < 1)$$

Demostración de XXXIII. (Compárese con el Art. 75.) Sea

$$y = \operatorname{senh}^{-1} v;$$

entonces $$v = \operatorname{senh} y.$$

Derivando con respecto a y, según **XXVII**,

$$\frac{dv}{dy} = \cosh y;$$

luego $$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{\cosh y}. \qquad \text{Según } (C), \text{ Art. } 39$$

Puesto que v es una función de x, este valor puede sustituir en (A), Art. 38, lo que da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\frac{dv}{dx}.$$

$$\left[\cosh y = \sqrt{\operatorname{senh}^2 y + 1} = \sqrt{v^2+1}, \text{ según } (B).\right]$$

Las demostraciones de **XXXIV** y **XXXV** son semejantes.

---

* Las *Smithsonian Mathematical Tables*, ''Hyperbolic Functions'' (1909), dan los valores de senh u, cosh u, tgh u y ctgh u con cinco cifras exactas. De estas tablas se pueden hallar los valores de las funciones inversas correspondientes con cinco cifras exactas. Las *Mathematical Tables and Formulas*, de Carmichael y Smith (Ginn and Company, Boston, 1931) dan las funciones hiperbólicas con cinco cifras exactas para argumentos de 0,00 hasta 3,00 y de ellas se pueden hallar con cuatro cifras exactas las funciones inversas menores que 3.

Otras fórmulas son las siguientes:

$$(I) \qquad \operatorname{ctgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}. \qquad (x^2 > 1)$$

$$(J) \qquad \operatorname{sech}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right). \qquad (0 < x \leqq 1)$$

$$(K) \qquad \operatorname{csch}^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right). \qquad (x^2 > 0)$$

$$\text{XXXVI} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{ctgh}^{-1} v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{v^2 - 1}. \qquad (v^2 > 1)$$

$$\text{XXXVII} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{sech}^{-1} v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{\pm v\sqrt{1 - v^2}}. \qquad (0 < v < 1)$$

$$\text{XXXVIII} \qquad \frac{d}{dx} \operatorname{csch}^{-1} v = \frac{-\frac{dv}{dx}}{v^2\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}}. \qquad (v^2 > 0)$$

Las demostraciones se piden en los problemas 5 a 8 que siguen.

PROBLEMAS

1. Demostrar que los dos valores de $\cosh^{-1} x$ en (*G*) difieren sólo en el signo.

2. Trazar la gráfica de $y = \frac{1}{2} \operatorname{senh}^{-1} x$. Obtener de la figura los valores de y y y' para $x = 2$. *Sol.* $y = 0{,}72$, $y' = 0{,}2236$.

3. Demostrar **XXXIII** directamente, derivando (*F*).

4. Trazar la gráfica de cada una de las siguientes funciones, y obtener de la figura los valores de y y y' para el valor dado de x.

   a) $y = \cosh^{-1} x$; $x = 2$.
   b) $y = \operatorname{tgh}^{-1} x$; $x = -0{,}75$.

5. Demostrar **XXXIV** y **XXXV**.

6. Deducir (*I*) y **XXXVI**.

7. Deducir (*J*) y **XXXVII**.

8. Deducir (*K*) y **XXXVIII**.

9. Deducir el desarrollo

$$\operatorname{tgh}^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

por medio del Artículo 195.

10. Dado que $\operatorname{senh} x = \operatorname{tg} \phi$. Demostrar que

$$a) \quad x = \ln (\sec \phi + \operatorname{tg} \phi)\,; \quad b) \quad \frac{dx}{d\phi} = \sec \phi.$$

11. Demostrar que $\operatorname{csch}^{-1} v = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{v}$. Deducir **XXXVIII** de **XXXIII**, empleando esta relación.

12. Calcular $\lim\limits_{x = \infty} x \operatorname{ctgh}^{-1} x$. *Sol.* 1.

13. Calcular $\lim\limits_{x = \infty} x \operatorname{csch}^{-1} x$.

14. Deducir el desarrollo

$$\operatorname{senh}^{-1} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \ldots .$$

15. Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{senh}^{-1} x - \ln x)$. *Sol.* $\ln 2$.

16. Demostrar que $\operatorname{ctgh}^{-1} v = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{1}{v}$, $\operatorname{sech}^{-1} v = \cosh^{-1} \frac{1}{v}$, y verificar **XXXVI** y **XXXVII** de estas relaciones.

17. Demostrar que $\dfrac{d}{dx} \operatorname{tgh}^{-1} \dfrac{\operatorname{tgh} a \operatorname{tg} x}{\operatorname{sech} a + \sec x} = \dfrac{\operatorname{senh} a}{1 + \cosh a \cos x}$.

18. Trazar las gráficas de: *a*) $y = \operatorname{ctgh}^{-1} x$; *b*) $y = \operatorname{sech}^{-1} x$; *c*) $y = \operatorname{csch}^{-1} x$, empleando el teorema del problema 28 de la página 51.

218. Línea telegráfica. Supongamos que en una línea telegráfica se ha establecido un "régimen estacionario" de flujo de electricidad desde A, la *extremidad transmisora*, a B, la *extremidad receptora*, con aislamiento perfecto y fuga lineal uniforme. P es un punto intermedio cualquiera. Es necesario considerar:

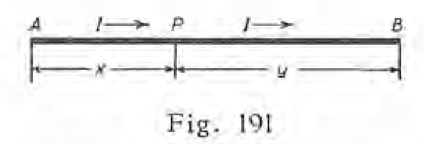


Fig. 191

la *fuerza electromotriz*, f. e. m. (voltios), E_A en A, E_B en B, E en P;
la *intensidad de la corriente* (amperios), I_A en A, I_B en B, I en P;
las *constantes características* α y r_0, cuyos valores dependen de la resistencia y la fuga lineales. Son números positivos.

Sea $x = AP$. Entonces se demuestra en libros de electrotecnia que E e I son funciones de x tales que

$$(1) \qquad \frac{d^2E}{dx^2} - \alpha^2 E = 0\,,$$

$$(2) \qquad r_0\,\alpha I = -\frac{dE}{dx}\,.$$

Deseamos hallar la f. e. m. y la intensidad de la corriente en P. Son éstas

$$(3) \qquad E = E_A \cosh \alpha x - r_0 I_A \operatorname{senh} \alpha x\,,$$

$$(4) \qquad I = I_A \cosh \alpha x - \frac{E_A}{r_0} \operatorname{senh} \alpha x.$$

Demostración. La solución general de (1) es (ver el ejemplo del Artículo 210.

$$(5) \qquad E = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x.$$

Sustituyendo en (2), se obtiene

$$(6) \qquad r_0 I = -A \operatorname{senh} \alpha x - B \cosh \alpha x.$$

Pero cuando $x = 0$, $E = E_A$, $I = I_A$. Luego

$$A = E_A\,, \quad B = -r_0 I_A\,,$$

y (5) y (6) se convierten en (3) y (4) respectivamente.

Para la solución en función de la f. e. m. y de la intensidad de la corriente en la extremidad receptora, véase el problema 2 de los que se dan a continuación.

PROBLEMAS

Todos los problemas se refieren a una línea telegráfica en un "régimen estacionario", y $L = AB$.

1. Si $E_A = 200$ voltios, $L = 500$ kilómetros, $r_0 = 4\,000$ ohmios, $\alpha = 0{,}0025$ e $I_B = 0$, hallar I_A y E_B.

Sol. $I_A = 0{,}05 \operatorname{tgh} 1{,}25 = 0{,}04238$ amperios;
$E_B = 200 \operatorname{sech} 1{,}25 = 105{,}8$ voltios $= 0{,}53\, E_A$.

2. Si $y = PB$ = distancia de P a la extremidad receptora, demostrar que

$$E = E_B \cosh \alpha y + r_0 I_B \operatorname{senh} \alpha y, \quad I = I_B \cosh \alpha y + \frac{E_B}{r_0} \operatorname{senh} \alpha y.$$

3. Si $E_A = 200$ voltios, $I_A = 0{,}04$ amperios, $r_0 = 4\,000$ ohmios y $\alpha = 0{,}0025$, demostrar que

$$E = 120 \cosh (1{,}099 - 0{,}0025\, x), \quad I = 0{,}03 \operatorname{senh} (1{,}099 - 0{,}0025\, x).$$

(Véase el ejemplo del Artículo 216. Así, E tiende hacia un valor mínimo de 120 voltios, e I hacia cero, cuando x se aproxima a 439,6.)

4. Supuesto $E_A = 160$ voltios, $I_A = 0{,}05$ amperios, $r_0 = 4\,000$ ohmios y $\alpha = 0{,}0025$, demostrar que

$$E = 120 \operatorname{senh} (1{,}099 - 0{,}0025\, x), \quad I = 0{,}03 \cosh (1{,}099 - 0{,}0025\, x).$$

(Véase el ejemplo del Artículo 216. Así, E tiende hacia cero, e I disminuye a un valor mínimo de 0,03 amperios, cuando x se aproxima a 439,6.)

5. Demostrar que $\dfrac{d^2 I}{dx^2} - \alpha^2 I = 0$. (Siendo así, E e I son soluciones de la misma ecuación diferencial lineal, que tiene la forma $y'' - \alpha^2 y = 0$.)

6. Si $E_A = r_0 I_A$, demostrar:

   a) $E = E_A e^{-\alpha x}$, $I = I_A e^{-\alpha x}$, siendo e la base de los logaritmos neperianos;

   b) $E = r_0 I$;

   c) $E \to 0$ cuando x se hace infinito.

(Por ejemplo, si $r_0 = 4\,000$, y si f. e. m. que se aplica en la extremidad transmisora de la línea es 4 000 veces la intensidad de la corriente, entonces en *cada punto* de la línea la f. e. m. es 4 000 veces la intensidad de la corriente, y disminuye hacia cero cuando la longitud de la línea aumenta indefinidamente.)

7. En el problema 6, demostrar que la fuerza electromotriz a la unidad de distancia de P a lo largo de la línea es igual a $Ee^{-\alpha}$.

8. Demostrar:

   a) que si $I_B = 0$, entonces $E_A = r_0 I_A \operatorname{ctgh} \alpha L$.

   b) que si $E_B = 0$, entonces $E_A = r_0 I_A \operatorname{tgh} \alpha L$.

PROBLEMAS ADICIONALES

Deducir las siguientes relaciones.

1. Si $E_A > r_0 I_A$ y $\tau = \operatorname{tgh}^{-1} \dfrac{r_0 I_A}{E_A}$, entonces

$$E = E_A \operatorname{sech} \tau \cosh (\tau - \alpha x), \quad I = I_A \operatorname{csch} \tau \operatorname{senh} (\tau - \alpha x).$$

2. Si $E_A < r_0 I_A$ y $\tau = \operatorname{tgh}^{-1} \dfrac{E_A}{r_0 I_A}$, entonces

$$E = E_A \operatorname{csch} \tau \operatorname{senh} (\tau - \alpha x), \quad I = I_A \operatorname{sech} \tau \cosh (\tau - \alpha x).$$

219. Integrales. A continuación se da una lista de integrales elementales que implican funciones hiperbólicas, suplementaria a la del Artículo 128.

$$\int \operatorname{senh} v\,dv = \cosh v + C. \tag{24}$$

$$\int \cosh v\,dv = \operatorname{senh} v + C. \tag{25}$$

$$\int \operatorname{tgh} v\,dv = \ln \cosh v + C. \tag{26}$$

$$\int \operatorname{ctgh} v\,dv = \ln \operatorname{senh} v + C. \tag{27}$$

$$\int \operatorname{sech}^2 v\,dv = \operatorname{tgh} v + C. \tag{28}$$

$$\int \operatorname{csch}^2 v\,dv = -\operatorname{ctgh} v + C. \tag{29}$$

$$\int \operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v\,dv = -\operatorname{sech} v + C. \tag{30}$$

$$\int \operatorname{csch} v \operatorname{ctgh} v\,dv = -\operatorname{csch} v + C. \tag{31}$$

Las demostraciones se deducen inmediatamente de las fórmulas **XXVIII** a **XXXII** (Art. 214), con excepción de las relativas a las fórmulas **(26)** y **(27)**. Para demostrar **(26)**, tenemos

$$\int \operatorname{tgh} v\,dv = \int \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v}\,dv \qquad \text{según } (C)$$

$$= \int \frac{d(\cosh v)}{\cosh v} = \ln \cosh v + C.$$

La demostración de **(27)** es semejante.

EJEMPLO. Deducir las fórmulas

$$\int \operatorname{sech} v\,dv = \operatorname{arc\,tg}\,(\operatorname{senh} v) + C; \tag{1}$$

$$\int \operatorname{csch} v\,dv = \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C. \tag{2}$$

Solución. Puesto que

$$\operatorname{sech} v = \frac{1}{\cosh v} = \frac{\cosh v}{\cosh^2 v} = \frac{\cosh v}{1 + \operatorname{senh}^2 v}, \qquad \text{según } (B)$$

tenemos

$$\int \operatorname{sech} v\, dv = \int \frac{\cosh v\, dv}{1 + \operatorname{senh}^2 v} = \int \frac{d(\operatorname{senh} v)}{1 + \operatorname{senh}^2 v}$$

$$= \int d\,[\text{arc tg } (\operatorname{senh} v)\,] = \text{arc tg } (\operatorname{senh} v) + C.$$

Para deducir (2), tenemos (compárese con lo dado en el Artículo 131)

$$\operatorname{csch} v = \operatorname{csch} v\, \frac{\operatorname{csch} v + \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{csch} v + \operatorname{ctgh} v}$$

$$= \frac{\operatorname{csch}^2 v + \operatorname{csch} v \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{csch} v}.$$

$$\int \operatorname{csch} v\, dv = -\int \frac{-\operatorname{csch}^2 v - \operatorname{csch} v \operatorname{ctgh} v}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{csch} v}\, dv$$

$$= -\int \frac{d(\operatorname{ctgh} v + \operatorname{csch} v)}{\operatorname{ctgh} v + \operatorname{csch} v}$$

$$= -\ln (\operatorname{ctgh} v + \operatorname{csch} v) + C$$

$$= -\ln \left(\frac{\cosh v}{\operatorname{senh} v} + \frac{1}{\operatorname{senh} v}\right) + C \qquad \text{según (1), Art. 211}$$

$$= -\ln (\cosh v + 1) + \ln \operatorname{senh} v + C = \ln \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v + 1} + C$$

$$= \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C. \qquad \text{Según (9), Art. 213}$$

PROBLEMAS

Verificar las siguientes integraciones:

1. $\int \operatorname{senh}^2 v\, dv = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2v - \frac{1}{2} v + C.$

2. $\int \cosh^2 v\, dv = \frac{1}{4} \operatorname{senh} 2v + \frac{1}{2} v + C.$

3. $\int \operatorname{tgh}^2 v\, dv = v - \operatorname{tgh} v + C.$

4. $\int \operatorname{ctgh}^2 v\, dv = v - \operatorname{ctgh} v + C.$

5. $\int \operatorname{senh}^3 v\, dv = \frac{1}{3} \cosh^3 v - \cosh v + C.$

6. $\int \cosh^3 v\, dv = \frac{1}{3} \operatorname{senh}^3 v + \operatorname{senh} v + C.$

7. $\int \operatorname{tgh}^3 v\, dv = \ln \cosh v - \frac{1}{2} \operatorname{tgh}^2 v + C.$

8. $\int \operatorname{tgh}^4 v\, dv = v - \operatorname{tgh} v - \frac{1}{3} \operatorname{tgh}^3 v + C.$

9. $\int \operatorname{csch}^3 v\, dv = -\frac{1}{2} \operatorname{csch} v \operatorname{ctgh} v - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tgh} \frac{v}{2} + C.$

10. $\int x \operatorname{senh} x\, dx = x \cosh x - \operatorname{senh} x + C.$

11. $\int \cos x \operatorname{senh} x\, dx = \frac{1}{2} (\cos x \cosh x + \operatorname{sen} x \operatorname{senh} x) + C.$

12. $\int \operatorname{senh} (mx) \operatorname{senh} (nx) = \frac{1}{m^2 - n^2} [m \operatorname{senh}(nx) \cosh(mx) - n \cosh(nx) \operatorname{senh}(mx)] + C.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales.

13. $\int \operatorname{senh}^4 x\, dx.$

14. $\int \operatorname{sech}^4 2\, x\, dx.$

15. $\int \operatorname{sen} x \cosh x\, dx.$

16. $\int x \cosh x\, dx.$

17. $\int x^2 \cosh x\, dx.$

18. $\int e^x \operatorname{senh} x\, dx.$

19. $\int e^{ax} \cosh x\, dx.$

Determinar el valor de cada una de las siguientes integrales empleando la sustitución hiperbólica indicada. (Compárese con lo dicho en el Artículo 135.)

20. $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx; \quad x = 2 \cosh v.$

Sol. $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4} - 2 \cosh^{-1} \frac{1}{2} x + C.$

21. $\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{3/2}}; \quad u = a \operatorname{tgh} z.$

22. $\int \frac{(x + 2)\, dx}{x^2 + 2\, x + 5}; \quad x = 2 \operatorname{senh} z - 1.$

23. El arco de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ desde $(0, a)$ hasta (x, y) gira alrededor del eje de las y. Empleando funciones hiperbólicas, hallar el área de la superficie curva que se engendra.

24. Hallar el centro de gravedad del sector hiperbólico OAP_1 de la fig. 186. (Compárese con el problema 12 de la página 411.)

Sol. $\bar{x} = \frac{2}{3} a \frac{\operatorname{senh} v_1}{v_1}, \quad \bar{y} = \frac{2}{3} a \frac{\cosh v_1 - 1}{v_1}.$

220. Integrales (continuación). De las fórmulas **XXXIII** a **XXXVIII** (Art. 217) podemos deducir integrales. Algunas de éstas ya las hemos encontrado en el Artículo 128. Ahora podemos expresar sus valores en términos de funciones hiperbólicas inversas.

$$(32)\quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (v \text{ cualquier valor})$$

$$(33)\quad \int \frac{dv}{\sqrt{v^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (v \geqq a)$$

$$(34)\quad \int \frac{dv}{a^2-v^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tgh}^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (v^2 < a^2)$$

$$(35)\quad \int \frac{dv}{v^2-a^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctgh}^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (v^2 > a^2)$$

$$(36)\quad \int \frac{dv}{v\sqrt{a^2-v^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (0 < v < a)$$

$$(37)\quad \int \frac{dv}{v\sqrt{v^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{v}{a} + C. \qquad (v \text{ cualquier valor})$$

$$(38)\quad \int \sqrt{v^2+a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{senh}^{-1}\frac{v}{a} + C.$$

$$(39)\quad \int \sqrt{v^2-a^2}\,dv = \frac{v}{2}\sqrt{v^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{v}{a} + C.$$

En **(33)** y **(39)** debe emplearse el valor positivo del coseno hiperbólico inverso, y en **(36)** el valor positivo de la secante hiperbólica inversa.

Demostraciones de (32) y (33). En **(*F*)** (Art. 216) hagamos $x = \frac{v}{a}$. Entonces

$$\operatorname{senh}^{-1}\frac{v}{a} = \ln\left(\frac{v}{a} + \sqrt{\frac{v^2}{a^2}+1}\right) = \ln\,(v + \sqrt{v^2+a^2}) - \ln a.$$

Luego

$$(1)\qquad \ln\,(v+\sqrt{v^2+a^2}) = \operatorname{senh}^{-1}\frac{v}{a} + \ln a.$$

De la misma manera, de **(*G*)** obtenemos

$$(2)\qquad \ln\,(v+\sqrt{v^2-a^2}) = \cosh^{-1}\frac{v}{a} + \ln a.$$

Sustituyendo estos resultados en el segundo miembro de **(21)** del Artículo 128, obtenemos **(32)** y **(33)**.

Demostraciones de (34) y (35). En (H) hagamos $x = \frac{v}{a}$. Entonces

$$(3) \qquad \frac{1}{2} \ln \frac{a+v}{a-v} = \operatorname{tgh}^{-1} \frac{v}{a}.$$

Por consiguiente, **(34)** se deduce de (3) y **(19 *a*)** del Artículo 128.

De la misma manera, de (I) del Artículo 217 y **(19)** del Artículo 128, obtenemos **(35)**.

$$\left[\text{En (19)}, \quad \ln \frac{v-a}{v+a} = -\ln \frac{v+a}{v-a}.\right]$$

Demostración de (36). Puesto que

$$d\left(-\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}\, d\left(\frac{v}{a}\right)}{\pm \frac{v}{a}\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}}} = \frac{dv}{\pm v\sqrt{a^2-v^2}},$$

según **XXXVII**

tenemos $\int \frac{dv}{v\sqrt{a^2-v^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a}$ si se elige el signo positivo delante del radical.

La demostración de **(37)** es semejante. Las fórmulas **(38)** y **(39)** se deducen de **(23)**, del Artículo 128, empleando (1) y (2).

OBSERVACION. Puesto que

$$\operatorname{ctgh}^{-1}\frac{v}{a} = \operatorname{tgh}^{-1}\frac{a}{v}, \quad \operatorname{sech}^{-1}\frac{v}{a} = \cosh^{-1}\frac{a}{v}, \quad \operatorname{csch}^{-1}\frac{v}{a} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{a}{v},$$

las integrales (35) a (37) pueden igualmente expresarse en términos de las funciones que más convengan para el empleo de la tabla del Artículo 212.

EJEMPLO. Deducir la fórmula (37) por medio de la sustitución $v = a \operatorname{csch} z$. (Compárese con lo dicho en el Articulo 135.)

Solución. Tenemos

$$\sqrt{v^2+a^2} = \sqrt{a^2\operatorname{csch}^2 z + a^2} = a \operatorname{ctgh} z. \qquad \text{Según (2), Art. 211}$$

Además, $$dv = -a \operatorname{csch} z \operatorname{ctgh} z\, dz. \qquad \text{Según XXXII}$$

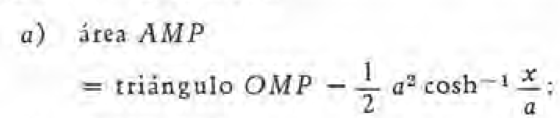
Luego $$\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2+a^2}} = \int \frac{-a \operatorname{csch} z \operatorname{ctgh} z\, dz}{a \operatorname{csch} z \cdot a \operatorname{ctgh} z} = -\frac{1}{a} z + C.$$

Y puesto que $z = \operatorname{csch}^{-1}\frac{v}{a}$, tenemos (37).

PROBLEMAS

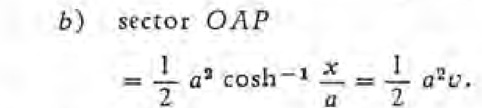
1. En la figura 192, la curva es la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$. Empleando lo dicho en el Artículo 142, demostrar que si $x = a \cosh v$ es

a) área AMP



$$= \text{triángulo } OMP - \frac{1}{2} a^2 \cosh^{-1} \frac{x}{a};$$

b) sector OAP



$$= \frac{1}{2} a^2 \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} a^2 v.$$

(Así tenemos otra demostración del teorema del Artículo 215.)

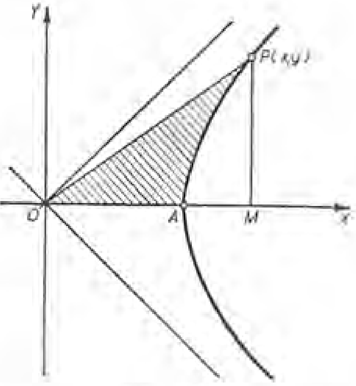


Fig. 192

2. Deducir, por integración, cada una de las siguientes series de potencias (Art. 196).

a) $\operatorname{tgh}^{-1} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (x^2 < 1)$

b) $\operatorname{senh}^{-1} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (x^2 < 1)$

Verificar las siguientes integraciones:

3. $\int \operatorname{senh}^{-1} x \, dx = x \operatorname{senh}^{-1} x - \sqrt{1 + x^2} + C.$

4. $\int \operatorname{tgh}^{-1} x \, dx.$ **5.** $\int x \cosh^{-1} x \, dx.$

Calcular, empleando funciones hiperbólicas las siguientes integrales:

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{16x^2 + 9}}.$ **7.** $\int_0^2 \frac{dx}{25 - 4x^2}.$ **8.** $\int_3^5 \sqrt{x^2 - 9} \, dx.$

9. En la parábola $x^2 = 4y$, hallar la longitud del arco desde $(0, 0)$ a $(4, 4)$, empleando funciones hiperbólicas.

Sol. $\sqrt{20} + \operatorname{senh}^{-1} 2 = 5{,}92.$

10. Hallar el área de la superficie limitada por la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ y la recta $y = 2a$.

11. La aceleración hacia abajo a de un cuerpo que cae viene dada por la fórmula $a = 9{,}8 - \frac{1}{2} v^2$, y $v = 0$, $s = 0$, cuando $t = 0$. Hallar v y s.

Sol. $v = \sqrt{19{,}6} \operatorname{tgh} \sqrt{4{,}9}\, t$, $s = 2 \ln \cosh \sqrt{4{,}9}\, t$.

221. El gudermaniano. La función arc tg (senh v), que se presenta frecuentemente en matemáticas (verbigracia en (1) del ejemplo del Artículo 219), se llama el *gudermaniano* * de v. El símbolo es gd v, que se lee "el gudermaniano de v". Así,

(1) $$\text{gd } v = \text{arc tg } (\text{senh } v).$$

La derivada es

XXXIX $$\frac{d}{dx}\text{gd } v = \text{sech } v\frac{dv}{dx},$$

suponiendo que v sea una función de x.

Demostración. Derivando (1), obtenemos

$$\frac{d}{dv}\text{gd } v = \frac{\cosh v}{1+\text{senh}^2 v}$$ Según **XXII** y **XXVII**

Pero $$1 + \text{senh}^2 v = \cosh^2 v,$$ según (B)

y $$\frac{1}{\cosh v} = \text{sech } v.$$ Según (1), Art. 211

Entonces $$\frac{d}{dx}\text{gd } v = \text{sech } v\frac{dv}{dx}.$$ Según (A), Art. 38

De la definición (1) y del Artículo 77, tenemos

(2) $$\text{gd }(0) = 0;\ \text{gd }(-v) = -\text{gd } v;$$
$$\text{gd }(+\infty) = \tfrac{1}{2}\pi;\ \text{gd }(-\infty) = -\tfrac{1}{2}\pi.$$

Cuando v aumenta, gd v aumenta (puesto que sech $v > 0$). Su valor queda comprendido entre $-\frac{1}{2}\pi$ y $+\frac{1}{2}\pi$. Algunos valores se dan en la tabla adjunta.

v	gd v
0,5	0,480
1,0	0,864
1,5	1,132
2,0	1,302
2,5	1,407
3,0	1,471
3,5	1,510
4,0	1,534
4,5	1,549
5,0	1,557

Según (1) del Artículo 219,

(40) $$\int \text{sech } v\, dv = \text{gd } v + C.$$

A fin de hallar la función inversa (Art. 39), hagamos

(3) $$\phi = \text{arc tg } (\text{senh } v),\ \left(-\tfrac{1}{2}\pi < \phi < \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

y despejemos a v. El resultado es

(4) $$v = \text{senh}^{-1}(\text{tg } \phi).$$

* Así llamado del nombre del matemático Gudermann. Sus trabajos se publicaron en 1830.

Según (3) tenemos $\operatorname{tg}\phi = \operatorname{senh} v$. Y puesto que, según **(B)**, $\cosh^2 v = 1 + \operatorname{senh}^2 v$, resulta que las funciones trigonométricas de ϕ, cuando $v > 0$, se deducen del triángulo rectángulo de la figura 193. Así, $\operatorname{sen}\phi$ es igual a $\operatorname{tgh} v$, y $\cos\phi$ es igual a $\operatorname{sech} v$, etc.

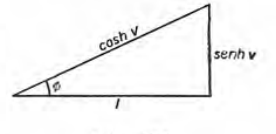


Fig. 193

La función inversa * (4) puede escribirse

(5) $$v = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi).$$

Demostración. Basta sustituir en **(F)** del Artículo 216, el valor de x por $\operatorname{tg}\phi$, y observar que $1 + \operatorname{tg}^2\phi$ es igual a $\sec^2\phi$, según (2) del Artículo 2.

Recíprocamente, dada (5), entonces $\phi = \operatorname{gd} v$.

Demostración. Escribiendo (5) en términos de exponenciales, se obtiene:

$$\sec\phi + \operatorname{tg}\phi = e^v, \quad \text{o sea,} \quad \operatorname{tg}\phi - e^v = -\sec\phi.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, sustituyendo $\sec^2\phi$ por su igual $1 + \operatorname{tg}^2\phi$ y reduciendo, resulta

$$-2\operatorname{tg}\phi\, e^v + e^{2v} = 1.$$

Despejando $\operatorname{tg}\phi$, obtenemos

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{e^v - e^{-v}}{2} = \operatorname{senh} v. \qquad \text{Según } (A)$$

Luego, $$\phi = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{senh} v) = \operatorname{gd} v,$$

como se quería demostrar.

EJEMPLO. En la tractriz (figura 194) sean

a = longitud de la tangente PT (constante por definición);

t = abscisa en el origen de la tangente;

ϕ = ángulo que forman la tangente, orientada hacia arriba, y el eje de las y;

$\phi = 0$ cuando $t = 0$.

Entonces $B\ (0, a)$ está sobre la curva.

Demostrar

(6) $$\phi = \operatorname{gd}\left(\frac{t}{a}\right).$$

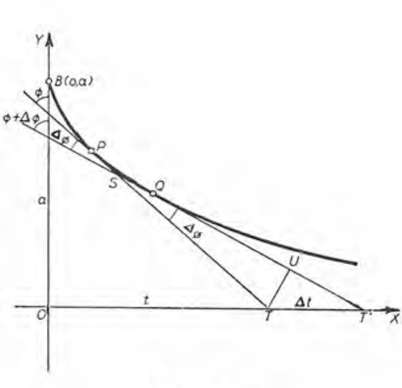


Fig. 194

* Algunos autores emplean el simbolo $\operatorname{gd}^{-1}\phi\ (v = \operatorname{gd}^{-1}\phi)$.

Demostración. Cuando se da t, el valor de ϕ queda determinado. Luego ϕ es una función de t. Sean $t + \Delta t \; (= OT')$ y $\phi + \Delta\phi$, respectivamente, los valores de t y ϕ para la tangente en un punto Q, próximo a P. Trácese TU perpendicular a QT'. Sea S el punto de intersección de las tangentes en P y Q. Entonces, en los triángulos rectángulos UTT' y STU, tenemos

$$TU = TT' \cos UTT' \quad \text{y} \quad TU = TS \operatorname{sen} TSU.$$

Luego

$$TT' \cos UTT' = TS \operatorname{sen} TSU.$$

Pero ángulo $UTT' = \phi + \Delta\phi$, ángulo $TSU = \Delta\phi$, $TT' = \Delta t$. Luego,

$$\Delta t \cos(\phi + \Delta\phi) = TS \operatorname{sen} \Delta\phi.$$

Hágase mover Q a lo largo de la curva hacia P; entonces $\Delta\phi \rightarrow 0$. En tal caso Δt y $\Delta\phi$ son infinitésimos. Además, S se aproxima a P, y $TS \rightarrow a$. Luego, según el teorema del Artículo 98 y (B) del Artículo 68, tenemos

$$dt \cos\phi = a\, d\phi, \quad \text{o sea,} \quad d\frac{t}{a} = \sec\phi \, d\phi.$$

Integrando, y recordando que $\phi = 0$ cuando $t = 0$, obtenemos

$$\frac{t}{a} = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi).$$

Luego, según (5), $$\phi = \operatorname{gd}\left(\frac{t}{a}\right),$$

como se quería demostrar.

PROBLEMAS

1. La figura 195 muestra el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante. Desde M, pie de la ordenada MP de un punto cualquiera P de la hipérbola, se traza MT tangente al círculo. Sea $\frac{1}{2}\,v$ = área del sector hiperbólico OAP (Art. 215), y ϕ = ángulo AOT. Demostrar que $\phi = \operatorname{gd} v$.

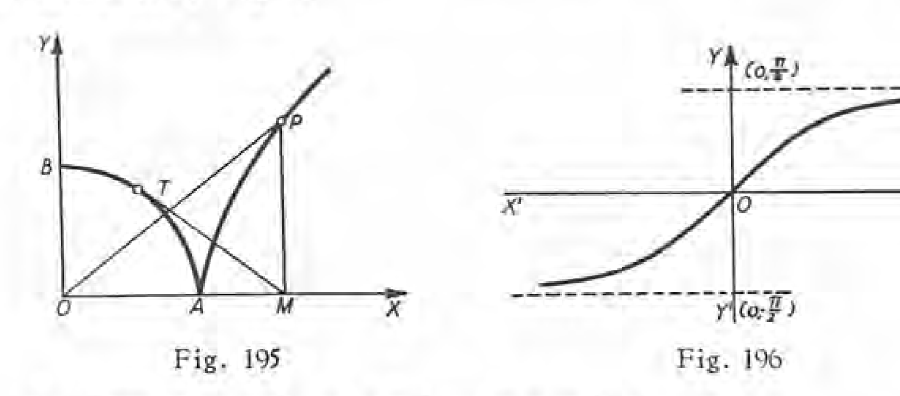


Fig. 195 Fig. 196

2. Demostrar: *a*) $\operatorname{gd} v = 2 \operatorname{arc\,tg} e^v - \frac{1}{2}\pi$;

b) $\int \operatorname{senh} v \operatorname{tgh} v \, dv = \operatorname{senh} v - \operatorname{gd} v + C$.

3. Trazar la gráfica de $y = \operatorname{gd} x$. Calcular y y y' cuando $x = 1$. Véase la figura 196. *Sol.* $y = 0{,}86$, $y' = 0{,}65$.

4. En la figura 194, si P es el punto (x, y), demostrar que

$$x = t - a \operatorname{sen} \phi, \qquad y = a \cos \phi.$$

De éstas y (6) deducir las ecuaciones paramétricas

$$x = t - a \operatorname{tgh} \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$$

de la tractriz. Hallar también la ecuación rectangular.

5. Deducir $\int \operatorname{sech}^3 v \, dv = \frac{1}{2} \operatorname{sech} v \operatorname{tgh} v + \frac{1}{2} \operatorname{gd} v + C.$

6. Si la longitud de la tangente de una curva (Art. 43) es constante $(= a)$:

a) Demostrar que $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$

b) Integrar por medio de la sustitución hiperbólica $y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a}$ y con la condición de que $x = 0$ cuando $t = 0$, y de este modo deducir las ecuaciones de la tractriz que se dieron en el problema 4

7. Determinar por derivación el valor de cada uno de los límites siguientes:

$$a) \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{gd} x - x}{x^3}; \qquad b) \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{gd} x - \operatorname{sen} x}{x^5}.$$

Sol. *a*) $-\frac{1}{6}$; *b*) $\frac{1}{30}$.

8. Empleando el desarrollo del problema 14 del Artículo 215, tenemos

$$\operatorname{gd} x = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^5 - \frac{61}{5\,040} x^7 + \dots .$$

Calcular el valor de gd 0,5 con cuatro decimales. *Sol.* 0,4804.

9. La fórmula (5) del Artículo 221, puede escribirse

$$v = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right).$$

Demostrar esta igualdad sirviéndose de (2), (4) y (5) del Artículo 2.

222. Carta de Mercator. La figura 197 muestra una porción (un octavo) de una esfera que representa la Tierra. Están indicados el Polo Norte, N, el Ecuador, EF, y la longitud, θ_1, y latitud, ϕ_1, del punto P_1. El punto Q, de longitud $\theta_1 + \Delta\theta$ y latitud $\phi_1 + \Delta\phi$, es un segundo punto cercano a P_1, en la curva P_1QV. Los meridianos y paralelos correspondientes a P_1 y Q forman el cuadrilátero P_1SQR. Vamos ahora a calcular los arcos circulares RQ y P_1R.

Puesto que O es el centro de los arcos iguales RQ y P_1S, cada uno con ángulo central $\Delta\phi$, tenemos

$$(1) \qquad \text{arco } RQ = \text{arco } P_1S = a\,\Delta\phi.$$

Puesto que C es el centro del arco P_1R, cuyo ángulo central es $\Delta\theta$, tenemos arco $P_1R = CP_1 \cdot \Delta\theta$. Pero en el triángulo rectángulo OP_1C (ángulo recto en C), $CP_1 = a \cos\phi_1$. Por tanto,

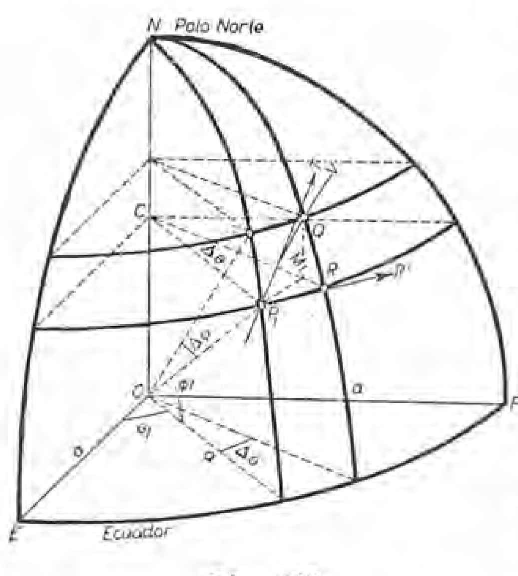


Fig. 197

$$\text{arco } P_1R = a \cos\phi_1\,\Delta\theta.$$

La recta P_1R' es tangente en P_1 al paralelo P_1R. La recta P_1T es tangente * en P_1 a la curva P_1QV. El ángulo en P_1 que forman la curva y el paralelo es el ángulo $R'P_1T$. Entonces,

$$(2) \qquad \operatorname{tg} R'P_1T = \sec\phi_1 \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_1$$

determinándose el valor de la derivada de la ecuación

$$(3) \qquad \theta = f(\phi)$$

que deben satisfacer la latitud y la longitud de cada punto de la curva P_1QV.

Demostración de (2). Se puede demostrar ** por el teorema del Artículo 98, que

$$(4) \qquad \operatorname{tg} RP_1T = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\text{arco } RQ}{\text{arco } P_1R}$$

Sustituyendo los valores de (1), obtenemos (2).

En la carta de Mercator *** el punto de latitud ϕ y longitud θ se representa por el punto (x, y) tal que

$$(5) \qquad x = \theta, \quad y = \ln(\sec\phi + \operatorname{tg}\phi),$$

---

* Definida, como en el Artículo 28, como la posición límite de la secante P_1Q cuando Q se aproxima a P_1 a lo largo de la curva P_1QV.

** Los detalles se indican en el problema adicional 1 del final del capítulo. Obsérvese que el arco RQ y el arco P_1R son, respectivamente, el opuesto y el adyacente al ángulo P_1 del triángulo curvilíneo P_1RQ.

*** El famoso cartógrafo Gerhard Kremer (1512-1594), más conocido por Gerardus Mercator, publicó su carta del Mundo en el año 1569.

o sea, inversamente,

(6) $\theta = x, \quad \phi = \text{gd } y,$ según el Artículo 221

En (5) y (6) θ y ϕ se expresan en radianes. Los meridianos (θ = constante) se representan en la carta por rectas paralelas al eje de las y, los paralelos (ϕ = constante) por rectas paralelas al eje de las x. La curva (3) viene dada por las ecuaciones paramétricas

(7) $x = f(\phi), \quad y = \ln(\sec \phi + \text{tg } \phi).$

Teorema. *El ángulo que forman en la esfera una curva y un paralelo se conserva en los mapas Mercator.*

Demostración. Sea (x_1, y_1) el punto de (7) en donde $\phi = \phi_1$. En el mapa el paralelo viene a ser la recta $y = y_1$. Por consiguiente, tenemos que demostrar que la curva (7) es tal que

(8) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \sec \phi_1 \left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)_1.$$ Empleando (2)

De (7) y (3) obtenemos

$$\frac{dy}{d\phi} = \sec \phi, \quad \frac{dx}{d\phi} = f'(\phi) = \frac{d\theta}{d\phi}.$$

Entonces, según **(*A*)** del Artículo 81 y **(*C*)** del Artículo 39 se deduce (8), como se quería demostrar.

Corolarios importantes:

Cor. I. El ángulo formado por dos curvas P_1QR y $P_1Q'R'$ en un punto P_1 de la esfera, es igual al ángulo formado por las curvas correspondientes en la carta en el punto (x_1, y_1). Por tanto, en la carta Mercator, los ángulos quedan inalterados.

Cor. II. Una recta con pendiente tg α en la carta corresponde a una curva en la esfera que corta todos los paralelos bajo el mismo ángulo α. Esta curva se llama una *línea de rumbo* o *línea loxodrómica*.

A lo largo de una loxodrómica se tiene:

(9) $\phi = \text{gd}(\theta \text{ tg } \alpha + b).$

Esto se sigue de (6) y $y = x$ tg $\alpha + b$. Un buque que sigue siempre la misma dirección navega a lo largo de una loxodrómica. En las ecuaciones (5), θ y, por consiguiente, x tienen valores desde $-\pi$ hasta $+\pi$ inclusive. Por otra parte, y puede tener cualquier valor

(Art. 221). Por tanto, toda la superficie terrestre se representa en la zona del plano xy determinada por las rectas $x = -\pi$ y $x = +\pi$. Pero la carta no comprende a los polos, puesto que esto necesitaría una dimensión infinita.

Por medio de la tabla del Artículo 221 podemos hallar la latitud, en grados, de los paralelos que se representan en la carta por las rectas $y =$ constante.

y	0	0,5	1,0	1,5	2	3	4	5
lat.	0°	27° 31′	49° 36′	64° 51′	74° 35′	84° 18′	87° 54′	89° 14′

Una línea de rumbo larga se representa en la carta por una serie de segmentos paralelos tales como AA_1, BB_1, CC_1, etc., (fig. 198), en donde BA_1, CB_1, etc., son paralelas al eje de las x. La representación es "conforme"; es decir, que se conserva la *forma* de las superficies pequeñas. Esto se sigue del corolario I. Por ejemplo, una figura triangular en la superficie terrestre, limitada por líneas de rumbo, será un triángulo en la carta, * y los ángulos correspondientes en las dos figuras serán iguales. Pero la deformación que sufre la proyección de una parte de la superficie terrestre en la carta depende de su distancia del Ecuador. El problema 4, de la página 542, pone esto de manifiesto.

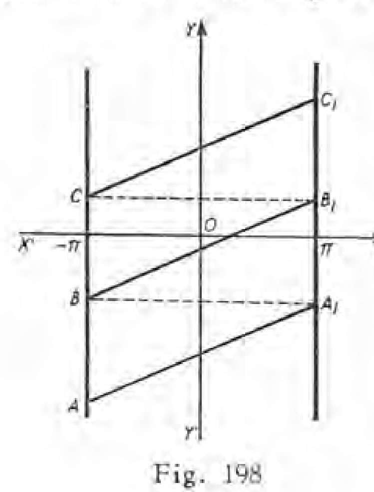


Fig. 198

223. Relaciones entre las funciones trigonométricas y las hiperbólicas. Supongamos que el exponente v de la función exponencial e^v sea un *número complejo* $x + iy$ (x y y número reales, $i = \sqrt{-1}$). Entonces asentamos como definición

$$(1) \qquad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Si $x = 0$ (Art. 206), tenemos

$$(2) \qquad e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y.$$

Cámbiese y en $-y$. Entonces (2) se convierte en

$$(3) \qquad e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y.$$

---

* Las rectas $x = -\pi$ y $x = +\pi$ representan el mismo meridiano (180° W o 180° E). Se supone que el meridiano $x = +\pi$ no corta el triángulo curvilíneo. En la figura A_1 y B representan el mismo punto de la Tierra; igualmente B_1 y C.

Resolviendo (2) y (3) con respecto a sen y y cos y, se obtiene:

(4) $$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

Así, el seno y el coseno de una variable real se expresan en términos de funciones exponenciales con exponentes imaginarios.

Las fórmulas (4) y (A) sugieren definiciones de las funciones que en ellas intervienen para el caso en que la variable es un número complejo cualquiera z. Estas definiciones son:

(5) $$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}.$$

Las otras funciones trigonométricas e hiperbólicas de z se definen por las mismas razones que se emplean cuando la variable es un número real.

De (5) podemos demostrar las siguientes fórmulas:

(L) $$\operatorname{senh} iz = i \operatorname{sen} z, \quad \cosh iz = \cos z.$$

$$\left[\operatorname{senh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \operatorname{sen} z, \text{ empleando (5), etc.}\right]$$

De (L), por división, obtenemos

(6) $$\operatorname{tgh} iz = i \operatorname{tg} z.$$

La semejanza de muchas fórmulas de este capítulo con otras relativas a funciones trigonométricas se explica por las relaciones (L) y (6) (véase el ejemplo 2). Los segundos miembros de (5) se pueden expresar como números complejos cuyas partes reales y coeficientes de i en las partes imaginarias contienen sólo funciones trigonométricas e hiperbólicas de variables reales. Esto aparece en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1. Deducir la fórmula

(7) $$\operatorname{senh}(x + iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

Solución. Según (5), si $z = x + iy$, tenemos

(8) $$\operatorname{senh}(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{2}$$

(9) $$= \frac{e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)}{2}$$

Según (1)

Según (1), Art. 210, si $v = x$, tenemos

$$e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x, \quad e^{-x} = \cosh x - \operatorname{senh} x.$$

Sustituir estos valores en (9) y reducir. El resultado es (7).
Cambiando i en $-i$, (7) se convierte en

$$\operatorname{senh}(x - iy) = \operatorname{senh} x \cos y - i \cosh x \operatorname{sen} y.$$

Conviene fijarse en la forma del segundo miembro aquí y en (7).

EJEMPLO 2. Demostrar directamente por medio de (5) las relaciones

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$$

Solución. Los detalles son los mismos que en la demostración de (*B*) del Artículo 210.

La primera relación puede deducirse de la segunda como sigue:

Sea $z = iv$. Entonces $\cosh^2 iv - \operatorname{senh}^2 iv = 1$. Pero, según (*L*), $\cosh iv = \cos v$, $\operatorname{senh} iv = i \operatorname{sen} v$. Luego $\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v = 1$.

PROBLEMAS

1. Empleando diferenciales, demostrar que en la carta de Mercator la distancia entre sí de las líneas paralelas al eje de las x, que representan los paralelos de latitudes ϕ_1 y $\phi_1 + \Delta\phi$, varía como $\sec \phi_1$.

2. A lo largo de una loxodrómica $\phi = \operatorname{gd}(\theta \operatorname{tg} \alpha + b)$. Demostrar por derivación que $\operatorname{tg} \alpha = \sec \phi \dfrac{d\phi}{d\theta}$.

3. En la esfera, la altura h de la zona limitada por los paralelos $\phi = \phi_2$, $\phi = \phi_1$ $(\phi_2 > \phi_1)$ es $a(\operatorname{sen} \phi_2 - \operatorname{sen} \phi_1)$ (véase la figura 197). Si los paralelos correspondientes en la carta son $y = y_2$, $y = y_1$, demostrar las siguientes igualdades:

$$a) \quad h = a(\operatorname{tgh} y_2 - \operatorname{tgh} y_1);$$

$$b) \quad dy = \frac{1}{a} \sec^2 \phi_1 \, dh, \text{ si } \phi_2 = \phi_1 + d\phi.$$

4. Empleando (*b*) del problema 3, demostrar que zonas iguales de pequeña altura cuyas bases inferiores son paralelos de latitudes 0, 30°, 45°, 60° se convierten en la carta, respectivamente, en rectángulos cuyas áreas están en la razón 3 : 4 : 6 : 12. (El área de una zona es el producto de su altura por la circunferencia de un círculo máximo.)

5. Describir la dirección de una curva sobre la esfera:

$$a) \quad \text{si } \frac{d\phi}{d\theta} = 0;$$

$$b) \quad \text{si } \frac{d\phi}{d\theta} \text{ se hace infinito.}$$

6. Deducir cada una de las siguientes fórmulas por el método que se empleó en el ejemplo ilustrativo 1.

a) $\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$;

b) $\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$;

c) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Según éstas escribir los valores de $\cosh(x - iy)$, $\operatorname{sen}(x - iy)$, $\cos(x - iy)$.

7. Demostrar que

a) $\operatorname{senh}\left(i\frac{\pi}{2} \pm x\right) = i \cosh x$;

b) $\cosh\left(i\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \pm i \operatorname{senh} x$.

8. Determinar con dos decimales el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{senh}(1{,}5 + i)$;   b) $\cosh(1 - i)$;

c) $\cos(0{,}8 + 0{,}5\,i)$;   d) $\operatorname{sen}(0{,}5 + 0{,}8\,i)$.

Sol. a) $1{,}15 + 1{,}98\,i$; c) $0{,}78 - 0{,}37\,i$.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. En la figura 197 se traza P_1M_1 perpendicular a CR, y por consiguiente, perpendicular al plano del meridiano NQR. Entonces el triángulo P_1QM_1 es un triángulo rectángulo (la cuerda P_1Q no está trazada), y por lo tanto, $\operatorname{tg} M_1P_1Q = \frac{M_1Q}{P_1M_1}$. Cuando $\Delta\theta \to 0$, la recta P_1M_1 (prolongada) se aproxima a la tangente P_1R', y el ángulo M_1P_1Q tiende hacia el ángulo $R'P_1T$. Por tanto,

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{tg} R'P_1T = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{M_1Q}{P_1M_1}.$$

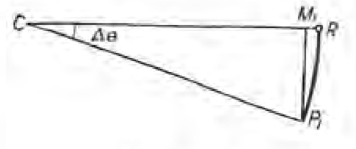


Fig. 199

Compárese con (4) del Artículo 222, y demostrar que

a) $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{P_1M_1}{\text{arco } P_1R} = 1$ (véase fig. 199);

b) $\lim\limits_{\Delta\theta \to 0} \frac{M_1Q}{\text{arco } RQ} = 1$ (véase fig. 200,

que muestra el plano del meridiano NQR). En el triángulo M_1QR, demostrar que M_1R es un infinitésimo de orden superior a QR cuando $\Delta\theta$ y $\Delta\phi$ son del mismo orden (Art. 99). Entonces véase el problema en la página 178.

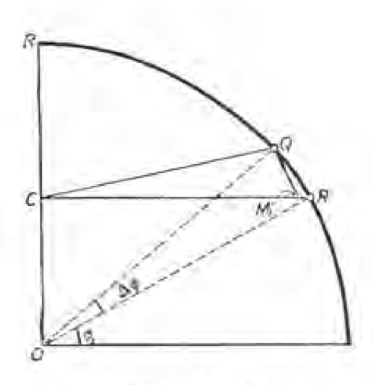


Fig. 200

Empleando (a) y (b) y el teorema del Artículo 98, la fórmula (10) se convierte en (4) del Artículo 222.

2. Si ds_1 es el elemento de la longitud de arco para una curva sobre la esfera representada en la figura 197, demostrar que $ds_1^2 = a^2 (d\phi^2 + \cos^2 \phi \, d\theta^2)$. (En la figura 197 (cuerda $P_1Q)^2 = \overline{P_1M_1}^2 + \overline{M_1Q}^2$, y $\lim \dfrac{\text{cuerda } P_1Q}{\text{arco } P_1Q} = 1$.)

3. Si ds es la diferencial del arco de una curva en la carta de Mercator, demostrar que $ds^2 = \sec^2 \phi \, (d\phi^2 + \cos^2 \phi \, d\theta^2)$. (Comparando con el problema 2, tenemos $ds_1^2 = a^2 \cos^2 \phi \, ds^2$.)

4. Hallar la longitud de una loxodrómica entre puntos cuya diferencia de latitud es $\Delta\phi$. *Sol.* $a \csc \alpha \, \Delta\phi$. ($a$ = radio de la Tierra.)

5. Demostrar que las cuatro primeras fórmulas de (4) del Artículo 2, y (D) y (E) del Artículo 213, son válidas cuando x, y, v, w se sustituyen por números complejos. (Emplear las definiciones (5).)

6. Demostrar las fórmulas del problema 6, pág. 541, empleando los resultados del problema adicional 5 y la fórmula (L).

7. Demostrar que $\operatorname{tgh}(x + iy) = \dfrac{\operatorname{senh} 2x + i \operatorname{sen} 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}$.

8. Del resultado del problema anterior deducir la fórmula para $\operatorname{tg}(x + iy)$.

CAPITULO XXIII

DERIVADAS PARCIALES

224. Funciones de dos o más variables. Continuidad. Los capítulos anteriores se han consagrado a las aplicaciones del Cálculo diferencial e integral a funciones de una variable. Ahora nos ocuparemos de las funciones de más de una variable. Algunas fórmulas de las matemáticas elementales suministran ejemplos sencillos de tales funciones. Así, en la fórmula para el volumen v de un cilindro circular recto,

$$(1) \qquad v = \pi x^2 y,$$

v es una función de las dos variables independientes x (= radio) y y (= altura). Asimismo, en la fórmula para el área u de un triángulo plano oblicuángulo,

$$(2) \qquad u = \tfrac{1}{2}\, xy \operatorname{sen} \alpha,$$

u es una función de las tres variables independientes x, y y α, que representan, respectivamente, dos lados y el ángulo comprendido.

Evidentemente, tanto en (1) como en (2), los valores que pueden asignarse a las variables en el segundo miembro son enteramente independientes el uno del otro.

La relación

$$(3) \qquad z = f(x, y)$$

puede representarse gráficamente por una superficie, el lugar geométrico de la ecuación (3), que se obtiene tomando x, y, z como coordenadas rectangulares, como en la Geometría analítica del espacio. Esta superficie es la gráfica de la función de dos variables $f(x, y)$.

Una función $f(x, y)$ de dos variables independientes se define como *continua para* $x = a$, $y = b$, cuando

$$(A) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b),$$

sin importar la manera como x y y tienden a sus límites respectivos a y b.

A veces, esta definición se resume en la siguiente proposición: *un cambio muy pequeño en una variable o en ambas produce un cambio muy pequeño en el valor de la función*.*

Podemos ilustrar esto geométricamente considerando la superficie representada por la ecuación

$$(3) \qquad z = f(x, y).$$

Consideremos un punto fijo P de la superficie (fig. 201), en donde $x = a$ y $y = b$.

Designemos por Δx y Δy los incrementos de las variables x y y, y por Δz el incremento correspondiente de la función z. Las coordenadas de P' serán

$$(x + \Delta x, \ y + \Delta y, \ z + \Delta z).$$

En P el valor de la función es

$$z = f(a, b) = MP.$$

Fig. 201

Si la función es continua en P, entonces, como quiera que Δx y Δy tiendan a cero, Δz tenderá también a cero. Es decir, que $M'P'$ tenderá a coincidir con MP, aproximándose el punto P' sobre la superficie al punto P en cualquier dirección.

Una definición semejante de función continua se da para el caso de una función de más de dos variables.

En lo que sigue, sólo se consideran valores de las variables para los que las funciones son continuas.

225. Derivadas parciales. En la relación

$$(1) \qquad z = f(x, y),$$

podemos mantener y fija y hacer que solamente varíe x. Entonces

---

* Esto se comprenderá mejor si el lector repasa el Artículo 17 referente a las funciones continuas de una sola variable.

z viene a ser una función de una sola variable x, y podemos derivarla de la manera usual. La notación es

$\frac{\partial z}{\partial x}$ = *derivada parcial de z con respecto a* x (y permanece constante).*

Análogamente,

$\frac{\partial z}{\partial y}$ = *derivada parcial de z con respecto a* y (x permanece constante).*

Se emplean símbolos correspondientes para derivadas parciales de funciones de tres o más variables.

A fin de evitar confusión, se ha adoptado generalmente el símbolo ∂ ** para indicar la derivación parcial.

EJEMPLO 1. Hallar las derivadas parciales de $z = ax^2 + 2\,bxy + cy^2$.

Solución. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2\,ax + 2\,by$, considerando y como una constante.

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\,bx + 2\,cy$, considerando x como una constante.

EJEMPLO 2. Hallar las derivadas parciales de $u = \operatorname{sen}(ax + by + cz)$.

Solución. $\frac{\partial u}{\partial x} = a\cos(ax + by + cz)$, considerando y y z como constantes.

$\frac{\partial u}{\partial y} = b\cos(ax + by + cz)$, considerando x y z como constantes.

$\frac{\partial u}{\partial z} = c\cos(ax + by + cz)$, considerando y y x como constantes.

Con respecto a (1), las notaciones más usadas en la derivación parcial son las siguientes:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = f_x = z_x ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = f_y = z_y .$$

Notaciones semejantes se emplean para funciones de cualquier número de variables.

---

* Los valores constantes se sustituyen en la función antes de derivar.

** Introducido por Jacobi (1804-1851).

Según el Artículo 24, tendremos

(2) $$f_x(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

(3) $$f_y(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

226. Interpretación geométrica de las derivadas parciales. Sea la superficie (fig. 202) de ecuación

$$z = f(x, y).$$

Por el punto P (en donde $x = a$ y $y = b$) hagamos pasar el plano $EFGH$ paralelo al plano XOZ. Puesto que la ecuación de este plano es

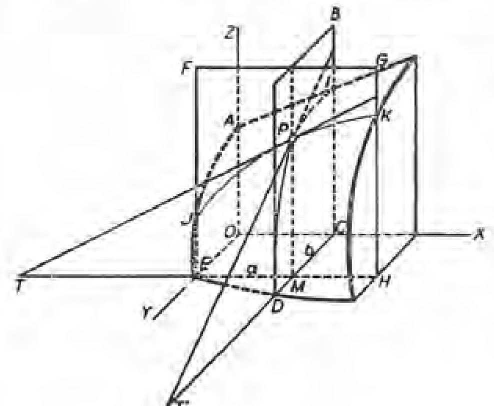


Fig. 202

$$y = b,$$

la ecuación de la curva JPK, intersección del plano con la superficie, es

$$z = f(x, b),$$

si consideramos EF como eje de las z y EH como eje de las x. En este plano, $\frac{\partial z}{\partial x}$ significa lo mismo que $\frac{dz}{dx}$, y tenemos

(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} MTP =$ pendiente de la curva de intersección JK en P.

Análogamente, si hacemos pasar por P el plano BCD paralelo al plano YOZ, su ecuación es

$$x = a,$$

y para DPI, la curva de intersección, $\frac{\partial z}{\partial y}$ significa lo mismo que $\frac{dz}{dy}$. Luego

(2) $\frac{\partial z}{\partial y} = -\operatorname{tg} MT'P =$ pendiente de la curva de intersección DI en P.

EJEMPLO. Dado el elipsoide $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} = 1$, hallar la pendiente de la curva de intersección del elipsoide, *a*) con el plano $y = 1$, en el punto en que $x = 4$ y z es positivo; *b*) con el plano $x = 2$, en el punto en que $y = 3$ y z es positivo.

Solución. Considerando y como constante, tenemos:

$$\frac{2x}{24} + \frac{2z}{6}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}.$$

Cuando x es constante,

$$\frac{2y}{12} + \frac{2z}{6}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{o sea,} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}.$$

a) Cuando $y = 1$ y $x = 4$, $z = \sqrt{\frac{3}{2}}$. $\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

b) Cuando $x = 2$ y $y = 3$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

PROBLEMAS

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones.

1. $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$.

Sol. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2Ax + By + D$; $\frac{\partial z}{\partial y} = Bx + 2Cy + E$.

2. $f(x, y) = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$.

Sol. $f_x(x, y) = 3(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$;
$f_y(x, y) = 3(Bx^2 + 2Cxy + Dy^2)$.

3. $f(x, y) = \frac{Ax + By}{Cx + Dy}$.

Sol. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(AD - BC)y}{(Cx + Dy)^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(BC - AD)x}{(Cx + Dy)^2}$.

4. $u = xy + yz + zx$. *Sol.* $u_x = y + z$; $u_y = x + z$; $u_z = x + y$.

5. $f(x, y) = (x + y)\operatorname{sen}(x - y)$.

Sol. $f_x(x, y) = \operatorname{sen}(x - y) + (x + y)\cos(x - y)$;
$f_y(x, y) = \operatorname{sen}(x - y) - (x + y)\cos(x - y)$.

6. $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta \cos 3\phi$. *Sol.* $\frac{\partial \varrho}{\partial \theta} = 2\cos 2\theta \cos 3\phi$.

$\frac{\partial \varrho}{\partial \phi} = -3\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 3\phi$.

7. $\varrho = e^{\theta+\phi}\cos(\theta - \phi)$. *Sol.* $\frac{\partial \varrho}{\partial \theta} = e^{\theta+\phi}[\cos(\theta - \phi) - \operatorname{sen}(\theta - \phi)]$;

$\frac{\partial \varrho}{\partial \phi} = e^{\theta+\phi}[\cos(\theta - \phi) + \operatorname{sen}(\theta - \phi)]$.

Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

8. $f(x, y) = 3x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2$.

9. $f(x, y) = (x + 2y)\ \mathrm{tg}\ (2x + y)$.

10. $u = \dfrac{x + 2y}{y + 2z}$.

11. $z = e^{\frac{x}{y}} \ln \dfrac{y}{x}$.

12. $\rho = \mathrm{tg}\, 2\theta\ \mathrm{ctg}\, 4\phi$.

13. $\rho = e^{-\theta} \cos \dfrac{\phi}{\theta}$.

14. Si $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$, demostrar que

$$f_x(2, 3) = -1, \quad f_y(2, 3) = 18.$$

15. Si $f(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$, demostrar que $f_x(3, 1) = -\frac{1}{2}$, $f_y(3, 1) = \frac{3}{2}$.

16. Si $f(x, y) = e^{-x}$ sen $(x + 2y)$, demostrar que

$$f_x\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad f_y\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

17. Si $u = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$, demostrar que $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 4u$.

18. Si $u = \dfrac{x^2y^2}{x + y}$, demostrar que $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u$.

19. Si $u = x^2y + y^2z + z^2x$, demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2.$$

20. Si $u = \dfrac{Ax^n + By^n}{Cx^2 + Dy^2}$, demostrar que $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = (n - 2)u$.

21. El área de un triángulo viene dada por la fórmula $K = \frac{1}{2} bc$ sen A. Si $b = 10$ cm, $c = 20$ cm y $A = 60°$:

a) Hallar el área.

b) Hallar la rapidez de variación del área con respecto al lado b si c y A permanecen constantes.

c) Hallar la rapidez de variación del área con respecto al ángulo A si b y c permanecen constantes.

d) Empleando el resultado hallado en (*c*), calcular aproximadamente el cambio del área si el ángulo se aumenta un grado.

e) Hallar la rapidez de variación de c con respecto a b si el área y el ángulo permanecen constantes.

22. La ley del coseno para un triángulo cualquiera está expresada por la fórmula $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Si $b = 10$ cm, $c = 15$ cm y $A = 60°$:

a) Hallar a.

b) Hallar la rapidez de variación de a con respecto a b si c y A permanecen constantes.

c) Empleando el resultado hallado en (b), calcular aproximadamente el cambio de a si b se disminuye 1 cm.

d) Hallar la rapidez de variación de a con respecto a A si b y c permanecen constantes.

e) Hallar la rapidez de variación de c con respecto a A si a y b permanecen constantes.

227. Diferencial total. Ya hemos considerado en el Artículo 91 la diferencial de una función de una variable. Así, si

$$y = f(x),$$

hemos definido y demostrado que

$$(1) \qquad dy = f'(x)\,\Delta x = \frac{dy}{dx}\Delta x = \frac{dy}{dx}dx.$$

Ahora vamos a considerar una función de dos variables. Sea la función

$$(2) \qquad u = f(x, y).$$

Sean Δx y Δy los incrementos de x y y respectivamente, y sea Δu el incremento correspondiente de u. Entonces

$$(3) \qquad \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

se llama el *incremento total* de u.

Sumando y restando en el segundo miembro $f(x, y + \Delta y)$, resulta

$$(4) \qquad \Delta u = [\,f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)\,] + [\,f(x, y + \Delta y) - f(x, y)\,].$$

Aplicando a cada una de las dos diferencias del segundo miembro de (4) el teorema del valor medio, **(D)**, Art. 116, obtenemos, para la primera diferencia,

$$(5) \qquad f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = = f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x.$$

[$a = x$, $\Delta a = \Delta x$, y puesto que x varía mientras que $y + \Delta y$ permanece constante, obtenemos la derivada parcial con respecto a x]

Para la segunda diferencia

$$(6) \qquad f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

[$a = y$, $\Delta a = \Delta y$, y puesto que y varía mientras que x permanece constante, obtenemos la derivada parcial con respecto a y.]

Sustituyendo (5) y (6) en (4), resulta

$$(7)\quad \Delta u = f_x(x + \theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y)\,\Delta x + f_y(x,\ y + \theta_2 \Delta y)\,\Delta y,$$

en donde, θ_1 y θ_2 son fracciones propias positivas.

Puesto que $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son funciones continuas de x y y, los coeficientes de Δx y Δy en (7) tenderán a $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ respectivamente como límites cuando Δx y Δy tienden a cero como límite común. Por tanto, podemos escribir

$$(8)\qquad f_x(x + \theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y) = f_x(x, y) + \varepsilon,$$

$$(9)\qquad f_y(x,\ y + \theta_2 \Delta y) = f_y(x, y) + \varepsilon',$$

en donde ε y ε' son infinitésimos tales que

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon' = 0,$$

y (7) se convertirá en

$$(10)\quad \Delta u = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y + \varepsilon\,\Delta x + \varepsilon'\,\Delta y.$$

Entonces definimos la *diferencial total* ($= du$) de u como

$$(11)\qquad du = f_x(x, y)\,\Delta x + f_y(x, y)\,\Delta y.$$

El segundo miembro de (11) es la "parte principal" del segundo miembro de (10); es decir, du es un valor muy aproximado de Δu para valores pequeños de Δx y Δy (compárese con el Artículo 92). Evidentemente, si $u = x$, la fórmula (11) se convierte en $dx = \Delta x$; si $u = y$, (11) se convierte en $dy = \Delta y$. Reemplazando pues Δx y Δy en (11) por las diferenciales correspondientes, obtenemos la importante fórmula

$$(B)\quad du = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy,$$

lo que debe compararse con (1) de este mismo artículo.

Si u es una función de tres variables, su diferencial total es

$$(C)\qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz;$$

y análogamente para un número cualquiera de variables.

Una interpretación geométrica de la fórmula (*B*) se da en el Artículo 238.

EJEMPLO 1. Calcular Δu y du para la función

(12) $$u = 2\,x^2 + 3\,y^2,$$

cuando $x = 10$, $y = 8$, $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}3$, y comparar los resultados.

Solución. En (12) reemplazar x, y, u, respectivamente, por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $u + \Delta u$, y proceder como sigue (compárese con el Artículo 27).

$$u + \Delta u = 2(x + \Delta x)^2 + 3(y + \Delta y)^2$$
$$= 2\,x^2 + 3\,y^2 + 4\,x\,\Delta x + 6\,y\,\Delta y + 2(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2.$$
$$u = 2\,x^2 + 3\,y^2$$

(13) $$\Delta u = 4\,x\,\Delta x + 6\,y\,\Delta y + 2(\Delta x)^2 + 3(\Delta y)^2.$$

Derivando (12), encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\,x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6\,y.$$

Sustituyendo en (*B*), el resultado es

(14) $$du = 4\,x\,dx + 6\,y\,dy.$$

Recordando que $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, vemos que el segundo miembro de (14) es la ''parte principal'' del segundo miembro de (13), porque los términos adicionales son de segundo grado en Δx o Δy. Estas igualdades son casos particulares de las (10) y (11), en las que $\varepsilon = 2\,\Delta x$ y $\varepsilon' = 3\,\Delta y$.

Sustituyendo en (13) y (14) los valores dados, obtenemos:

(15) $$\Delta u = 8 + 14{,}4 + 0{,}08 + 0{,}27 = 22{,}75;$$

(16) $$du = 8 + 14{,}4 = 22{,}4.$$

Restando, $\Delta u - du = 0{,}35 = 1{,}6\,\%$ de Δu.

EJEMPLO 2. Dado $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x}$, hallar du.

Solución. $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Sustituyendo en (*B*) $$du = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

PROBLEMAS

Hallar la diferencial total de cada una de las siguientes funciones.

1. $z = 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 3\,y^3$.
Sol. $dz = (6\,x^2 - 4\,y^2)\,dx + (9\,y^2 - 8\,xy)\,dy$.

2. $u = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$. $\qquad du = \dfrac{(AD - BC)(y\,dx - x\,dy)}{(Cx + Dy)^2}$.

3. $u = xy^2 z^3$. $\qquad du = y^2 z^3\,dx + 2\,xyz^3\,dy + 3\,xy^2 z^2\,dz$.

4. $u = x^2 \cos 2y$. **5.** $\theta = \text{arc tg } \frac{y}{x}$. **6.** $u = (x - y) \ln (x + y)$.

7. Si $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, demostrar que $dz = -\frac{x\,dx + y\,dy}{z}$.

8. Hallar dz si $4x^2 - 9y^2 - 16z^2 = 100$.

9. Calcular Δu y du para la función $u = x^2 - 3xy + 2y^2$ cuando $x = 2$, $y = -3$, $\Delta x = -0{,}3$, $\Delta y = 0{,}2$. *Sol.* $\Delta u = -7{,}15$, $du = -7{,}5$.

10. Calcular du para la función $u = (x + y)\sqrt{x - y}$ cuando $x = 6$, $y = 2$, $dx = \frac{1}{4}$, $dy = -\frac{1}{2}$. *Sol.* 1.

11. Calcular Δu y du para la función $u = xy + 2x - 4y$ cuando $x = 2$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}4$, $\Delta y = -0{,}2$.

12. Calcular $d\rho$ para la función $\rho = e^{\frac{\theta}{2}} \text{ sen } (\theta - \phi)$ cuando $\theta = 0$, $\phi = \frac{1}{2}\pi$, $d\theta = 0{,}2$, $d\phi = -0{,}2$.

228. Valor aproximado del incremento total. Errores pequeños. Las fórmulas **(*B*)** y **(*C*)** se emplean para calcular un valor aproximado de Δu. Además, cuando los valores de x y y se han determinado por medición o experimentalmente y, por tanto, están sujetos a pequeños errores Δx y Δy, por medio de **(*B*)** puede encontrarse un valor muy aproximado del error de u. (Véanse los Artículos 92 y 93.)

EJEMPLO 1. Un bote cilíndrico de material plástico de 3 mm de espesor, sin tapa, tiene en el interior 150 mm de ancho y 200 mm de alto. Determinar el volumen aproximado del material.

Solución. El volumen v de un cilindro circular recto macizo de diámetro x y altura y es

$$v = \frac{1}{4}\pi x^2 y. \tag{1}$$

Evidentemente, el volumen exacto del material es la diferencia Δv entre los volúmenes de dos cilindros macizos para los cuales

$$x = 156, \quad y = 203, \quad \text{y} \quad x = 150, \quad y = 200,$$

respectivamente. Puesto que se pide sólo un valor aproximado, calcularemos dv en vez de Δv.

Diferenciando (1) y empleando (*B*), obtenemos

$$dv = \frac{1}{2}\pi xy\,dx + \frac{1}{4}\pi x^2\,dy. \tag{2}$$

Sustituyendo en (2) $x = 150$, $y = 200$, $dx = 6$, $dy = 3$, resulta

$$dv = 106\,875\,\pi = 336\,000 \text{ mm}^3, \text{ aprox.} = 336 \text{ cm}^3.$$

El valor exacto es $\Delta v = 345\,739 \text{ mm}^3$.

EJEMPLO 2. Al medir dos lados de un triángulo plano oblicuángulo se obtuvo 63 m y 78 m, respectivamente, y al medir el ángulo comprendido se obtuvo 60°. Estas medidas estaban sujetas a errores cuyos valores máximos eran 0,1 m en cada longitud y 1° en el ángulo. Si con estas medidas se calcula el tercer lado, hallar un valor aproximado del máximo error obtenido en el resultado, y el porcentaje de error.

Solución. Empleando la ley del coseno ((7), del Art. 2) se tiene

$$u^2 = x^2 + y^2 - 2\,xy\cos\alpha, \tag{3}$$

siendo x, y los lados dados, α el ángulo comprendido y u el tercer lado. Las cantidades dadas son

$$x = 63,\quad y = 78,\quad \alpha = 60° = \frac{\pi}{3}, \tag{4}$$

$$dx = dy = 0,1,\quad d\alpha = 0,01745 \text{ (radianes)}.$$

Derivando (3), obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x - y\cos\alpha}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - x\cos\alpha}{u},\quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{xy \operatorname{sen}\alpha}{u}.$$

Luego, empleando (C),

$$du = \frac{(x - u\cos\alpha)\,dx + (y - x\cos\alpha)\,dy + xy\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha}{u}.$$

Sustituyendo los valores de (4), encontramos

$$du = \frac{2,4 + 4,65 + 74,25}{71,7} = 1,13 \text{ m}.$$

$$\text{Porcentaje de error} = 100\,\frac{du}{u} = 1,6\,\%.$$

PROBLEMAS

1. Los catetos de un triángulo rectángulo midieron 6 m y 8 m, respectivamente, con errores máximos de 0,1 m en cada uno. Hallar un valor aproximado del máximo error y del error por ciento al calcular con estas medidas: *a*) el área; *b*) la hipotenusa. *Sol.* *a*) 0,7 m^2, 2,9 %; *b*) 0,14 m, 1,4 %.

2. En el problema anterior hallar, con las dimensiones dadas, el ángulo opuesto al mayor cateto, y calcular en radianes y en grados un valor aproximado del error máximo con que se obtiene ese ángulo.

3. Los radios de las bases de un tronco de cono circular recto miden 5 cm y 11 cm, respectivamente, y el lado mide 12 cm; el error máximo en cada medida es de 1 mm. Determinar el error aproximado y el error por ciento al calcular con estas medidas: *a*) la altura; *b*) el volumen (véase (12), Art. 1).

Sol. *a*) 0,23 cm, 2,2 %; *b*) 24,4 π cm^3, $3\frac{1}{2}$ %.

4. Un lado de un triángulo mide 2 000 m, error máximo $\pm$ 1 m; los ángulos adyacentes miden $30°$ y $60°$, siendo el error máximo en cada ángulo $30'$. Hallar el error máximo aproximado, y el error por ciento, al calcular con estas medidas: *a*) la altura sobre el lado dado; *b*) el área del triángulo.

Sol. *a*) 17,88 m; 2,1 %.

5. Al medir el diámetro y la altura de un cilindro circular recto se obtiene 12 cm y 8 cm, respectivamente. Si en cada medida hay un error probable de 0,2 cm, ¿cuál es aproximadamente el mayor error posible en el volumen calculado? *Sol.* $16,8\,\pi$ cm^3.

6. Al medir las dimensiones de una caja se obtiene 6 cm, 8 cm y 12 cm. Si en cada medida hay un error probable de 0,05 cm: *a*) ¿cuál es, aproximadamente, el mayor error posible en el volumen calculado? *b*) ¿cuál es el error por ciento? *Sol.* *a*) 10,8 cm^3; *b*) 1,875 %.

7. Se da la superficie $z = \dfrac{x - y}{x + y}$. Si en el punto donde $x = 4$, $y = 2$ se aumentan x y y cada uno 0,1, ¿cuál es un valor aproximado del cambio de z?

Sol. $-\frac{1}{90}$.

8. El peso específico de un sólido se da por la fórmula $s = \dfrac{P}{w}$, en donde, P es el peso en el vacío y w es el peso de un volumen igual de agua. ¿Cómo afecta al peso específico calculado un error de $\pm$ 0,1 en el valor de P y $\pm$ 0,05 en el valor de w, suponiendo $P = 8$ y $w = 1$ en el experimento: *a*) si ambos errores son positivos; *b*) si un error es negativo? *c*) ¿Cuál es aproximadamente el mayor error por ciento? *Sol.* *a*) 0,3; *b*) 0,5; *c*) $6\frac{1}{4}$ %.

9. Al medir el diámetro y el lado de un cono circular recto se obtiene 10 cm y 20 cm, respectivamente. Si en cada medida hay un error probable de 0,2 cm, ¿cuál es, aproximadamente, el mayor error posible en el valor calculado de: *a*) el volumen; *b*) el área de la superficie curva?

Sol. *a*) $\dfrac{37\,\pi\sqrt{15}}{18} = 25$ cm^3; *b*) $3\,\pi = 9,42$ cm^2.

10. Al medir dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo se obtiene 63 m, 78 m y $60°$, respectivamente. Si hay un error probable de 0,5 m en la medida de los lados y de $2°$ en la medida del ángulo, ¿cuál es, aproximadamente, el mayor error posible en el valor calculado del área? (Véase (7), Art. 2).

Sol. 73,6 m^2.

11. Si el peso específico se determina por la fórmula $s = \dfrac{A}{A - W}$, siendo A el peso en el aire y W el peso en el agua, ¿cuál es, aproximadamente: *a*) el mayor error en s si A puede medirse con un error de $\pm$ 0,01 Kg y W con un error de $\pm$ 0,02 Kg, siendo los pesos hallados $A = 9$ Kg, $W = 5$ Kg; *b*) el mayor error relativo? *Sol.* *a*) 0,0144; *b*) $\frac{23}{3600}$.

12. La resistencia de un circuito se halló empleando la fórmula $C = \dfrac{E}{R}$, siendo C = intensidad de la corriente y E = fuerza electromotriz. Si hay un

error de $\frac{1}{10}$ de amperio en C y $\frac{1}{20}$ de voltio en E, *a*) ¿cuál es un valor aproximado del error de R si las lecturas son $C = 15$ amperios y $E = 110$ voltios? *b*) ¿cuál es el error por ciento?

Sol. *a*) 0,0522 ohmios; *b*) $^{47}/_{66}$ %.

13. Si para calcular sen $(x + y)$ se emplease la fórmula

$$\text{sen } (x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y,$$

¿cuál sería un valor aproximado del error que resultaría si se hiciese un error de 0,1° en la medida tanto de x como de y, y si estas medidas diesen sen $x = \frac{3}{5}$ y sen $y = \frac{5}{13}$? *Sol.* 0,0018.

14. La aceleración de un cuerpo que se desliza hacia abajo en un plano inclinado, prescindiendo del rozamiento, viene dada por la fórmula $a = g$ sen i. Si g varía 3 cm por segundo por segundo, y si el valor de i, que mide 30°, puede tener 1° de error, ¿cuál es el error aproximado del valor calculado de a? Tómese el valor normal de g como 9,80 m por segundo por segundo.

Sol. 0,163 m por segundo por segundo.

15. El período de oscilación de un péndulo es $P = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. *a*) ¿Cuál es el error mayor aproximado en el período si hay un error de ± 3 cm en la medida de una suspensión de 3 m, y si g, que se toma como 9,80 m por segundo por segundo, puede tener un error de 15 mm por segundo por segundo? *b*) ¿Cuál es el error por ciento? *Sol.* *a*) 0,02 seg; *b*) $^{23}/_{40}$ %.

16. Las dimensiones de un cono son: radio de la base = 4 m, altura = 6 m. ¿Cuál es el error aproximado del volumen y de la superficie total si la medida empleada se ha acortado 1 por ciento? *Sol.* $dV = 3{,}0159$ m³; $dS = 2{,}818$ m².

17. La longitud l y el período P de un péndulo simple se relacionan por la fórmula $4\pi^2 l = P^2 g$. Si l se calcula suponiendo $P = 1$ seg. y $g = 9{,}80$ m por segundo por segundo, ¿cuál es, aproximadamente, el error de l si los valores exactos son $P = 1{,}02$ seg y $g = 9{,}81$ m por segundo por segundo?, ¿cuál es el error por ciento?

18. Un sólido tiene la forma de un cilindro coronado en cada extremidad con un hemisferio cuyo radio es el del cilindro. Sus dimensiones medidas son circunferencia = 20 cm y longitud total = 25 cm. ¿Cuál es, aproximadamente, el error cometido en la medida del volumen y del área, si la cinta que se empleó en la medición se ha alargado uniformemente ½ %?

19. Suponiendo que la ecuación característica de un gas perfecto sea $vp = nRt$, en donde v = volumen, p = presión, t = temperatura absoluta, n = cantidad de gas expresada en moléculas gramo (moles) y R = una constante, ¿cuál es la relación entre las diferenciales dv, dp, dt?

Sol. $v\,dp + p\,dv = nR\,dt$.

20. Aplicando a un caso experimental el resultado del problema anterior, supóngase que hayamos encontrado $t = 300°$, $p = 10\,000$ Kg por metro cuadrado, $v = 0{,}417$ m³, $n = 16{,}39$ y $R = 0{,}8478$. Hallar el cambio de p, suponiéndolo uniforme, cuando t cambia a 301° y v a 0,420 m³.

Sol. $-38{,}6$ Kg por metro cuadrado.

229. Derivadas totales. Razones de variación. Ahora veamos el caso en que x y y no son variables independientes en la función

(1) $$u = f(x, y).$$

Supongamos, por ejemplo, que ambas son funciones de una tercera variable t, es decir,

(2) $$x = \phi(t), \quad y = \psi(t).$$

Cuando estos valores se sustituyen en (1), u se convierte en una función de una sola variable t, y su derivada puede hallarse de la manera ordinaria. Ahora tenemos

(3) $$du = \frac{du}{dt}dt, \quad dx = \frac{dx}{dt}dt, \quad dy = \frac{dy}{dt}dt.$$

La fórmula **(B)** se estableció en el supuesto de que x y y fuesen variables independientes. Fácilmente podemos demostrar que es válida igualmente en el caso presente. Con este fin, volvamos a (10) del Artículo 227 y dividamos ambos miembros por Δt. Cambiando la notación, esto puede escribirse

(4) $$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \left(\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon'\frac{\Delta y}{\Delta t}\right).$$

Ahora bien, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, también $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$. Luego (véase Art. 227),

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0, \qquad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon' = 0.$$

Por consiguiente, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, (4) se convierte en

(D) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Multiplicando ambos miembros por dt y empleando (3), obtenemos **(B)**. Es decir que **(B)** *también es válida cuando* x *y* y *son funciones de una tercera variable* t.

De la misma manera, si

$$u = f(x, y, z)$$

y si x, y, z son todas ellas funciones de t, obtenemos

(E) $$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

y así sucesivamente para cualquier número de variables.

En (D) podemos suponer $t = x$; entonces y es una función de x, y u es, en realidad, una función de la sola variable x, lo que da

$$(F) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

De la misma manera, según (E), cuando y y z son funciones de x, tenemos

$$(G) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

El lector debe observar que $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{du}{dx}$ tienen significados muy distintos. La derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x}$ se calcula con el supuesto de que *solamente varía la variable particular* x, manteniéndose fijas todas las otras variables. Pero

$$\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right),$$

siendo Δu el *incremento total de* u que resulta de los cambios *en todas las variables* causados por el cambio Δx en la variable independiente. A distinción de las derivadas parciales, $\frac{du}{dt}$ y $\frac{du}{dx}$ se llaman *derivadas totales* con respecto a t y x respectivamente.

Debe observarse que $\frac{\partial u}{\partial x}$ tiene un valor perfectamente definido para cualquier punto (x, y), mientras que $\frac{du}{dx}$ depende no sólo del punto (x, y) sino también de la dirección particular que se ha elegido para llegar a ese punto.

EJEMPLO 1. Dados $u = \operatorname{sen}\frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = t^2$; hallar $\frac{du}{dt}$.

Solución. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}$; $\frac{dx}{dt} = e^t$, $\frac{dy}{dt} = 2t$.

Sustituyendo en (D), $\frac{du}{dt} = (t-2)\frac{e^t}{t^3}\cos\frac{e^t}{t^2}$.

EJEMPLO 2. Dados $u = e^{ax}(y - z)$, $y = a \operatorname{sen} x$, $z = \cos x$, hallar $\frac{du}{dx}$.

Solución. $\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}(y - z)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{ax}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -e^{ax}$;

$\frac{dy}{dx} = a\cos x$, $\frac{dz}{dx} = -\operatorname{sen} x$.

Sustituyendo en (G),

$$\frac{du}{dx} = ae^{ax}(y-z) + ae^{ax}\cos x + e^{ax}\,\mathrm{sen}\,x = e^{ax}(a^2+1)\,\mathrm{sen}\,x.$$

NOTA. En casos como éstos, se podría hallar u explícitamente en términos de la variable independiente, por sustitución, y entonces derivarse directamente; pero, en general, este procedimiento sería más largo, y, en muchos casos, no se podría emplear.

Las fórmulas (D) y (E) son útiles en todas las aplicaciones que implican razones de variación, o rapidez de cambio, con respecto al tiempo, de funciones de dos o más variables. El procedimiento es casi el mismo que el explicado en el Artículo 52, con la excepción de que en vez de derivar con respecto a t (tercer paso) hallamos las derivadas parciales y las sustituímos en (D) o (E). Veamos esto por medio de un ejemplo.

EJEMPLO 3. La altura de un cono circular mide 100 cm y disminuye 10 cm por segundo, y el radio de la base mide 50 cm y aumenta 5 cm por segundo. ¿Cuál es la rapidez de cambio del volumen?

Solución. Sean x = radio de la base, y = altura; entonces

$$u = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \text{volumen}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{3}\pi xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}\pi x^2.$$

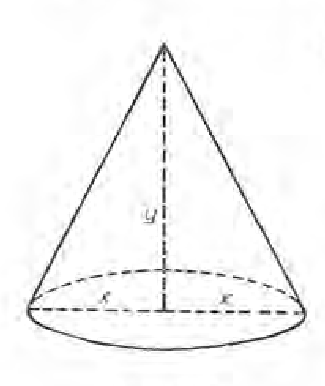


Fig. 203

Sustituyendo (D), $\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi xy\frac{dx}{dt} + \frac{1}{3}\pi x^2\frac{dy}{dt}$.

Pero $x = 50$, $y = 100$, $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = -10$.

Por tanto,

$$\frac{du}{dt} = \frac{2}{3}\pi \cdot 5\,000 \cdot 5 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2\,500 \cdot 10,$$

es decir, aumenta 26 180 cm^3 por segundo.

230. Cambio de variables. Si en

(1) $$u = f(x, y)$$

se hace un cambio de variables por medio de la transformación

(2) $$x = \phi(r, s), \quad y = \psi(r, s),$$

las derivadas parciales de u con respecto a las nuevas variables r y s pueden obtenerse por medio de (D). En efecto, si mantenemos

s fija, entonces x y y en (2) son funciones solamente de r. Luego tenemos

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

siendo ahora parciales todas las derivadas con respecto a r.

De la misma manera,

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Supongamos ahora la transformación particular

$$(5) \qquad x = x' + h, \qquad y = y' + k,$$

siendo x' y y' las nuevas variables, y h y k constantes. En este caso,

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = 1.$$

Entonces obtenemos, según (3) y (4),

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'}.$$

Luego *la transformación* (5) *no altera el valor de las derivadas parciales*.

Si los valores de x y y de (5) se sustituyen en (1), el resultado es

$$(7) \qquad u = f(x, y) = F(x', y').$$

Los resultados (6) pueden ahora escribirse

$$(8) \qquad f_x(x, y) = F_{x'}(x', y'), \quad f_y(x, y) = F_{y'}(x', y').$$

En el Artículo 229 se demostró que (B) es cierta cuando x y y son funciones de una sola variable independiente t. Ahora vamos a demostrar que (B) es igualmente válida cuando x y y son funciones de dos variables independientes r, s, como en (2). En efecto, según (B), cuando r y s son las variables independientes tenemos

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial s}ds, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial s}ds.$$

Sustituyendo estos valores en la expresión

$$(9) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

y reduciendo según (3) y (4), se obtiene

$$(10) \qquad \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial s} ds.$$

Pero según (1) y (2) u es una función de las variables independientes r y s. Por tanto, según (B), (10) es igual a du. Luego (9) también es igual a du.

Por consiguiente, (B) es válida cuando x y y son funciones de una variable independiente o de dos. De la misma manera puede demostrarse que (C) es válida cuando x, y, z son funciones de una variable independiente, de dos o de tres.

231. Derivación de funciones implícitas. La ecuación

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

define a x o y, cualquiera de las dos, como una función implícita de la otra. Representa una ecuación en x y y, en la que todos los términos se han traspuesto al primer miembro. Hagamos

$$(2) \qquad u = f(x, y);$$

entonces, según (F),

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

y y es una función arbitraria de x Ahora bien, sea y la función de x que satisface (1). Entonces $u = 0$ y $du = 0$; luego

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$, obtenemos

$$(H) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$$

Así tenemos una fórmula para derivar funciones implícitas. Esta fórmula, en la forma (3), equivale al procedimiento que se empleó en el Artículo 41 para derivar las funciones implícitas, y pueden resolverse por medio de ella todos los ejemplos de las páginas 50 y 51.

Cuando la ecuación de una curva se da en la forma (1), la fórmula (H) permite obtener fácilmente la pendiente.

EJEMPLO 1. Dada la ecuación $x^2y^4 + \operatorname{sen} y = 0$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución. Sea $f(x, y) = x^2y^4 + \operatorname{sen} y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,xy^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4\,x^2y^3 + \cos y.$$

Luego, según (H), $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2\,xy^4}{4\,x^2y^3 + \cos y}$.

EJEMPLO 2. Si x aumenta a razón de 2 cm por segundo cuando pasa por el valor $x = 3$ cm, ¿a qué razón debe variar y, cuando $y = 1$ cm, para que la función $2\,xy^2 - 3\,x^2y$ permanezca constante?

Solución. Sea $u = 2\,xy^2 - 3\,x^2y$; entonces, puesto que u debe permanecer constante, $\dfrac{du}{dt} = 0$. Sustituyendo este valor en el primer miembro de (D), trasponiendo y despejando $\dfrac{dy}{dt}$, obtenemos

$$(4) \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}\frac{dx}{dt}.$$

Además, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\,y^2 - 6\,xy, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 4\,xy - 3\,x^2.$

Ahora bien, sustituyendo en (4),

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2\,y^2 - 6\,xy}{4\,xy - 3\,x^2}\frac{dx}{dt}.$$

Pero $x = 3, \quad y = 1, \quad \dfrac{dx}{dt} = 2.$

Luego $\dfrac{dy}{dt} = -2\tfrac{2}{15}$ cm por segundo.

De igual manera, la ecuación

$$(5) \qquad F(x, y, z) = 0$$

define a z como una función implícita de las dos variables independientes x y y. Para encontrar las derivadas parciales de z con respecto a x y con respecto a y, procédase como sigue.

Sea $u = f(x, y, z)$.

Entonces, según (B),

$$du = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz,$$

y esto vale cualesquiera que sean las variables independientes (Art. 230). Ahora bien, elíjase z como aquella función de las variables independientes x y y que satisfaga (5). Entonces $u = 0$, $du = 0$, y tenemos

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Pero, según (*B*), $\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$

Sustituyendo este valor en (6) y simplificando, encontramos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy = 0.$$

Aquí dx $(= \Delta x)$ y dy $(= \Delta y)$ son incrementos independientes. Por tanto, podemos hacer $dy = 0$, $dx \neq 0$, dividir todos los términos por dx y despejar $\frac{\partial z}{\partial x}$. El resultado es

$$(I) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Procediendo de igual manera, se demuestra que

$$(J) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Las fórmulas (*I*) y (*J*) han de interpretarse como sigue: En el primer miembro de cada una, z es la función de x y y que satisface (5). En el segundo miembro, F es la función de tres variables x, y, z que se da en el primer miembro de (5).

La generalización de (*H*), (*I*), (*J*) a una función implícita u de cualquier número de variables es ahora inmediata.

EJEMPLO. La ecuación

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0.$$

define a z como una función implícita de x y y. Hallar las derivadas parciales de esta función.

Solución. $$F = \frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{6} - 1.$$

Luego, $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x}{12}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y}{6}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{z}{3}.$$

Sustituyendo en (I) y (J), obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{4z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{2z}.$$

(Compárese con el ejemplo del Artículo 226.)

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 5, hallar $\frac{du}{dt}$.

1. $u = x^2 - 3xy + 2y^2; \quad x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t.$

Sol. $\frac{du}{dt} = \operatorname{sen} 2t - 3\cos 2t.$

2. $u = x + 4\sqrt{xy} - 3y; \quad x = t^3, \quad y = \frac{1}{t}.$ $\quad \frac{du}{dt} = 3t^2 + 4 + \frac{3}{t^2}.$

3. $u = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x; \quad x = \frac{1}{2}t, \quad y = 2t.$

Sol. $\frac{du}{dt} = e^{\frac{1}{2}t}(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t) + e^{2t}(2\operatorname{sen} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cos \frac{1}{2}t).$

4. $u = 2x^2 - xy + y^2; \quad x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} t.$

5. $u = xy + yz + zx; \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = e^t, \quad z = e^{-t}.$

En los problemas 6 a 10, hallar $\frac{dy}{dx}$ aplicando la fórmula (H).

6. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$

Sol. $\frac{dy}{dx} = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}.$

7. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$

8. $e^x \operatorname{sen} y - e^y \cos x = 1.$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{e^y \operatorname{sen} x + e^x \operatorname{sen} y}{e^y \cos x - e^x \cos y}.$

9. $x^4 - x^2y^2 - x^2 + 2y^2 = 8.$

10. $Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4 = (x^2 + y^2)^2.$

En los problemas 11 a 15, verificar que los valores dados de x y y satisfacen la ecuación, y hallar el valor correspondiente de $\frac{dy}{dx}$.

11. $x^2 + 2xy + 2y = 22$; $x = 2$, $y = 3$. *Sol.* $\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{3}$.

12. $x^3 - y^3 + 4xy = 0$; $x = 2$, $y = -2$. $\frac{dy}{dx} = 1$.

13. $Ax + By + Ce^{xy} = C$; $x = 0$; $y = 0$. $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$.

14. $2x - \sqrt{2xy} + y = 4$; $x = 2$, $y = 4$.

15. $e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x = 1$; $x = 0$, $y = 0$.

En los problemas 16 a 20, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

16. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$. *Sol.* $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Ax}{Cz}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{By}{Cz}$.

17. $Axy + Byz + Czx = D$. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{Ay + Cz}{Cx + By}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Ax+Bz}{Cx+By}$.

18. $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 10$.

Sol. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz - \sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz} - xy}$.

19. $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$.

20. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx = G$.

21. Un punto se mueve sobre la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ y el plano $y = 2$. Cuando x es 6 y aumenta 4 unidades por segundo, hallar: *a*) a razón de cuántas unidades por segundo z cambia; *b*) con qué rapidez se mueve el punto.

Sol. *a*) 8 unidades por segundo; *b*) $4\sqrt{5}$ unidades por segundo.

22. Un punto se mueve sobre la curva de intersección de la superficie $x^2 + xy + y^2 - z^2 = 0$ y el plano $x - y + 2 = 0$. Cuando x es 3 y aumenta 2 unidades por segundo, hallar: *a*) a qué razón y cambia; *b*) a qué razón z cambia; *c*) con qué rapidez se mueve el punto.

Sol. *a*) 2 unidades por segundo; *b*) $^{25}/_{7}$ unidades por segundo; *c*) 4,44 unidades por segundo.

23. La "ecuación de estado" de un gas perfecto es $nR\theta = pv$, siendo n la cantidad (moles) de gas, θ la temperatura, p la presión, v el volumen y R una constante. En cierto instante 118 moles de gas tienen un volumen de 0,5 m³ y están bajo una presión de 80 000 Kg por m². Si $R = 0,8478$, hallar la temperatura y la rapidez de cambio de la temperatura si el volumen aumenta a razón de 0,001 m³ por segundo y la presión disminuye a razón 100 Kg por m² por segundo. *Sol.* La temperatura aumenta 0,3 grados por segundo.

24. Un triángulo ABC se transforma de manera que el ángulo A aumenta, a razón constante, de 0° a 90° en 10 segundos, mientras que el lado AC disminuye 1 cm por segundo y el lado AB aumenta 1 cm por segundo. Si al tiempo de una observación $A = 60°$, $AC = 16$ cm y $AB = 10$ cm, *a*) ¿cómo varía BC? *b*) ¿cómo cambia el área de ABC?

Sol. *a*) 0,911 cm por segundo; *b*) 8,88 cm² por segundo.

232. Derivadas de orden superior. Si

$$u = f(x, y), \tag{1}$$

entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y(x, y) \tag{2}$$

son también funciones de x y y, y pueden a su vez derivarse. Así, tomando la primera función y derivando, tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = f_{yx}(x, y). \tag{3}$$

De la misma manera, de la segunda función en (2) obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = f_{xy}(x, y), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y). \tag{4}$$

Al parecer, en (3) y (4) hay cuatro derivadas de segundo orden. Pero más adelante demostraremos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \tag{K}$$

con tal que las derivadas sean continuas. Es decir, *no importa el cambio de orden al derivar sucesivamente con respecto a* x *y* y. Así, $f(x, y)$ tiene sólo tres derivadas parciales de segundo orden, a saber

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y). \tag{5}$$

Esto puede fácilmente extenderse a las derivadas superiores. Por ejemplo, puesto que (K) es cierto,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y\, \partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2}.$$

Resultados semejantes valen para funciones de tres o más variables.

EJEMPLO. Dado $u = x^3y - 3\,x^2y^3$; verificar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

Solución. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 3\,x^2y - 6\,xy^3$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 3\,x^2 - 18\,xy^2$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 9\,x^2y^2$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 3\,x^2 - 18\,xy^2$.

Luego la fórmula queda verificada.

Demostración de (*K*). Consideremos la expresión

$$(6)\qquad F = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y + \Delta y) + f(x,\ y).$$

Introduzcamos la función

$$(7)\qquad \phi(u) = f(u,\ y + \Delta y) - f(u,\ y),$$

en donde u es una variable auxiliar. Entonces

$$\phi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x + \Delta x,\ y),$$

$$(8)\qquad \phi(x) = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Luego (6) puede escribirse

$$(9)\qquad F = \phi(x + \Delta x) - \phi(x).$$

Aplicando el teorema del valor medio, (*D*) del Artículo 116, resulta

$$(10)\qquad F = \Delta x\,\phi'(x + \theta_1\,\Delta x). \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

$$[f(x) = \phi(u),\ a = x,\ \Delta a = \Delta x.]$$

El valor de $\phi'(x + \theta_1\,\Delta x)$ se obtiene de (8) tomando la derivada parcial con respecto a x y reemplazando x por $x + \theta_1\,\Delta x$. Así (10) se convierte en

$$(11)\qquad F = \Delta x(f_x(x + \theta_1\,\Delta x,\ y + \Delta y) - f_x(x + \theta_1\,\Delta x,\ y)).$$

Aplicando ahora de nuevo (*D*) del Artículo 116 a $f_x(x + \theta_1\,\Delta x,\ v)$, considerando a v como la variable independiente, resulta

$$(12)\qquad F = \Delta x\,\Delta y\,f_{yx}(x + \theta_1\,\Delta x,\ y + \theta_2\,\Delta y). \qquad (0 < \theta_2 < 1)$$

Si se permutan los segundo y tercero términos del segundo miembro de (6), un procedimiento semejante dará

$$F = \Delta y \, \Delta x \, f_{xy}(x + \theta_3 \, \Delta x, \ y + \theta_4 \, \Delta y). \tag{13}$$
$$(0 < \theta_3 < 1, \ 0 < \theta_4 < 1)$$

Luego, según (12) y (13),

$$f_{yx}(x + \theta_1 \, \Delta x, \ y + \theta_2 \, \Delta y) = f_{xy}(x + \theta_3 \, \Delta x, \ y + \theta_4 \, \Delta y). \tag{14}$$

Tomando el límite de ambos miembros cuando Δx y Δy tienden a cero, tenemos

$$f_{yx}(x, \ y) = f_{xy}(x, \ y), \tag{15}$$

puesto que estas funciones se suponen continuas.

PROBLEMAS

Hallar las segundas derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x, \ y) = Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2$.

   Sol. $f_{xx}(x, \ y) = 2\,A$; $f_{xy}(x, \ y) = 2\,B$; $f_{yy}(x, \ y) = 2\,C$.

2. $f(x, \ y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3$.

   Sol. $f_{xx}(x, \ y) = 6\,Ax + 2\,By$; $f_{xy}(x, \ y) = 2\,Bx + 2\,Cy$; $f_{yy}(x, \ y) = 2\,Cx + 6\,Dy$.

3. $f(x, \ y) = Ax + By + Ce^{xy}$.

   Sol. $f_{xx}(x, \ y) = Cy^2e^{xy}$; $f_{xy} = C(1 + xy)\,e^{xy}$; $f_{yy}(x, \ y) = Cx^2e^{xy}$.

4. $f(x, \ y) = \dfrac{Ax + By}{Cx + Dy}$.

5. $f(x, \ y) = x^2 \cos y + y^2 \operatorname{sen} x$.

6. Si $f(x, \ y) = x^3 + 3\,x^2y + 6\,xy^2 - y^3$, demostrar que

   $$f_{xx}(2, \ 3) = 30, \quad f_{xy}(2, \ 3) = 48, \quad f_{yy}(2, \ 3) = 6.$$

7. Si $f(x, \ y) = x^4 - 4\,x^3y + 8\,xy^3 - y^4$, demostrar que

   $$f_{xx}(2, \ -1) = 96, \quad f_{xy}(2, \ -1) = -24, \quad f_{yy}(2, \ -1) = -108.$$

8. Si $f(x, \ y) = 2\,x^4 - 3\,x^2y^2 + y^4$, hallar los valores de

   $$f_{xx}(2, \ -2), \quad f_{xy}(2, \ -2), \quad f_{yy}(2, \ -2).$$

9. Si $u = Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Dxy^3 + Ey^4$, verificar los siguientes resultados.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 24\,Ax + 6\,By, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = 6\,Bx + 4\,Cy.$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = 4\,Cx + 6\,Dy. \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6\,Dx + 24\,Ey.$$

10. Si $u = (ax^2 + by^2 + cz^2)^3$, demostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}.$$

11. Si $u = \dfrac{xy}{x+y}$, demostrar que $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

12. Si $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

13. Si $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$

PROBLEMAS ADICIONALES

1. La sección vertical central de una colina circular tiene la forma de la curva cuya ecuación es $x^2 + 160\,y - 1\,600 = 0$, en donde la unidad es 1 m. La parte superior se quita en capas horizontales a la razón constante de 100 m^3 por día. ¿A qué razón aumenta el área de la sección transversal horizontal cuando la cumbre se ha rebajado 4 m verticalmente? *Sol.* 25 m^2 por día.

2. Si $u = \dfrac{e^{xy}}{e^x + e^y}$, demostrar que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = (x + y - 1)\,u.$

3. Si $u = \dfrac{1}{r}$, en donde, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{r^4}.$$

4. Si $z = x^2 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$

5. Si $u = z \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$, demostrar que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = = 0.$$

6. Si $u = \ln\,(e^x + e^y + e^z)$, demostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 2\;e^{x+y+z-3\,u}.$$

7. Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sen}\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

8. Sea $u = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^k$. ¿Qué valores de k satisfarán la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$? *Sol.* $k = 1 - \dfrac{n}{2}$ $(n > 2)$.

CAPITULO XXIV

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS PARCIALES

233. **Envolvente de una familia de curvas.** Por regla general, la ecuación de una curva contiene, además de las variables x y y, ciertas constantes, de las cuales dependen el tamaño, la forma y la posición de la curva particular. Por ejemplo, el lugar geométrico representado por la ecuación

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

es una circunferencia cuyo centro está en el eje de las x a la distancia α del origen, y cuyo tamaño depende del radio r. Si suponemos que α toma varios valores mientras que r se mantiene fijo, entonces tendremos una serie correspondiente de círculos de igual radio que diferirán en sus distancias del origen, tal como se muestra en la figura 204.

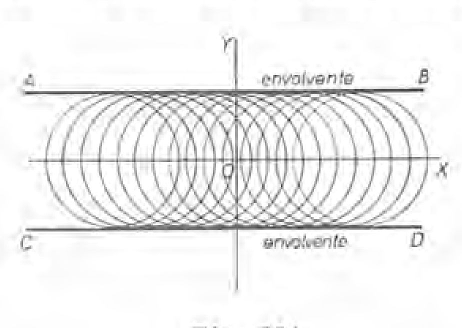


Fig. 204

Un sistema de curvas formado de esta manera se llama una *familia de curvas*, y la cantidad α, que es constante para cualquiera curva individual, pero cambia al pasar de una curva a otra, se llama un *parámetro variable*. A fin de indicar que α entra como parámetro variable, es usual incluirle en el símbolo de la función así:

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Las curvas de una familia pueden ser tangentes a una misma curva o a un mismo grupo de curvas, como en la figura 204. En ese caso se da el nombre de *envolvente* de la familia a la curva o al grupo de curvas. Ahora vamos a explicar un método para hallar la ecuación de la envol-

vente de una familia de curvas. Supongamos que la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$(1) \qquad x = \phi(\alpha), \quad y = \psi(\alpha)$$

sea tangente a cada curva de la familia

$$(2) \qquad f(x, y, \alpha) = 0,$$

siendo el parámetro α el mismo en ambos casos. Para cualquier valor de α las ecuaciones (1) satisfarán (2). Por tanto, según (*E*) del Artículo 229, puesto que $u = f(x, y, \alpha)$, $du = df = 0$ y z se reemplaza por α, tenemos

$$(3) \quad f_x(x, y, \alpha)\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) + f_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

La pendiente de (1) en un punto cualquiera es

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)}, \qquad (A), \text{ Art. } 81$$

y la pendiente de (2) en un punto cualquiera es

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}. \qquad (H), \text{ Art. } 231$$

Luego, si las curvas (1) y (2) son tangentes, las pendientes en un punto de tangencia serán iguales, lo que dará

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = -\frac{f_x(x, y, \alpha)}{f_y(x, y, \alpha)}, \text{ o sea,}$$

$$(6) \qquad f_x(x, y, \alpha)\phi'(\alpha) + f_y(x, y, \alpha)\psi'(\alpha) = 0.$$

Comparando (6) y (3), encontramos

$$(7) \qquad f_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

Luego las coordenadas del punto de tangencia satisfacen a las ecuaciones

$$(8) \qquad f(x, y, \alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f_\alpha(x, y, \alpha) = 0;$$

es decir, que las ecuaciones paramétricas de la envolvente, en el caso de que exista, pueden obtenerse resolviendo estas ecuaciones con respecto a x y y en función del parámetro α.

Regla general para hallar las ecuaciones paramétricas de la envolvente

PRIMER PASO. *Se escribe la ecuación de la familia de curvas en la forma* $f(x, y, \alpha) = 0$, *y se deduce la ecuación* $f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$.

SEGUNDO PASO. *Se resuelve el sistema formado por estas ecuaciones con respecto a* x *y* y *en función del parámetro* α.

La ecuación cartesiana puede hallarse o bien eliminando α entre las ecuaciones (8) o bien de las ecuaciones paramétricas (Art. 81).

EJEMPLO 1. En el caso de la familia de circunferencias dada al principio de este artículo tenemos:

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Por tanto, $f_\alpha(x, y, \alpha) = (x - \alpha) = 0.$

Eliminando α, el resultado es $y^2 - r^2 = 0$, o sea, $y = r$, $y = -r$, y éstas son las ecuaciones de las rectas AB y CD de la figura 204.

EJEMPLO 2. Hallar la envolvente de la familia de líneas rectas

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p,$$

siendo α el parámetro variable.

Solución.

(9) $f(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0.$

Primer paso. Derivando con respecto a α,

(10) $f_\alpha(x, y, \alpha) = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha = 0.$

Segundo paso. Multiplicando (9) por $\cos \alpha$ y (10) por $\operatorname{sen} \alpha$ y restando, obtenemos

$$x = p \cos \alpha.$$

Fig. 205

De igual manera, eliminando x entre (9) y (10),

$$y = p \operatorname{sen} \alpha.$$

Luego *las ecuaciones paramétricas de la envolvente* son

$$(11) \qquad \begin{cases} x = p \cos \alpha, \\ y = p \operatorname{sen} \alpha, \end{cases}$$

siendo α el parámetro. Elevando al cuadrado las ecuaciones (11), y sumando, obtenemos

$$x^2 + y^2 = p^2,$$

que es la ecuación cartesiana de la envolvente, y representa una circunferencia

EJEMPLO 3. Hallar la envolvente de un segmento de longitud constante a, cuyos extremos se mueven a lo largo de dos ejes rectangulares fijos.

Solución. Sea AB (fig. 206) el segmento dado, de longitud a, y sea

(12) $$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha - p = 0$$

su ecuación. Ahora bien, cuando AB se mueve, variarán tanto α como p Pero p puede hallarse en función de α. En efecto,

$$AO = AB \cos \alpha = a \cos \alpha$$

y además $p = AO \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \alpha \cos \alpha$. Sustituyendo en (12), obtenemos

(13) $$x \cos \alpha + y \text{ sen } \alpha - a \text{ sen } \alpha \cos \alpha = 0,$$

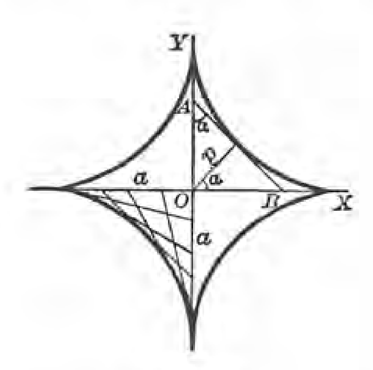


Fig. 206

en donde, α es el parámetro variable. Esta ecuación es de la forma

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Derivando con respecto a α, la ecuación $f_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ es

(14) $$-x \text{ sen } \alpha + y \cos \alpha + a \text{ sen}^2 \alpha - a \cos^2 \alpha = 0.$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (13) y (14) con respecto a x y y en función de α, se obtiene:

(15) $$\begin{cases} x = a \text{ sen}^3 \alpha, \\ y = a \cos^3 \alpha, \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la envolvente, que es una hipocicloide. La ecuación cartesiana correspondiente se halla a partir de las ecuaciones (15), eliminando α como sigue:

$$x^{2/3} = a^{2/3} \text{ sen}^2 \alpha,$$

$$y^{2/3} = a^{2/3} \cos^2 \alpha.$$

Sumando. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, que es la ecuación cartesiana de la hipocicloide.

Se presentan muchos problemas en los cuales conviene emplear dos parámetros relacionados por una ecuación de condición. En este caso

se puede eliminar un parámetro utilizando la ecuación de condición y la ecuación de la familia de curvas. Sin embargo, es mejor, muchas veces, proceder como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4. Hallar la envolvente de la familia de elipses cuyos ejes coinciden y cuya área es constante.

Solución.

(16) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación de la elipse, en donde a y b son los parámetros variables relacionados por la ecuación

(17) $$\pi ab = k,$$

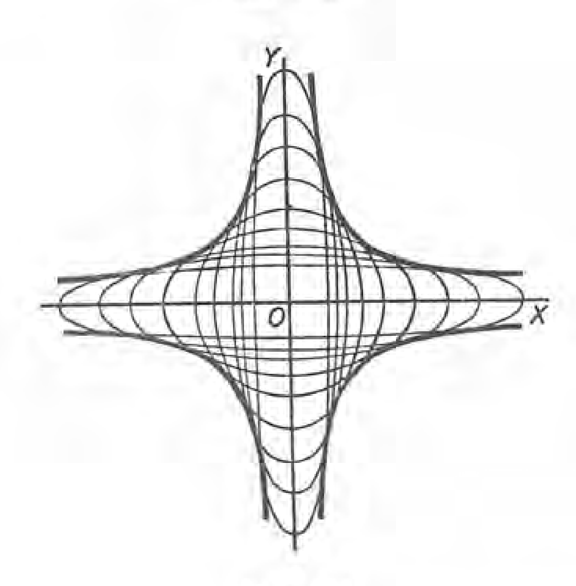


Fig. 207

siendo πab el área de una elipse de semiejes a y b. Derivando, considerando a y b como variables y x y y como constantes, tenemos, empleando diferenciales,

$$\frac{x^2\,da}{a^3} + \frac{y^2\,db}{b^3} = 0, \quad \text{según (16)},$$

y

$$b\,da + a\,db = 0, \quad \text{según (17)}.$$

Trasponiendo un término de cada ecuación al segundo miembro y dividiendo, el resultado es

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}.$$

Por consiguiente, empleando (16),

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

de donde

$$a = \pm x\sqrt{2} \quad \text{y} \quad b = \pm y\sqrt{2}.$$

Sustituyendo estos valores en (17), obtenemos la ecuación de la envolvente $xy = \pm \frac{k}{2\pi}$, que representa un par de hipérbolas equiláteras conjugadas (figura 207).

234. La evoluta de una curva dada considerada como la envolvente de sus normales. Puesto que las normales de una curva son todas ellas tangentes a la evoluta (Art. 110), es evidente que *la evoluta de una curva puede definirse como la envolvente de sus normales*. También es interesante advertir que si hallamos por el método del artículo anterior las ecuaciones paramétricas de la envolvente, obtenemos las coordenadas x y y del centro de curvatura; de modo que aquí tenemos *un segundo método para hallar las coordenadas del centro de curvatura*. Si eliminamos el parámetro variable, obtenemos la ecuación cartesiana de la evoluta.

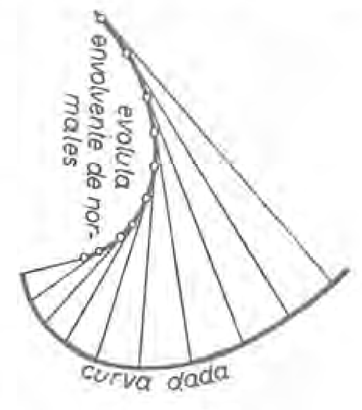


Fig. 208

EJEMPLO. Hallar la evoluta de la parábola $y^2 = 4\,px$ considerada como la envolvente de sus normales.

Solución. La ecuación de la normal en un punto cualquiera (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2\,p}(x - x_1),$$

según (2), Art. 43. Puesto que consideramos las normales a lo largo de la curva, x_1 y y_1 variarán. Eliminando x_1 por medio de $y_1{}^2 = 4\,px_1$, se obtiene para ecuación de la normal

$$(1) \qquad y - y_1 = \frac{y_1{}^3}{8\,p^2} - \frac{xy_1}{2\,p}, \quad \text{o sea,} \quad xy_1 + 2\,py - 2\,py_1 - \frac{y_1{}^3}{4\,p} = 0.$$

Igualando a cero la derivada parcial del primer miembro con respecto al parámetro y_1, y despejando x, resulta

$$(2) \qquad x = \frac{3\,y_1{}^2 + 8\,p^2}{4\,p}.$$

Sustituyendo este valor de x en (1) y despejando y, se obtiene

$$(3) \qquad y = -\frac{y_1{}^3}{4\,p^2}.$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las coordenadas del centro de curvatura de la parábola. Juntas, son las ecuaciones paramétricas de la evoluta en función del parámetro y_1. Eliminando y_1 obtenemos

$$27\ py^2 = 4\,(x - 2\ p)^3,$$

que es la ecuación cartesiana de la evoluta de la parábola. Este resultado es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 1 del Artículo 109 por el primer método.

PROBLEMAS

Hallar las envolventes de los siguientes sistemas de líneas rectas, y trazar las gráficas correspondientes.

1. $y = mx + m^2$. *Sol.* $x^2 + 4\ y = 0$.

2. $y = \dfrac{x}{m} + m^2$. $27\ x^2 = 4\ y^3$.

3. $y = m^2x - 2\ m^3$. $27\ y = x^3$.

4. $y = 2\ mx + m^4$. $16\ y^3 + 27\ x^4 = 0$.

5. $y = tx - t^2$. 6. $y = t^2x + t$. 7. $y = mx - 2\ m^2$.

Hallar las envolventes de los siguientes sistemas de circunferencias, y trazar las gráficas.

8. $(x - c)^2 + y^2 = 4\ c$. *Sol.* $y^2 = 4\ x + 4$.

9. $x^2 + (y - t)^2 = 2\ t$. 10. $(x - t)^2 + (y + t)^2 = t^2$.

Hallar las envolventes de los siguientes sistemas de parábolas.

11. $y^2 = c\,(x - c)$. *Sol.* $2\ y = \pm\ x$.

12. $cy^2 = 1 - c^2x$.

13. Hallar la evoluta de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, tomando la ecuación de la normal en la forma $by = ax \operatorname{tg} \phi - (a^2 - b^2) \operatorname{sen} \phi$, siendo el parámetro el ángulo excéntrico ϕ.

Sol. $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \phi$, $y = \dfrac{b^2 - a^2}{b} \operatorname{sen}^3 \phi$; o
$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

14. Hallar la evoluta de la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, cuya normal tiene por ecuación $y \cos \tau - x \operatorname{sen} \tau = a \cos 2\,\tau$, siendo τ el parámetro.

Sol. $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2\ a^{2/3}$.

15. Hallar la envolvente de las circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros en la hipérbola $x^2 - y^2 = c^2$

Sol. La lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 4\ c^2(x^2 - y^2)$.

16. Hallar la envolvente de una línea tal que la suma de su abscisa al origen y su ordenada al origen (intersecciones con los ejes coordenados) es igual a c.

Sol. La parábola $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = c^{\frac{1}{2}}$.

17. Hallar la envolvente de la familia de elipses $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ cuando la suma de sus semiejes es igual a c. *Sol.* La hipocicloide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$.

18. Se disparan proyectiles con un cañón con velocidad inicial v_0. Suponiendo que al cañón pueda dársele una elevación cualquiera y que se mantenga siempre en el mismo plano vertical, y despreciando la resistencia del aire, ¿cuál es la envolvente de todas las trayectorias posibles?

SUGESTIÓN. La ecuación de cualquiera trayectoria es

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2\,v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

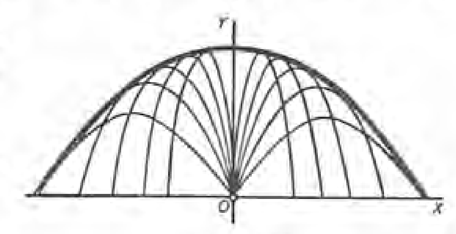


Fig. 209

siendo α el parámetro variable. *Sol.* La parábola $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2\,v_0^2}$.

19. Si la familia de curvas

$$t^2 f(x,\ y) + t g(x,\ y) + h(x,\ y) = 0$$

tiene envolvente, demostrar que

$$[g(x,\ y)]^2 - 4\,f(x,\ y)\ h(x,\ y) = 0.$$

235. Ecuaciones de la tangente y del plano normal a una curva alabeada. El estudiante está ya acostumbrado a la representación paramétrica de una curva plana (Artículo 81). A fin de extender esta noción a las curvas alabeadas, supongamos que las coordenadas de un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de una curva alabeada vienen dadas como funciones de una tercera variable que designaremos por t; así,

$$(1) \quad x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

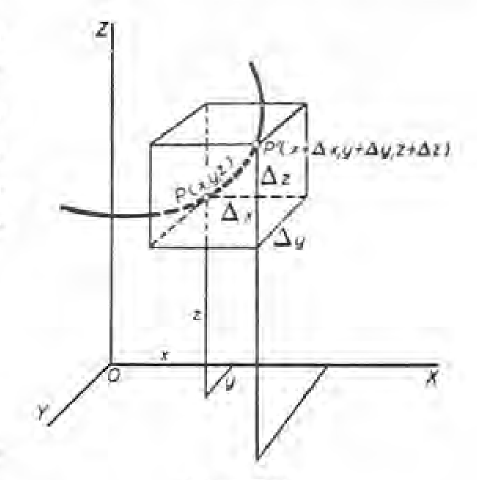


Fig. 210

La eliminación del parámetro t entre estas ecuaciones, tomadas dos a dos, nos dará las ecuaciones de las intersecciones de los cilindros proyectores de la curva con los planos de coordenadas.

Hagamos corresponder el punto $P(x, y, z)$ al valor t del parámetro, y el punto $P'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ al valor $t + \Delta t$, siendo Δx, Δy, Δz los incrementos de x, y, z originados por el incremento Δt, encontrados según las ecuaciones (1). Según lo estudiado en Geometría analítica del espacio sabemos que los cosenos directores de la secante (diagonal) PP' son proporcionales a

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z,$$

o sea, dividiendo estos incrementos por Δt y denotando los ángulos directores de la secante por α' β' γ',

$$(2) \qquad \frac{\cos \alpha'}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\cos \beta'}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{\cos \gamma'}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Ahora bien, hágase que P' se aproxime a P a lo largo de la curva. Entonces, Δt y, por consiguiente, también Δx, Δy, Δz, tenderán a cero, y la secante PP' tendrá como posición límite a la tangente a la curva en P.

Ahora bien, $\displaystyle \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \phi'(t)$, etc.

Por tanto, para la tangente,

$$(A) \qquad \frac{\cos \alpha}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos \beta}{\frac{dy}{dt}} = \frac{\cos \gamma}{\frac{dz}{dt}}.$$

Cuando el punto de contacto es $P_1(x_1, y_1, z_1)$, empleamos la notación

$$(3) \qquad \left|\frac{dx}{dt}\right|_1 = \text{valor de } \frac{dx}{dt} \text{ cuando } x = x_1, \ y = y_1, \ z = z_1,$$

y notación análoga para las otras derivadas.

Luego, según (2) y (4) del Artículo 4, tenemos el siguiente resultado:

Las ecuaciones de la tangente a la curva cuyas ecuaciones son

$$(1) \qquad x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *son*

$$(B) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\frac{dx}{dt}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\frac{dy}{dt}\right|_1} = \frac{z - z_1}{\left|\frac{dz}{dt}\right|_1}.$$

El *plano normal* a una curva alabeada en un punto $P_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ es el plano que pasa por P_1 y es perpendicular a la tangente en P_1. Los denominadores en (*B*) son los parámetros directores (o números directores) de la tangente en P_1. De aquí tenemos el siguiente resultado:

La ecuación del plano normal a la curva (1) *en el punto* $P_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ *es*

$$(C)\qquad \left|\frac{dx}{dt}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{dy}{dt}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{dz}{dt}\right|_1 (z - z_1) = 0.$$

EJEMPLO. Hallar las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal a la hélice circular (siendo θ el parámetro)

$$(4)\qquad \begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \operatorname{sen} \theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

a) en un punto cualquiera $(x_1,\ y_1,\ z_1)$; *b*) cuando $\theta = 2\pi$.

Solución. $\dfrac{dx}{d\theta} = -a \operatorname{sen} \theta = -y,\quad \dfrac{dy}{d\theta} = a \cos \theta = x,\quad \dfrac{dz}{d\theta} = b.$

Sustituyendo en (*B*) y (C), obtenemos, para el punto $(x_1,\ y_1,\ z_1)$,

$$(5)\qquad \frac{x - x_1}{-y_1} = \frac{y - y_1}{x_1} = \frac{z - z_1}{b},$$

para ecuaciones de la tangente, y

$$-y_1(x - x_1) + x_1(y - y_1) + b(z - z_1) = 0,$$

para ecuación del plano normal.

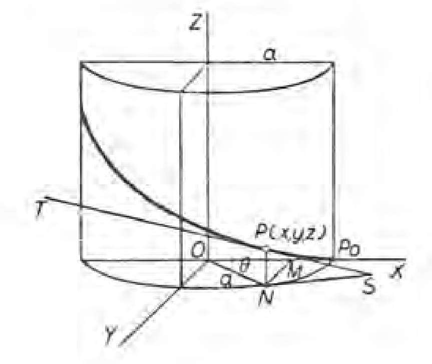


Fig. 211

Cuando $\theta = 2\pi$, las coordenadas del punto de la curva son $(a,\ 0,\ 2\,b\pi)$, lo que da

$$\frac{x - a}{0} = \frac{y - 0}{a} = \frac{z - 2\,b\pi}{b},\quad \text{o sea,}\quad x = a,\quad by = az - 2\,ab\pi,$$

para ecuaciones de la tangente, y

$$ay + bz - 2\,b^2\pi = 0,$$

para ecuación del plano normal.

OBSERVACIÓN. Con respecto a la tangente (5) tenemos, según (2) y (4) del Artículo 4,

$$\cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{una constante.}$$

Es decir, que la hélice corta bajo el mismo ángulo a todas las generatrices del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

236. Longitud de un arco de curva alabeada. Según la figura 211, tenemos

$$(1) \qquad \frac{(\text{Cuerda } PP')^2}{\Delta t^2} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2.$$

Sea arc $PP' = \Delta s$. Procediendo como en el Artículo 95, puede demostrarse fácilmente que

$$(2) \qquad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

De esto obtenemos

$$(D) \qquad s = \int_{t_0}^{t_1} (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}},$$

en donde $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, como en (1) del Artículo 235.

Ahora se puede dar a los cosenos directores de la tangente una forma sencilla. En efecto, de la ecuación (2), empleando (*A*) del Artículo 235 y las fórmulas (2) del Artículo 4, tenemos

$$(3) \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

EJEMPLO. Hallar la longitud del arco de la curva alabeada de tercer grado

$$(4) \qquad x = t, \quad y = \tfrac{1}{2} t^2, \quad z = \tfrac{1}{3} t^3$$

entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 4$.

Solución. Diferenciando (4), obtenemos

$$dx = dt, \quad dy = t\,dt, \quad dz = t^2\,dt.$$

Sustituyendo en (*D*), resulta

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + t^2 + t^4}\,dt = 23{,}92,$$

aproximadamente, según la regla de Simpson, haciendo $n = 8$.

PROBLEMAS

Hallar las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal a cada una de las siguientes curvas alabeadas en el punto indicado.

1. $x = at$, $y = bt^2$, $z = ct^3$; $t = 1$.

Sol. $\dfrac{x - a}{a} = \dfrac{y - b}{2b} = \dfrac{z - c}{3c}$; $\quad ax + 2by + 3cz = a^2 + 2b^2 + 3c^2$.

2. $x = 2t,\quad y = t^2,\quad z = 4t^4;\quad t = 1.$

Sol. $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{16};\quad x + y + 8z = 35.$

3. $x = t^2 - 1,\quad y = t + 1,\quad z = t^3;\quad t = 2.$

Sol. $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-8}{12};\quad 4x + y + 12z = 111.$

4. $x = t^3 - 1,\quad y = t^2 + t,\quad z = 4t^3 - 3t + 1;\quad t = 1.$

Sol. $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-2}{9};\quad x + y + 3z = 8.$

5. $x = 2t - 3,\quad y = 5 - t^2,\quad z = \dfrac{2}{t};\quad t = 2.$

6. $x = a\cos t,\quad y = b \operatorname{sen} t,\quad z = t;\quad t = \frac{1}{6}\pi.$

7. $x = t,\quad y = e^t,\quad z = e^{-t};\quad t = 0.$

8. $x = \cos t,\quad y = \operatorname{sen} t,\quad z = \operatorname{tg} t;\quad t = 0.$

9. Hallar la longitud del arco de la hélice circular

$$x = a\cos\theta,\quad y = a \operatorname{sen}\theta,\quad z = b\theta$$

entre los puntos correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

Sol. $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$

10. Hallar la longitud del arco de la curva

$$x = 3\theta\cos\theta,\quad y = 3\theta \operatorname{sen}\theta,\quad z = 4\theta$$

entre los puntos correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = 4$.

Sol. $26 + \dfrac{25}{6}\ln 5 = 32.70.$

11. Hallar la longitud del arco de la curva

$$x = 2t,\quad y = t^2 - 2,\quad z = 1 - t^2$$

entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 2$.

12. Dadas las dos curvas

(5) $\qquad x = t,\quad y = 2t^2,\quad z = -\dfrac{1}{t};$

(6) $\qquad x = 1 - \theta,\quad y = 2\cos\theta,\quad z = \operatorname{sen}\theta - 1.$

a) Demostrar que las dos curvas se cortan en el punto A (1, 2, −1).

b) Hallar los cosenos directores de la tangente a la curva (5) en el punto A.

Sol. $\dfrac{1}{\sqrt{18}},\quad \dfrac{4}{\sqrt{18}},\quad \dfrac{1}{\sqrt{18}}.$

c) Hallar los cosenos directores de la tangente a (6) en A.

d) Hallar el ángulo de intersección de las curvas en A. *Sol.* 90°.

13. Dadas las dos curvas

$$x = 2 - t, \quad y = t^2 - 4, \quad z = t^3 - 8;$$
$$x = \operatorname{sen} \theta, \quad y = \theta, \quad z = 1 - \cos \theta.$$

a) Demostrar que las dos curvas se cortan en el origen O.

b) Hallar los cosenos directores de la tangente a cada curva en O.

c) Hallar el ángulo de intersección de las curvas en O.

14. *a*) Si OF, OE, ON de la figura 197 se eligen como ejes de coordenadas OX, OY, OZ, respectivamente, y si $P(x, y, z)$ es un punto de la esfera, demostrar que $x = a \cos \phi \operatorname{sen} \theta$, $y = a \cos \phi \cos \theta$, $z = a \operatorname{sen} \phi$, si ϕ y θ son, respectivamente, la latitud y longitud de P.

b) Empleando (3), y (3) del Artículo 4, hallar el ángulo α en P que forman el paralelo que pasa por P y una curva sobre la esfera para la que $\theta = f(\phi)$.

Sol. $\operatorname{tg} \alpha = \sec \phi \dfrac{d\phi}{d\theta}$, como en el Art. 222.

237. Ecuaciones de la normal y del plano tangente a una superficie. Se dice que una recta es *tangente a una superficie* en un punto P si es la posición límite de una secante que pasa por P y un punto vecino P' de la superficie, cuando P' tiende a P a lo largo de una curva trazada sobre la superficie. Ahora vamos a establecer un teorema de importancia fundamental.

Teorema. *Todas las tangentes a una superficie en uno de sus puntos están en un plano.*

Demostración. Sea

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

la ecuación de la superficie dada, y sea $P(x, y, z)$ un punto de la superficie. Si ahora hacemos que P' tienda a P a lo largo de una curva C situada sobre la superficie y que pasa por P y P', entonces, por definición, la secante se aproxima a la posición de una tangente a la curva C en P. Sean las ecuaciones de la curva C

$$(2) \qquad x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

Entonces la ecuación (1) debe satisfacerse idénticamente para estos valores. Por tanto, si $u = F(x, y, z)$, entonces $u = 0$, $du = 0$, y según (*E*) del Artículo 229,

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0.$$

Esta ecuación (véase (3) del Art. 4) demuestra que la tangente a (2), cuyos cosenos directores son proporcionales a

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

es perpendicular a una recta cuyos cosenos directores son proporcionales a

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}. \qquad \text{Según (3) del Art. 4}$$

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto de la superficie, y sean

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1$$

los valores de las derivadas parciales (4) cuando

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

La recta que pasa por P_1 y tiene por números directores (5) se llama la línea *normal* a la superficie en P_1. De esta definición tenemos el siguiente resultado:

Las ecuaciones de la normal a la superficie

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

en $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *son*

$$(E) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1} = \frac{z - z_1}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1}.$$

Este razonamiento muestra que *todas* las tangentes a la superficie (1) en P_1 son perpendiculares a la normal en P_1. Luego están en un plano. Así queda demostrado el teorema.

Este plano se llama el *plano tangente* en P_1.

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado.

La ecuación del plano tangente a la superficie (1) *en el punto de contacto* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *es*

$$(F) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0.$$

OBSERVACIÓN. Si todos los denominadores en (E) se anulan, la normal y el plano tangente son indeterminados. Tales puntos se llaman *puntos singulares*, y no se estudian aquí.

En caso de que la ecuación de la superficie se dé en la forma $z = f(x, y)$, sea

$$(6) \qquad F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0.$$

$$\text{Entonces} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

De esto, según **(*E*)**, tenemos el siguiente resultado.

Las ecuaciones de la normal a la superficie $z = f(x, y)$ *en* (x_1, y_1, z_1) *son*

$$(G) \qquad \frac{x - x_1}{\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1} = \frac{y - y_1}{\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1} = \frac{z - z_1}{-1}.$$

Además, según **(*F*)** obtenemos

$$(H) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) - (z - z_1) = 0,$$

luego ésta es *la ecuación de un plano tangente en* (x_1, y_1, z_1) *a una superficie cuya ecuación viene dada en la forma* $z = f(x, y)$.

238. Interpretación geométrica de la diferencial total. Ahora estamos preparados para interpretar geométricamente la fórmula **(*B*)** del Artículo 227, de modo análogo a lo hecho en el Artículo 91.

Consideremos la surperficie

$$(1) \qquad z = f(x, y),$$

y el punto (x_1, y_1, z_1) de ella. Entonces la diferencial total de (1) es, cuando

$$x = x_1, \quad y = y_1,$$

$$(2) \qquad dz = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y,$$

empleando **(*B*)** del Artículo 227, y reemplazando dx y dy por sus equivalentes Δx y Δy respectivamente. Determinemos ahora la coordenada z del punto del plano tangente en P_1 en donde

$$x = x_1 + \Delta x, \quad y = y_1 + \Delta y.$$

Sustituyendo estos valores en **(*H*)** del Artículo 237, encontramos

$$(3) \qquad z - z_1 = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|_1 \Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|_1 \Delta y.$$

Comparando (2) y (3), encontramos $dz = z - z_1$. De aquí el siguiente

Teorema. *La diferencial total de una función* f (x, y), *correpondiente a los incrementos* Δx *y* Δy, *es igual al incremento correspondiente de la coordenada* z *del plano tangente a la superficie* z = f(x, y).

Así, en la figura 212, PP' es el plano tangente a la superficie PQ en $P(x, y, z)$.

Sea $AB = \Delta x$

y $CD = \Delta y$;

entonces

Fig. 212

$$dz = z - z_1 = DP' - DE = EP'.$$

Obsérvese también que $\Delta z = DQ - DE = EQ$.

EJEMPLO. Hallar la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto (1, 2, 3).

Solución. Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$;

entonces $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$; $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$.

Luego $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 = 2$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 = 4$, $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 = 6$.

Sustituyendo en (F), se encuentra

$$2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) = 0,$$

o sea, $x + 2y + 3z = 14$, para ecuación del plano tangente.

Sustituyendo en (E), $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{6}$,

lo que da

$$z = 3x \text{ y } 2z = 3y,$$

para ecuaciones de la normal.

PROBLEMAS

Hallar la ecuación del plano tangente y las ecuaciones de la normal a cada una de las siguientes superficies en el punto indicado.

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $(6, 2, 3)$.
Sol. $6x + 2y + 3z = 49$; $\dfrac{x-6}{6} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$.

2. $z = x^2 + y^2 - 1$; $(2, 1, 4)$.
Sol. $4x + 2y - z = 6$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-1}$.

3. $x^2 + xy^2 + y^3 + z + 1 = 0$; $(2, -3, 4)$.
Sol. $13x + 15y + z + 15 = 0$; $\dfrac{x-2}{13} = \dfrac{y+3}{15} = \dfrac{z-4}{1}$.

4. $x^2 + 2xy + y^2 + z - 7 = 0$; $(1, -2, 6)$.
Sol. $2x + 2y - z + 8 = 0$; $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$.

5. $x^2y^2 + xz - 2y^3 - 10 = 0$; $(2, 1, 4)$.
Sol. $4x + y + z - 13 = 0$; $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-4}{1}$.

6. $x^2 - y^2 - z^2 = 1$; $(3, 2, 2)$.

7. $x^2 + y^2 - z^2 = 25$; $(5, 5, 5)$.

8. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 6$; $(1, 1, \frac{1}{2})$.

9. $x + y - z^2 = 3$; $(3, 4, 2)$.

10. Hallar la ecuación del plano tangente al hiperboloide de dos hojas $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto (x_1, y_1, z_1). *Sol.* $\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} - \dfrac{z_1z}{c^2} = 1$.

11. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto (x_1, y_1, z_1) a la superficie $ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$. *Sol.* $ax_1x + by_1y + cz_1z + d = 0$.

12. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2Lx + 2My + 2Nz + D = 0$$

en el punto (x_1, y_1, z_1) es

$$x_1x + y_1y + z_1z + L(x + x_1) + M(y + y_1) + N(z + z_1) + D = 0.$$

13. Hallar la ecuación del plano tangente en un punto cualquiera de la superficie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

y demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es constante.

14. Demostrar que el tetraedro formado por los planos de coordenadas y un plano cualquiera tangente a la superficie $xyz = a^3$ es de volumen constante.

15. La curva $x = \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{4}{t}$, $z = \frac{t - 2t^2}{2}$ corta a la superficie $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ en el punto $(2, 2, -3)$. ¿Cuál es el ángulo de intersección?

$$Sol. \quad 90^\circ - \text{arc cos} \frac{19}{3\sqrt{138}} = 32^\circ 37'.$$

16. La superficie $x^2+y^2+3z^2 = 25$ y la curva $x = 2t$, $y = \frac{3}{t}$, $z = -2t^2$ se cortan en el punto de la curva correspondiente a $t = 1$. ¿Cuál es el ángulo de intersección?

$$Sol. \quad 90^\circ - \text{arc cos} \frac{19}{7\sqrt{29}} = 30^\circ 16'.$$

17. El elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20$ y la curva alabeada

$$x = \frac{3}{2}(t^2 + 1), \quad y = t^4 + 1, \quad z = t^3$$

se cortan en el punto $(3, 2, 1)$. Demostrar que la curva corta a la superficie ortogonalmente.

239. Otra forma de las ecuaciones de la tangente y el plano normal a una curva alabeada. Si la curva en cuestión es la intersección AB (figura 213) de las dos superficies

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, y, z) = 0,$$

la tangente PT en $P(x_1, y_1, z_1)$ es la intersección de los planos tangentes en ese punto CD y CE; en efecto, la tangente a las dos superficies, debe estar en los dos planos tangentes y, por tanto, es la recta de intersección. Las ecuaciones de los dos planos tangentes en P son, según **(F)**,

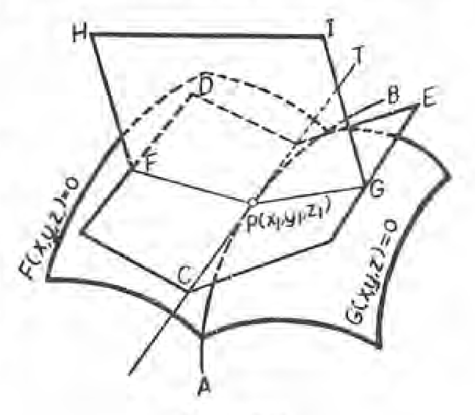


Fig. 213

$$(1) \quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0, \\ &\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1 (x - x_1) + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1 (y - y_1) + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1 (z - z_1) = 0, \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, tomadas simultáneamente, son las ecuaciones de la tangente PT a la curva alabeada AB.

Si A, B, C son los parámetros o números directores de la recta de intersección de los dos planos (1), entonces, según (6), Artículo 4, tendremos:

$$(2)\qquad \begin{aligned} A &= \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1, \\ B &= \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1, \\ C &= \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1 - \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1. \end{aligned}$$

Entonces las ecuaciones de la tangente CPT son

$$(3)\qquad \frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

La ecuación del plano normal PHI es

$$(4)\qquad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

EJEMPLO 1. Hallar las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal en $(r,\ r,\ r\sqrt{2})$ a la curva de intersección de la esfera y el cilindro (fig. 214) cuyas ecuaciones son, respectivamente,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\,r^2, \qquad x^2 + y^2 = 2\,rx.$$

Solución. Sea $F = x^2 + y^2 + z^2 - 4\,r^2$ y $G = x^2 + y^2 - 2\,rx$.

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|_1 = 2\,r, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|_1 = 2\,r, \quad \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|_1 = 2\,r\sqrt{2};$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|_1 = 0, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|_1 = 2\,r, \quad \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|_1 = 0.$$

Sustituyendo en (2), encontramos

$$A = -4\,r^2\sqrt{2}, \quad B = 0, \quad C = 4\,r^2.$$

En consecuencia, según (3), tenemos

$$\frac{x - r}{-\sqrt{2}} = \frac{y - r}{0} = \frac{z - r\sqrt{2}}{1};$$

o sea,
$$y = r, \qquad x + \sqrt{2}\,z = 3\,r,$$

y éstas son las ecuaciones de la tangente PT en P a la curva de intersección.

Sustituyendo en (4), obtenemos la ecuación del plano normal,

$$-\sqrt{2}\,(x-r)+0\,(y-r)+(z-r\sqrt{2})=0,$$

o sea,
$$\sqrt{2}\,x-z=0.$$

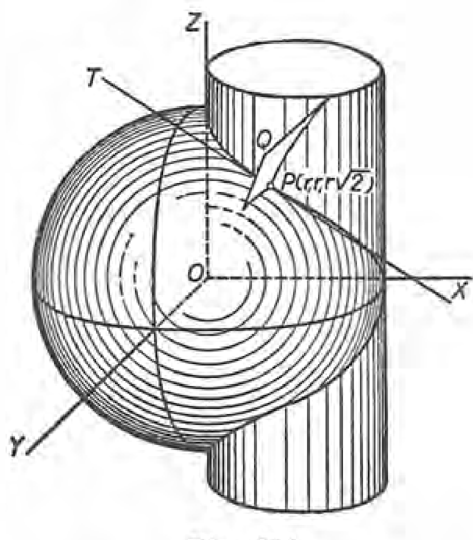


Fig. 214

EJEMPLO 2. Hallar el ángulo de intersección de las superficies del ejemplo anterior en el punto dado.

Solución. El ángulo de intersección es igual al ángulo formado por los planos tangentes o por las normales. En el ejemplo 1 (véase (*E*) del Art. 237) hemos obtenido para números directores de las normales

$$a=2\,r,\quad b=2\,r,\quad c=2\,r\sqrt{2};$$
$$a'=0,\quad b'=2\,r,\quad c'=0.$$

Luego, según (6), Art. 4,

$$\cos\theta=\frac{4\,r^2}{8\,r^2}=\frac{1}{2};\quad \theta=60^\circ.$$

PROBLEMAS

Hallar las ecuaciones de la tangente y la ecuación del plano normal a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado.

1. $x^2+y^2+z^2=49,\ x^2+y^2=13;\ (3,2,-6).$

   Sol. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-3},\ z+6=0;\ 2\,x-3\,y=0.$

2. $z=x^2+y^2-1,\ 3\,x^2+2\,y^2+z^2=30;\ (2,1,4).$

   Sol. $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-1}{-11}=\dfrac{z-4}{-2};\ 5\,x-11\,y-2\,z+9=0.$

3. $x^2 + y^2 - z^2 = 16, \quad x^2 + 4\,y^2 + 4\,z^2 = 84; \quad (2, 4, 2)$.

Sol. $\dfrac{x-2}{16} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z-2}{6}; \quad 16\,x - 5\,y + 6\,z = 24.$

4. $x^2 + y^2 + 3\,z^2 = 32, \quad 2\,x^2 + y^2 - z^2 = 0; \quad (2, 1, 3)$.

Sol. $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y-1}{-21} = \dfrac{z-3}{1}; \quad 6\,x - 21\,y + z + 6 = 0.$

5. $x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 9; \quad (3, 2, 2)$.

6. $x^2 + 4\,y^2 - 4\,z^2 = 0, \quad 2\,x + y + z - 24 = 0; \quad (8, 3, 5)$.

7. Las ecuaciones de la hélice son

$$x^2 + y^2 = r^2,$$
$$y = x \operatorname{tg} \frac{z}{c}.$$

Demostrar que en el punto (x_1, y_1, z_1) las ecuaciones de la tangente son

$$c\,(x - x_1) + y_1\,(z - z_1) = 0,$$
$$c\,(y - y_1) - x_1\,(z - z_1) = 0,$$

y la ecuación del plano normal es

$$y_1 x - x_1 y - c\,(z - z_1) = 0.$$

8. Las superficies $x^2y^2 + 2\,x + z^3 = 16$ y $3\,x^2 + y^2 - 2\,z = 9$ se cortan en una curva que pasa por el punto $(2, 1, 2)$. ¿Cuáles son las ecuaciones de los respectivos planos tangentes a las dos superficies en este punto?

Sol. $3\,x + 4\,y + 6\,z = 22; \quad 6\,x + y - z = 11.$

9. Demostrar que el elipsoide $x^2 + 3\,y^2 + 2\,z^2 = 9$ y la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8\,x - 8\,y - 6\,z + 24 = 0$$

son mutuamente tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

10. Demostrar que el paraboloide $3\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,z = 1$ y la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\,y - 2\,z + 2 = 0$$

se cortan ortogonalmente en el punto $(1, 1, 2)$.

240. Teorema del valor medio. Las aplicaciones de las derivadas parciales que se darán a continuación se basan en el teorema del valor medio para funciones de varias variables. El resultado que se ha de deducir se funda en lo estudiado en el Artículo 116. Vamos a establecer la fórmula

$$(1) \quad f(x_0 + h,\ y_0 + k) = f(x_0,\ y_0) + hf_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k). \qquad (0 < \theta < 1)$$

Con este fin sea

$$(2) \qquad F(t) = f(x_0 + ht,\ y_0 + kt).$$

Aplíquese **(D)**, Art. 116, a $F(t)$, con $a = 0$, y $\Delta a = 1$. Entonces tenemos

$$(3) \qquad F(1) = F(0) + F'(\theta). \qquad (0 < \theta < 1)$$

De (2), según **(D)**, Art. 229, por ser $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$,

$$(4) \quad F'(t) = hf_x(x_0 + ht,\ y_0 + kt) + kf_y(x_0 + ht,\ y_0 + kt).$$

Entonces obtenemos de (2)

$$(5) \quad F(1) = f(x_0 + h,\ y_0 + k), \quad F(0) = f(x_0,\ y_0),$$

y de (4)

$$(6) \quad F'(\theta) = hf_x(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k).$$

Cuando estos resultados se sustituyen en (3), obtenemos (1).

Si deseamos una fórmula análoga a **(F)**, Art. 124, tenemos que formar $F''(t)$. Aplicando otra vez **(D)**, Art. 229, obtenemos

$$\frac{d}{dt} f_x(x_0 + ht,\ y_0 + kt) = hf_{xx}(x_0 + ht,\ y_0 + kt) + kf_{yx}(x_0 + ht,\ y_0 + kt);$$

$$\frac{d}{dt} f_y(x_0 + ht,\ y_0 + kt) = hf_{xy}(x_0 + ht,\ y_0 + kt) + kf_{yy}(x_0 + ht,\ y_0 + kt).$$

De (4), derivando con respecto a t, tenemos

$$(7) \quad F''(t) = h^2 f_{xx}(x_0 + ht,\ y_0 + kt) + 2\,hk\,f_{xy}(x_0 + ht,\ y_0 + kt) + k^2 f_{yy}(x_0 + ht,\ y_0 + kt).$$

De **(F)**, Art. 124, haciendo $b = 1$, $a = 0$, $x_2 = \theta$, resulta

$$(8) \qquad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{\underline{|2}} F''(\theta).$$

Ahora podemos fácilmente demostrar el teorema generalizado del valor medio para una función de dos variables, sustituyendo en (8) los valores dados por (5), (4) y (7). Así obtenemos

$$(9) \quad f(x_0 + h,\ y_0 + k) = f(x_0,\ y_0) + hf_x(x_0,\ y_0) + kf_y(x_0,\ y_0) + \frac{1}{\underline{|2}} [\, h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) + 2\,hkf_{xy}(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h,\ y_0 + \theta k)\,]. \qquad (0 < \theta < 1)$$

No es difícil establecer las fórmulas correspondientes para las funciones de más de dos variables, ni generalizar los teoremas de una manera análoga a la del final del Artículo 124.

241. Máximos y mínimos de funciones de varias variables. En los Artículos 46 y 125, se dedujeron condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los máximos y mínimos de una función de una variable. Ahora emprenderemos la resolución de este problema para el caso en que la función dependa de varias variables independientes.

Se dice que la función $f(x, y)$ es *máxima* en $x = a$, $y = b$ cuando $f(a, b)$ es mayor que $f(x, y)$ para todos valores de x y y en la vecindad de a y b. Análogamente, se dice que $f(x, y)$ es *mínima* en $x = a$, $y = b$ cuando $f(a, b)$ es menor que $f(x, y)$ para todos los valores de x y y en la vecindad de a y b.

Estas definiciones pueden enunciarse en forma analítica como sigue:

Si para todos los valores de h y k menores en valor absoluto que alguna cantidad positiva pequeña, es

$$(1) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \text{un número negativo},$$

entonces $f(a, b)$ es un valor *máximo* de $f(x, y)$. Si

$$(2) \quad f(a+h, b+k) - f(a, b) = \text{un número positivo},$$

entonces $f(a, b)$ es un valor *mínimo* de $f(x, y)$.

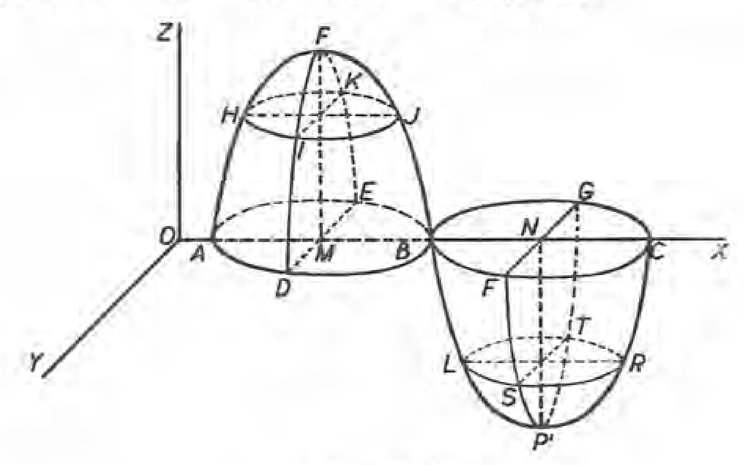


Fig. 215

Estas proposiciones pueden interpretarse geométricamente como sigue. Un punto P de la superficie

$$z = f(x, y)$$

se dice que es un máximo cuando es "más alto" que todos los otros puntos de la superficie en su vecindad, suponiéndose horizontal el plano de coordenadas XOY. Análogamente, P' es un mínimo cuando es "más bajo" que todos los otros puntos de la superficie en su vecindad.

Por tanto, si

$$z_1 = f(a, b)$$

es máxima o mínima, el plano tangente en (a, b, z_1) debe ser horizontal; es decir, paralelo a XOY. Pero el plano tangente (H) (Artículo 237) es paralelo a XOY cuando los coeficientes de x y y son cero. Luego tenemos el siguiente resultado:

Una condición necesaria para que f (a, b) *sea un valor máximo o mínimo de* f (x, y) *es que las ecuaciones*

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

se satisfagan para x = a, y = b.

Las condiciones (3) pueden obtenerse sin recurrir al plano tangente. En efecto, cuando $y = b$, la función $f(x, b)$ no puede ni aumentar ni disminuir cuando x pasa por a (véase el Art. 45). De esto se sigue la primera de las ecuaciones (3). La misma proposición se aplica a la función $f(a, y)$. Así tenemos la segunda ecuación de (3).

El método que acaba de exponerse se aplica a una función de tres variables $f(x, y, z)$. Es decir, una condición *necesaria* para que $f(a, b, c)$ sea un valor máximo o mínimo es que las ecuaciones

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

tengan la solución común $x = a$, $y = b$, $z = c$.

El problema de encontrar condiciones generales necesarias y suficientes es mucho más difícil (véase más adelante). Pero en muchas aplicaciones la existencia de un valor máximo o mínimo se sabe de antemano, y no es necesario ningún criterio.

EJEMPLO 1. Una pieza de hojalata de 24 cm de ancho ha de convertirse en artesa doblando hacia arriba los dos lados. Hallar el ancho y la inclinación de cada lado si la capacidad es máxima.

Solución. El área de la sección transversa, que se muestra en la figura 216 debe ser máxima. La sección transversa es un trapecio cuya base superior es $24 - 2x + 2x \cos \alpha$, su base inferior es $24 - 2x$ y su altura $x \operatorname{sen} \alpha$. El área A es

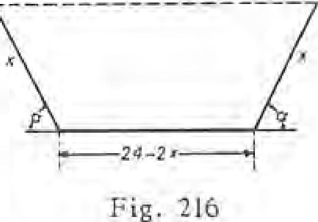


Fig. 216

$$(5) \qquad A = 24x \operatorname{sen} \alpha - 2x^2 \operatorname{sen} \alpha + x^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Derivando, tenemos

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 24 \operatorname{sen} \alpha - 4\, x \operatorname{sen} \alpha + 2\, x \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 24\, x \cos \alpha - 2\, x^2 \cos \alpha + x^2 (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha).$$

Igualando a cero las derivadas parciales, tenemos las dos ecuaciones

$$2 \operatorname{sen} \alpha\ (12 - 2\, x + x \cos \alpha) = 0,$$

$$x\ [24 \cos \alpha - 2\, x \cos \alpha + x (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)] = 0.$$

Una solución de este sistema es $\alpha = 0$, $x = 0$, lo que daría la capacidad mínima, a saber, cero. Suponiendo que α y x no sean igual a cero, y resolviendo el sistema, obtenemos $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $x = 8$.

La naturaleza del problema muestra que debe existir un valor máximo del área. Luego, este valor máximo se encuentra cuando $\alpha = 60^\circ$ y $x = 8$ cm.

Ahora establezcamos una condición suficiente. Suponiendo que las ecuaciones (3) sean ciertas, de (9) del Art. 240, sustituyendo $x_0 = a$, $y_0 = b$ y transponiendo, resulta

$$(6) \quad f(a + h,\ b + k) - f(a,\ b) = \frac{1}{\underline{|2}} [\, h^2 f_{xx}(x, y) + 2\, hk f_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)\,],$$

en donde hemos hecho $x = a + \theta h$, $y = b + \theta k$. Según (1) y (2), $f(a, b)$ será máxima (o mínima) si el segundo miembro es negativo (o positivo) para todos los valores de h y k suficientemente pequeños en valor numérico (exceptuando el valor cero). Hagamos

$$(7) \quad A = f_{xx}(x,\ y), \quad B = f_{xy}(x,\ y), \quad C = f_{yy}(x,\ y),$$

y consideremos la identidad

$$(8) \quad Ah^2 + 2\, Bhk + Ck^2 = \frac{1}{A} [\, (Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)\, k^2\,].$$

La expresión dentro de los corchetes en el segundo miembro de (8) es siempre positiva si

$$(9) \qquad AC - B^2 > 0,$$

y, por tanto, el primer miembro tiene el mismo signo que A (o C, puesto que según (9) A y C tienen que ser del mismo signo). En consecuencia, lo que debemos hacer ahora es aplicar el criterio (9) al segundo miembro de (6), en el cual, como ya se ha dicho, h y k son numéricamente pequeños. Supongamos que (9) es cierta cuando $x = a$, $y = b$. Entonces, siendo continuas las derivadas en (7),

también será cierta para valores de x y y próximos a a y b. Además, el signo de A (o C) será el mismo que el de

$$f_{xx}(a, b) \ (\text{o } f_{yy}(a, b)).$$

Así hemos establecido la siguiente **regla para hallar valores máximos y mínimos de una función $f(x, y)$:**

PRIMER PASO. *Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

SEGUNDO PASO. *Se calcula para los valores de* x *y* y *encontrados el valor de*

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2.$$

TERCER PASO. *La función tendrá:*

$$\textit{un} \text{ valor } \textbf{máximo} \textit{ si } \Delta > 0 \ \textit{y} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\textit{o } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0;$$

$$\textit{un} \text{ valor } \textbf{mínimo} \textit{ si } \Delta > 0 \ \textit{y} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\textit{o } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0.$$

SI Δ es *negativo*, no es difícil ver que $f(x, y)$ no tendrá *ni máximo ni mínimo*.

El lector debe observar que esta regla no da necesariamente *todos* los valores máximos y mínimos. En efecto, un par de valores de x y y determinados por el primer paso pueden anular a Δ, y pueden conducir a un máximo o a un mínimo o bien ni a máximo ni a mínimo. Por tanto, para tales valores se necesita un análisis adicional. Sin embargo, la regla basta para la resolución de muchos problemas importantes.

La cuestión de los máximos y mínimos de funciones de tres o más variables independientes se deja para los tratados más adelantados.

EJEMPLO 2. Calcular los máximos y mínimos de la función

$$3\,axy - x^3 - y^3.$$

Solución. $$f(x, y) = 3\,axy - x^3 - y^3.$$

Primer paso. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\,ay - 3\,x^2 = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3\,ax - 3\,y^2 = 0.$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, obtenemos

$$x = 0, \qquad x = a,$$

$$y = 0, \qquad y = a.$$

Segundo paso. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y;$

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 36\,xy - 9\,a^2.$$

Tercer paso. Cuando $x = 0$ y $y = 0$, es $\Delta = -9\,a^2$, y por lo tanto, para $(0, 0)$ no hay ni máximo ni mínimo.

Cuando $x = a$ y $y = a$, es $\Delta = +27\,a^2$; y puesto que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6\,a$, tenemos realizadas en (a, a) las condiciones para un valor máximo de la función. Sustituyendo $x = a$, $y = a$ en la función dada, obtenemos su valor máximo igual a a^3.

EJEMPLO 3. Dividir a en tres partes tales que su producto sea máximo.

Solución. Sea x = primera parte, y = segunda parte; entonces

$$a - (x + y) = a - x - y = \text{tercera parte};$$

y la función por examinar es

$$f(x, y) = xy(a - x - y).$$

Primer paso. $\frac{\partial f}{\partial x} = ay - 2\,xy - y^2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ax - 2\,xy - x^2 = 0.$

Resolviendo este sistema, obtenemos como una pareja de valores

$$x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}.$$

Segundo paso. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2\,y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = a - 2\,x - 2\,y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2\,x;$

$$\Delta = 4\,xy - (a - 2\,x - 2\,y)^2.$$

Tercer paso. Cuando $x = \frac{a}{3}$ y $y = \frac{a}{3}$, es $\Delta = \frac{a^2}{3}$; y puesto que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2\,a}{3},$$

se ve que el producto es máximo cuando $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$. Luego, la tercera parte es también $\frac{a}{3}$, y el valor máximo del producto es $\frac{a^3}{27}$.

PROBLEMAS

Calcular los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

1. $x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$. *Sol.* $x = 4$, $y = -2$ da mínimo.

2. $4x + 2y - x^2 + xy - y^2$. $x = {}^{10}\!/_3$, $y = {}^{8}\!/_3$ da máximo.

3. $2x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 3y$. $x = -1$, $y = {}^{1}\!/_2$ da mínimo.

4. $x^3 - 3axy + y^3$. $x = y = a$ da mínimo.

5. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$. $x = y = \dfrac{\pi}{3}$ da máximo.

$x = y = \dfrac{5\pi}{3}$ da mínimo.

6. $x^2 - xy + y^2 + ax + by + c$.

7. $xy + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{b^3}{y}$.

8. Demostrar que el valor máximo de la función

$$\frac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

es $a^2 + b^2 + c^2$.

9. Hallar el paralelepípedo rectángulo de volumen máximo que tiene tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

Sol. Volumen $= \dfrac{abc}{27}$.

10. Hallar el volumen máximo del paralelepípedo rectángulo que puede inscribirse en el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. *Sol.* $\dfrac{8\,abc}{3\sqrt{3}}$.

11. Un pentágono está formado (fig. 217) por un rectángulo coronado de un triángulo isósceles. Si el perímetro del pentágono tiene un valor dado P, hallar los valores de x, y y α para que el área sea máxima.

Sol. $\alpha = 30°$, $2x = \dfrac{P}{2 + 2\sec\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$,

$$y = \frac{P}{2} - x(1 + \sec\alpha).$$

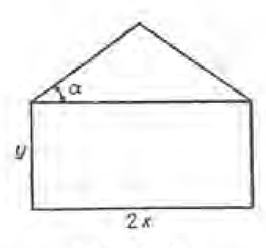


Fig. 217

12. Hallar la distancia más corta entre las rectas $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ y $x = y - 3 = z$.

13. Un fabricante produce dos clases de dulces de costos medios constantes de 100 centavos y 120 centavos por kilogramo. Si el precio de venta de la primera es x centavos por kilogramo y el de la

segunda y centavos, el número de kilogramos que pueden venderse cada semana se da por las fórmulas

$$N_1 = 125(y - x), \qquad N_2 = 16\,000 + 125(x - 2y).$$

Demostrar que para máxima ganancia los precios de venta deben ser 178 centavos y 188 centavos por kilogramo.

14. Un fabricante de máquinas y hojas de afeitar produce a un costo medio constante de 40 centavos de dólar por máquina y 20 centavos por docena de hojas. Si las máquinas se venden a x centavos cada una y las hojas a y centavos la docena, la demanda del mercado en cada semana es $\dfrac{4\,000\,000}{xy}$ máquinas y $\dfrac{8\,000\,000}{xy}$ docenas de hojas. Determinar los precios de venta para la máxima ganancia.

242. Teorema de Taylor para funciones de dos o más variables. El desarrollo de $f(x, y)$ se encuentra empleando los métodos y resultados de los Artículos 194 y 240. Consideremos

$$(1) \qquad F(t) = f(x + ht,\ y + kt),$$

y desarrollemos $F(t)$ como en (5) del Artículo 194. El resultado es

$$(2) \qquad F(t) = F(0) + F'(0)\frac{t}{\underline{|1}} + F''(0)\frac{t^2}{\underline{|2}} + \cdots + F^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{\underline{|n-1}} + R.$$

Los valores de $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ los obtenemos sustituyendo $t = 0$ en (2), (4), (7) del Artículo 240. Derivando (7) y haciendo $t = 0$, resultarán las expresiones para $F'''(0)$, etc. Estas se omiten aquí. Sin embargo, obsérvese que $F'''(0)$ es homogénea y de tercer grado en h y k. Lo mismo es cierto para las derivadas superiores. Si se sustituyen estos valores en (2) y hacemos $t = 1$, el resultado es

$$(3) \qquad f(x + h,\ y + k) = f(x, y) + hf_x(x, y) + kf_y(x, y) + \frac{1}{\underline{|2}}[h^2 f_{xx}(x, y) + 2hkf_{xy}(x, y) + k^2 f_{yy}(x, y)] + \ldots + R.$$

La expresión para R es complicada, y se omitirá de aquí en adelante.

En (3) hagamos $x = a$, $y = b$, y entonces reemplácese h por $(x - a)$ y k por $(y - b)$. El resultado es *el teorema de Taylor para una función de dos variables*,

$$(I) \quad f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{\underline{|2}}[f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2 f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2] + \ldots .$$

Finalmente, haciendo $a = b = 0$, obtenemos el siguiente desarrollo que corresponde a la serie de Maclaurin, (A) del Artículo 194,

$$(J) \quad f(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{\underline{|2}}[f_{xx}(0, 0)x^2 + 2 f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] + \ldots .$$

El segundo miembro de (J) puede escribirse como la serie infinita

$$(4) \qquad u_0 + \frac{u_1}{\underline{|1}} + \frac{u_2}{\underline{|2}} + \ldots ,$$

en donde

$$u_0 = f(0, 0),$$
$$u_1 = f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y,$$
$$u_2 = f_{xx}(0, 0)x^2 + 2 f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2,$$

etc.

Los términos de (4) son polinomios homogéneos en (x, y). El grado de cada uno es igual al subíndice. Es decir, mediante la fórmula (J) la función queda desarrollada en una suma de polinomios homogéneos en (x, y) y de grado ascendente. Análogamente, en (I) los términos del desarrollo son polinomios homogéneos en

$$(x - a, \ y - b).$$

La fórmula (I) se llama *desarrollo de* $f(x, y)$ *en el punto* (a, b).

Debe recurrirse a tratados más adelantados para la resolución del problema de determinar los valores de (x, y) para los que los desarrollos (I) y (J) son aplicables.

Limitando la serie (4) en cualquier término, se obtiene una fórmula aproximada para $f(x, y)$ con respecto a valores próximos a (a, b) o $(0, 0)$. Compárese con lo dicho en el Artículo 200.

EJEMPLO. Desarrollar la función

$$xy^2 + \operatorname{sen} xy$$

en el punto $(1, \frac{1}{2}\pi)$ hasta términos de tercer grado.

Solución. Aquí

$$a = 1, \quad b = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$f(x, y) = xy^2 + \operatorname{sen} xy,$$

$$f_x(x, y) = y^2 + y \cos xy,$$

$$f_y(x, y) = 2\,xy + x \cos xy,$$

$$f_{xx}(x, y) = -\,y^2 \operatorname{sen} xy,$$

$$f_{xy}(x, y) = 2\,y + \cos xy - xy \operatorname{sen} xy,$$

$$f_{yy}(x, y) = 2\,x - x^2 \operatorname{sen} xy.$$

Sustituyendo $x = 1$, $y = \frac{1}{2}\pi$, los resultados son

$$f(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi^2 + 1,$$

$$f_x(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{4}\pi^2,$$

$$f_y(1, \tfrac{1}{2}\pi) = \pi,$$

$$f_{xx}(1, \tfrac{1}{2}\pi) = -\,\tfrac{1}{4}\pi^2,$$

$$f_x\ (1, \tfrac{1}{2}\pi) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$f_{yy}(1, \tfrac{1}{2}\pi) = 1.$$

Sustituyendo en (I), obtenemos

$$xy^2 + \operatorname{sen} xy = 1 + \tfrac{1}{4}\pi^2 + \tfrac{1}{4}\pi^2(x-1) + \pi(y - \tfrac{1}{2}\pi)$$

$$+ \frac{1}{\underline{|2}}\Big[-\frac{1}{4}\pi^2 (x-1)^2 + \pi(x-1)\left(y - \frac{1}{2}\pi\right)$$

$$+ \left(y - \frac{1}{2}\pi\right)^2\Big] + \cdots .$$

Fácilmente se pueden deducir fórmulas para desarrollar una función de tres variables $f(x, y, z)$. Estas se dejan como problemas.

PROBLEMAS

1. De (1) del Artículo 242, demostrar que

$$F'''(0) = h^3 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_0 + 3\,h^2 k \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right|_0 + 3\,hk^2 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right|_0 + k^3 \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_0 .$$

2. Verificar el siguiente desarrollo

$$\cos x \cos y = 1 - \frac{x^2 + y^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6 + 15x^4y^2 + 15x^2y^4 + y^6}{\lfloor 6} + \cdots.$$

3. Desarrollar sen x sen y en potencias de x y y.

4. Verificar el siguiente desarrollo:

$$a^x \log(1 + y) = y + \tfrac{1}{2}(2xy \log a - y^2 + x^2y \log^2 a - xy^2 \log a) + \tfrac{1}{3}y^3 + \cdots.$$

5. Desarrollar $x^3 + xy^2$ en el punto $(1, 2)$.

6. Verificar el siguiente desarrollo:

$$\operatorname{sen}(x + y) = x + y - \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{\lfloor 3} + \cdots.$$

Verificar las siguientes fórmulas aproximadas para valores pequeños de x y y:

7. $e^x \operatorname{sen} y = y + xy$.

8. $e^x \ln(1 + y) = y + xy$.

9. $\sqrt{\dfrac{1 + x}{1 + y}} = 1 + \tfrac{1}{2}(x - y)$.

CAPITULO XXV

INTEGRALES MULTIPLES

243. Integración parcial y sucesiva. Correspondiente al capítulo de *diferenciación parcial* del Cálculo diferencial, tenemos el procedimiento inverso de *integración parcial* en el Cálculo integral. Como se puede colegir de la conexión, "integración parcial" quiere decir que, teniendo una expresión diferencial que contiene dos o más variables independientes, la integramos considerando en primer lugar que *una sola* de ellas varía, y que todas las otras son constantes. Entonces integramos el resultado dejando variar alguna otra de las variables y manteniendo las otras como constantes, y así sucesivamente. Tales integrales se llaman *dobles, triples,* etc. según el número de variables, y, en general, *integrales múltiples*.

En la resolución de este problema no hay nada nuevo excepto que la constante de integración tiene una forma nueva. Ilustraremos esto por medio de ejemplos. Supongamos que deseamos hallar u dado

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,x + y + 3.$$

Integrando con respecto a x, considerando y como constante, tenemos

$$u = x^2 + xy + 3\,x + \phi,$$

en donde ϕ representa la constante de integración. Pero, puesto que durante esta integración y se consideró como constante, ϕ puede contener y. Indicaremos que ϕ depende de y, reemplazando ϕ por el símbolo $\phi(y)$. En consecuencia, la forma más general de u es

$$u = x^2 + xy + 3\,x + \phi(y).$$

Otro problema : hallar

$$u = \int \int (x^2 + y^2) dy\, dx.$$

Esto quiere decir que deseamos hallar u, dado

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = x^2 + y^2.$$

Integrando en primer lugar con respecto a y, considerando x como constante, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y + \frac{y^3}{3} + \psi(x),$$

en donde $\psi(x)$ es una función arbitraria de x.

Integrando ahora este resultado con respecto a x, considerando y como constante, tenemos

$$u = \frac{x^3 y}{3} + \frac{x y^3}{3} + \Psi(x) + \Phi(y),$$

en donde $\Phi(y)$ es una función arbitraria de y, y

$$\Psi(x) = \int \psi(x)\, dx.$$

244. Integral doble definida. Interpretación geométrica. Sea $f(x, y)$ una función continua y uniforme de x y y. Geométricamente,

(1) $$z = f(x, y)$$

es la ecuación de una superficie, tal como KL (fig. 218). Consideremos un recinto S en el plano XOY, y construyamos sobre S como base el cilindro recto cuyas generatrices son paralelas a OZ. Este cilindro determina sobre KL el recinto S'. Tratemos ahora de hallar el volumen V del sólido limitado por S, S' y la superficie cilíndrica. Para ello procederemos como sigue :

A distancias iguales $(= \Delta x)$ en el recinto S tracemos una serie de rectas paralelas a OY, y después una segunda serie de rectas paralelas a OX a distancias iguales $(= \Delta y)$. Por estas rectas hagamos pasar planos paralelos a YOZ y XOZ, respectivamente.

Entonces tenemos dentro de los recintos S y S' una red de líneas, tal como se indica en la figura; la red de S se compone de rectángulos, cada uno de área $\Delta x \, \Delta y$. Esta construcción divide el cilindro en varias columnas verticales, como $MNPQ$, cuyas bases superiores e inferiores son porciones correspondientes de las redes en S' y S, respectivamente. Puesto que las bases superiores de estas columnas son curvas, por supuesto que no podemos calcular directamente el volumen de las columnas. Reemplacemos estas columnas por prismas cuyas bases se hallan así: cada columna se corta por un plano paralelo a XOY que pasa por aquel vértice de la base superior de la columna para el que los valores numéricos de x y y son mínimos.

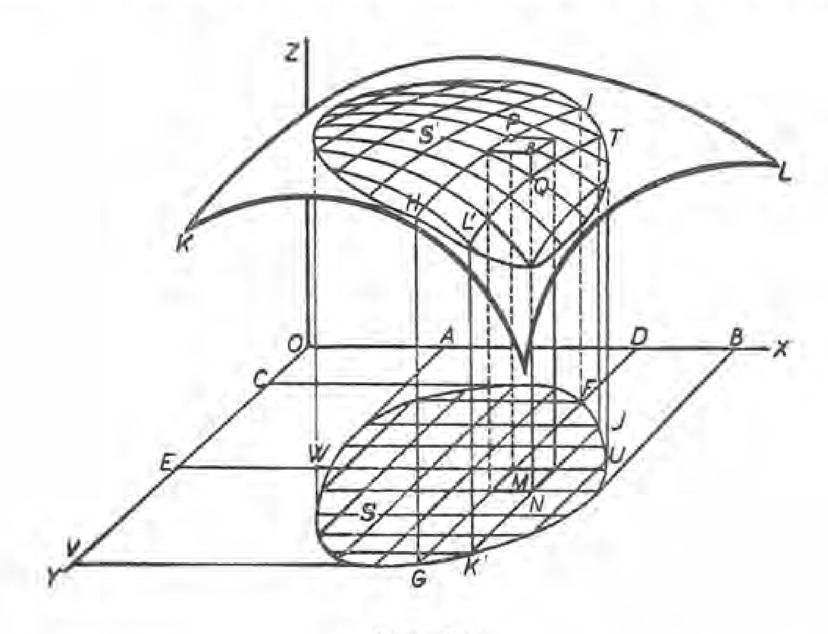


Fig. 218

Así la columna $MNPQ$ se reemplaza por el prisma recto $MNPR$, cuya base superior está en un plano paralelo al plano XOY, trazado por P.

Si las coordenadas en P son x, y, z, entonces $MP = z = f(x, y)$, y, en consecuencia:

$$(2) \qquad \text{Volumen de } MNPR = f(x, y)\Delta y \, \Delta x.$$

Si calculamos el volumen de cada uno de los otros prismas que se han formado de la misma manera, reemplazando x y y en (2) por los valores correspondientes, obtenemos un volumen V' aproximadamente igual a V; es decir,

$$(3) \qquad V' = \sum \sum f(x, y) \, \Delta y \, \Delta x,$$

en donde el doble signo de suma $\sum\sum$ indica que en la cantidad que debe sumarse, hay que tener en cuenta valores de *dos variables* x, y.

Si ahora aumentamos indefinidamente el número de divisiones de la red en S, haciendo disminuir indefinidamente Δx y Δy, y si en cada caso calculamos la suma doble (3), entonces, evidentemente, V' tenderá hacia V como límite. De aquí el resultado fundamental

$$V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\, \Delta y\, \Delta x. \tag{4}$$

Ahora demostraremos que este límite puede hallarse por integración sucesiva.

El volumen pedido puede hallarse como sigue:

Considérese cualquiera de las rebanadas en las que el sólido queda dividido por dos planos sucesivos paralelos a YOZ; por ejemplo, aquella cuyas caras son $FIHG$ y $JTL'K'$. El espesor de esta rebanada es Δx. Ahora bien, los valores de z a lo largo de la curva HI se encuentran haciendo $x = OD$ en la ecuación $z = f(x, y)$. Esto equivale a decir que a lo largo de HI es

$$z = f(OD, y).$$

Luego $$\text{Area } FIHG = \int_{DF}^{DG} f(OD, y)\, dy.$$

El volumen de la rebanada que consideramos es, aproximadamente, igual al de un prisma de base $FIGH$ y altura Δx, es decir, igual a

$$\Delta x \cdot \text{área } FIHG = \Delta x \int_{DF}^{DG} f(OD, y)\, dy.$$

Evidentemente, el volumen pedido de todo el sólido es el límite de la suma de todos los prismas construídos de igual manera, variando $x (= OD)$ de OA a OB; es decir,

$$V = \int_{OA}^{OB} dx \int_{DF}^{DG} f(x, y)\, dy. \tag{5}$$

De la misma manera puede demostrarse que

$$V = \int_{OC}^{OV} dy \int_{EW}^{EU} f(x, y)\, dx. \tag{6}$$

Los integrales (5) y (6) se escriben igualmente en la forma más abreviada

$$\int_{OA}^{OB}\int_{DF}^{DG} f(x, y)\, dy\, dx \quad \text{y} \quad \int_{OC}^{OV}\int_{EW}^{EU} f(x, y)\, dx\, dy .$$

En (5) los límites DF y DG son funciones de x, puesto que se hallan resolviendo con respecto a y la ecuación de la curva que limita la base del sólido. De la misma manera, en (6) los límites EW y EU son funciones de y.

Ahora bien, la comparación de (4), (5) y (6) da el resultado

$$(A) \quad V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum f(x, y)\, \Delta y \cdot \Delta x = \int_{a_2}^{a_1}\int_{u_2}^{u_1} f(x, y)\, dy\, dx$$
$$= \int_{b_2}^{b_1}\int_{v_2}^{v_1} f(x, y)\, dx\, dy,$$

en donde, en general, v_1 y v_2 son funciones de y, y u_1 y u_2 funciones de x. En cada caso el segundo signo integral se aplica a la primera diferencial.

La ecuación (A) es una extensión del teorema fundamental del Artículo 156 relativo a las sumas dobles.

Nuestro resultado puede enunciarse en la siguiente forma:

La integral doble definida

$$\int_{a_2}^{a_1}\int_{u_2}^{u_1} f(x, y)\, dy\, dx$$

puede interpretarse como porción del volumen de un cilindro recto limitado por el plano XOY *y la superficie*

$$z = f(x, y),$$

siendo la base del cilindro el recinto en el plano XOY *limitado por las curvas*

$$y = u_1, \quad y = u_2, \quad x = a_1, \quad x = a_2.$$

Una proposición semejante es cierta para la segunda integral.

Es instructivo considerar de la siguiente manera el procedimiento anterior de hallar el volumen del sólido. Considérese como un elemento de volumen una columna de base rectangular $dy\, dx$ y de altura z. Al sumar todos los elementos de esta clase desde $y = DF$ hasta $y = DG$, siendo x entretanto constante (digamos $= OD$), se encuentra el volumen de una delgada rebanada que tiene $FGHI$ como

una cara. Entonces el volumen de todo el sólido se halla sumando todas estas rebanadas desde $x = OA$ hasta $x = OB$.

En una integración sucesiva que implica dos variables, el orden de integración representa que los extremos que se escriben en el signo integral de la derecha corresponden a la variable cuya diferencial se escribe primero, escribiéndose en orden inverso las diferenciales de las variables y sus límites correspondientes.

Antes que el estudiante intente aplicar la integración sucesiva a los problemas prácticos, es mejor que adquiera por medio de ejercicios alguna facilidad en determinar los valores de integrales múltiples definidas.

EJEMPLO 1. Hallar el valor de la integral doble definida

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy\,dx.$$

Solución.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_0^a \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a \left(x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2-x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{2a^3}{3}.$$

Interpretando geométricamente este resultado, hemos determinado el volumen del sólido de forma cilíndrica (fig. 219) cuya base es OAB y limitado en su parte superior por el plano $z = x + y$.

La base del sólido está en el plano XOY, y está limitada por los extremos de y;

$y = 0$ (recta OB)

$y = \sqrt{a^2-x^2}$ (cuadrante del círculo AB)

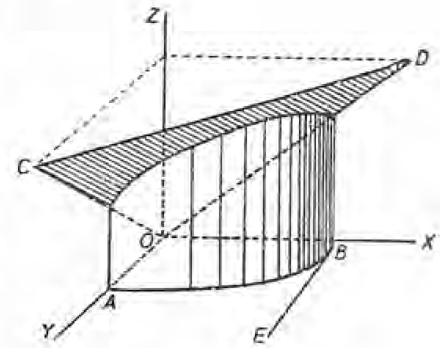


Fig. 219

y $\quad x = 0$ (recta OA), $x = a$ (recta BE) según los extremos de x.

EJEMPLO 2. Verificar $\int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2\,dy\,dx = \frac{7a^2b^3}{6}$.

Solución. $\int_b^{2b} \int_0^a (a-y)x^2\,dy\,dx = \int_b^{2b} \left[ay - \frac{y^2}{2}\right]_0^a x^2\,dx$

$$= \int_b^{2b} \frac{a^2}{2} x^2\,dx = \frac{7a^2b^3}{6}.$$

EJEMPLO 3. Verificar $\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx = \frac{2a^3}{3}$.

Solución.
$$\int_0^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\, dy\, dx = \int_0^a \Big[xy \Big]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$
$$= \int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\, dx$$
$$= \Big[-\frac{2}{3}\left(a^2-x^2\right)^{3/2} \Big]_0^a = \frac{2}{3}a^3.$$

En una integración sucesiva que implica tres variables, el orden de integración se representa de la misma manera que para dos variables; es decir, el orden de los extremos que se escriben en los signos integrales, leyendo de derecha a izquierda, es el mismo que el orden de las variables correspondientes cuyas diferenciales se leen de izquierda a derecha.

EJEMPLO 4. Verificar $\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2\, dz\, dy\, dx = \frac{35}{2}$.

Solución.
$$\int_2^3 \int_1^2 \int_2^5 xy^2\, dz\, dy\, dx = \int_2^3 \int_1^2 \Big[\int_2^5 xy^2\, dz \Big] dy\, dx$$
$$= \int_2^3 \int_1^2 \Big[xy^2 z \Big]_2^5 dy\, dx$$
$$= 3\int_2^3 \int_1^2 xy^2\, dy\, dx$$
$$= 3\int_2^3 \Big[\int_1^2 xy^2\, dy \Big] dx$$
$$= 3\int_2^3 \Big[\frac{xy^3}{3} \Big]_1^2 dx$$
$$= 7\int_2^3 x\, dx = \frac{35}{2}.$$

En los problemas 1 a 10 de la siguiente lista, debe describirse el sólido cuyo volumen es igual al valor de la integral.

PROBLEMAS

Calcular el valor de las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+2)\, dy\, dx = 5.$

2. $\int_0^4 \int_0^x y\, dy\, dx = \frac{32}{3}.$

3. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx = \frac{2}{3}a^{3/2}.$

4. $\int_1^2 \int_0^{\frac{y}{2}} y\, dx\, dy = \frac{7}{6}.$

5. $\int_0^2 \int_0^{x^2} y\, dy\, dx = \frac{16}{5}.$

6. $\int_1^2 \int_y^{y^2} (x + 2y)\, dx\, dy = \frac{143}{30}.$

7. $\int_0^{-1} \int_{y+1}^{2y} xy\, dx\, dy = \frac{11}{24}.$

8. $\int_{-1}^1 \int_0^{x^2} (x + y)\, dy\, dx = \frac{1}{5}.$

9. $\int_0^2 \int_0^x (x^2 + y^2)\, dy\, dx = \frac{16}{3}.$

10. $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\, dy\, dx = \frac{1}{2}.$

11. $\int_b^a \int_\beta^\alpha \varrho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\varrho = \frac{1}{3}(a^3 - b^3)(\cos \beta - \cos \alpha).$

12. $\int_0^\pi \int_0^{a \cos \theta} \varrho \operatorname{sen} \theta\, d\varrho\, d\theta = \frac{1}{3} a^2.$

13. $\int_0^\pi \int_0^{a(1+\cos\theta)} \varrho^2 \operatorname{sen} \theta\, d\varrho\, d\theta = \frac{4}{3} a^3.$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a \cos \theta}^a \varrho^4\, d\varrho\, d\theta = \left(\pi - \frac{16}{15}\right) \frac{a^5}{10}.$

15. $\int_b^a \int_0^b \int_a^{2a} x^2 y^2 z\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{6} a^2 b^3 (a^3 - b^3).$

16. $\int_0^a \int_0^x \int_0^y x^3 y^2 z\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{90} a^9.$

17. $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} x\, dz\, dx\, dy = \frac{4}{35}.$

18. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-y^2} z\, dz\, dy\, dx = \frac{11}{60}.$

19. $\int_1^2 \int_0^z \int_0^{x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy\, dx\, dz = \frac{1}{2}\pi.$

20. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z}\, dz\, dy\, dx = \frac{1}{8} e^4 - \frac{3}{4} e^2 + e - \frac{3}{8}.$

245. Valor de una integral doble definida extendida a una región *S*. En el artículo anterior la integral doble definida apareció como un volumen. Esto no significa necesariamente que toda integral doble sea un volumen; en efecto, la interpretación física del resultado depende de la naturaleza de las magnitudes representadas por x, y, z. Si x, y, z son las coordenadas de un punto en el espacio, entonces el resultado es efectivamente un volumen. A fin de dar a la integral doble definida en cuestión una interpretación que no implique necesariamente el concepto geométrico de volumen, observemos que la variable z no aparece explícitamente en la integral, y que, por tanto, podemos limitarnos al plano XOY. De hecho, consideremos solamente

una región S (fig. 220) en el plano XOY y una función dada $f(x, y)$. Dentro de esa región constrúyanse elementos de área rectangulares, trazando una red de paralelas como indicamos en el Artículo 244. Elíjase un punto (x, y) del elemento de área rectangular $\Delta x\, \Delta y$, *dentro del rectángulo o sobre su perímetro*. Fórmese el producto

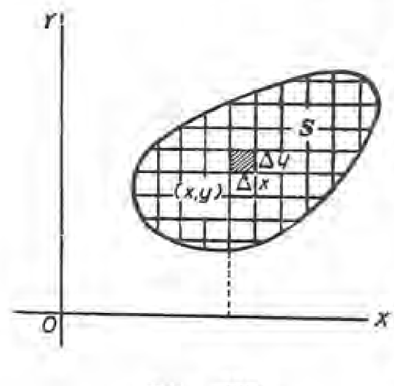


Fig. 220

$$f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y,$$

y productos semejantes para todos los otros elementos rectangulares. Súmense estos productos. El resultado es

$$\sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y.$$

Finalmente, hagamos que $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$.

Escribimos el resultado en la forma

$$(1) \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sum\sum f(x, y)\, \Delta x\, \Delta y = \int\int_S f(x, y)\, dx\, dy,$$

y lo llamamos *la integral doble de la función* f (x, y) *extendida a la región* S.

Según (*A*) el valor del primer miembro de (1) se encontró por integración sucesiva cuando $f(x, y)$ no tenía valores negativos para la región S. Sin embargo, el razonamiento del Artículo 244 será válido si la porción S' de la superficie $z = f(x, y)$ está debajo del plano XOY. Entonces el límite de la suma doble será el volumen con signo negativo. Las integrales en (*A*) darán el mismo número negativo. Finalmente, si $f(x, y)$ es positiva para algunos puntos de S y negativa para otros, podemos dividir S en subregiones en las que $f(x, y)$ sea o siempre positiva o siempre negativa. El razonamiento será válido para cada subregión, y en consecuencia para la región total S. De aquí la siguiente conclusión: *en todos los casos el valor de la integral doble en* (1) *puede determinarse por integración sucesiva.*

Queda por explicar el método de determinar los *extremos* de la integración. Esto se hace en el siguiente artículo.

246. Area de una superficie plana como integral doble definida: coordenadas rectangulares. El problema de las áreas de superficies planas se ha resuelto por integración simple en el Artículo 145. El estudio relativo al cálculo de áreas mediante las integrales dobles es útil principalmente porque aclara la manera cómo se determinan

los extremos o límites de las integrales en el problema general del Artículo 245. Para ello procedamos como sigue:

Tracemos una red de rectángulos como antes. Entonces, en la figura, tenemos:

$$(1)\qquad \text{Elemento de área} = \Delta x\, \Delta y.$$

Evidentemente, si A es el área entera de la región S, según (1) del Artículo 245, es

$$(B)\qquad A = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \Delta x\, \Delta y = \iint_S dx\, dy.$$

Aplicando el resultado enunciado en el Artículo 245, podemos decir:

El área de una región cualquiera es el valor de la integral doble de la función f (x, y) = 1 *extendida a esa región.*

O también: *El área es igual, en valor absoluto, al volumen de un cilindro recto de altura igual a la unidad levantada sobre la base* S. (Artículo 244.)

Los ejemplos siguientes muestran cómo se hallan los extremos de la integración.

EJEMPLO 1. Calcular el área de la porción de superficie situada arriba de OX y limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

Solución. El orden de integración se indica en la figura 221. Hay que integrar, en primer lugar, con respecto a x. Es decir, hay que sumar los elementos $dx\, dy$ en una tira horizontal. Entonces tenemos

$$\int_{AB}^{AC} dx\, dy = dy \int_{AB}^{AC} dx$$

= área de una tira horizontal de altura dy.

Después, hay que integrar este resultado con respecto a y. Esto corresponde a sumar todas las tiras horizontales. De esta manera obtenemos

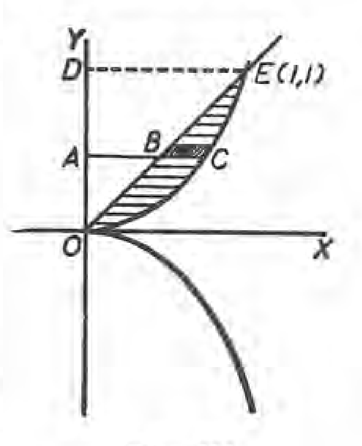


Fig. 221

$$A = \int_0^{OD} \int_{AB}^{AC} dx\, dy.$$

Los extremos AB y AC se encuentran despejando x de cada una de las ecuaciones de las curvas que limitan la superficie. Así, de la ecuación de la recta

se deduce $x = AB = y$; y de la ecuación de la curva se obtiene $x = AC = y^{2/3}$. A fin de determinar OD, se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones para obtener el punto de intersección E. Esto da el punto (1, 1); luego $OD = 1$. Por tanto,

$$A = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y)\,dy = \left[\frac{3}{5}\,y^{5/3} - \frac{1}{2}\,y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

Podemos también empezar por sumar los elementos $dx\,dy$ en una tira vertical, y después sumar estas tiras. Entonces tendremos:

$$A = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^{3/2})\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

En este ejemplo se puede elegir uno u otro orden de integración. Esto no es siempre cierto, como lo muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2. Hallar el área de la superficie situada en el primer cuadrante y limitada por el eje de las x y las curvas $x^2 + y^2 = 10$, $y^2 = 9x$.

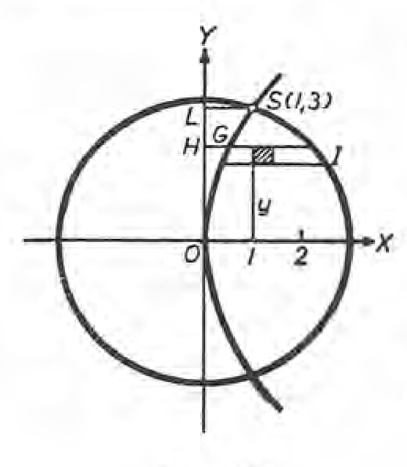


Fig. 222

Solución. Aquí integraremos en primer lugar con respecto a x para cubrir una tira horizontal: es decir, desde la parábola hasta el círculo. Entonces tenemos, para toda el área,

$$A = \int_0^3 \int_{HG}^{HI} dx\,dy,$$

puesto que el punto de intersección S es (1, 3). A fin de hallar HG, despejaremos x de $y^2 = 9x$. Entonces

$$x = HG = \frac{1}{9}\,y^2.$$

A fin de hallar HI, resolveremos $x^2 + y^2 = 10$ con respecto a x. Encontramos

$$x = HI = +\sqrt{10 - y^2}.$$

Luego

$$A = \int_0^3 \int_{\frac{1}{9}y^2}^{\sqrt{10-y^2}} dx\,dy = \left[\frac{y}{2}\sqrt{10 - y^2} + 5\ \text{arc sen}\ \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{1}{27}\,y^3\right]_0^3 = 6{,}75.$$

Si integramos en primer lugar con respecto a y, empleando tiras verticales, se necesitan dos integrales. Entonces

$$A = \int_0^1 \int_0^{3\sqrt{x}} dy\, dx + \int_1^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-x^2}} dy\, dx = 6{,}75.$$

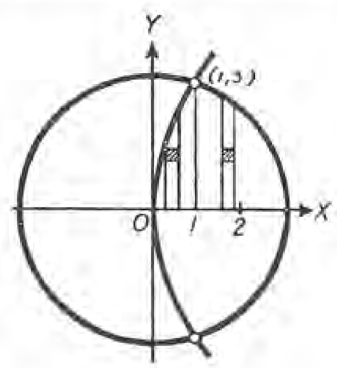


Fig. 223

El orden de integración debe ser tal que el área se da por una sola integral, si esto es posible.

Los ejemplos anteriores muestran que hacemos

$$A = \int\int dx\, dy \quad \text{o} \quad A = \int\int dy\, dx$$

según la naturaleza de las curvas que limitan la superficie. Las figuras 224 y 225 ilustran de una manera general la diferencia de procedimientos de suma que las dos integrales indican.

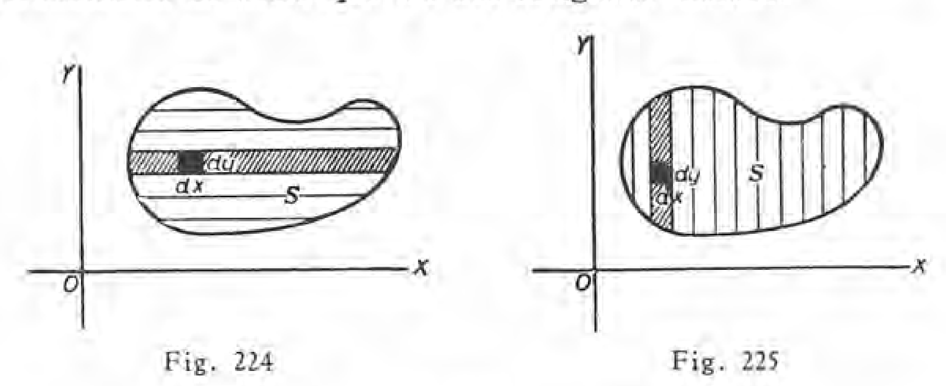


Fig. 224 Fig. 225

PROBLEMAS

1. Hallar, por integración doble, el área de la superficie limitada por las dos parábolas $3y^2 = 25x$ y $5x^2 = 9y$. *a*) integrando en primer lugar con respecto a y; *b*) integrando en primer lugar con respecto a x.

$$Sol.\quad a)\ \int_0^3 \int_{\frac{5x^2}{9}}^{\sqrt{\frac{25x}{3}}} dy\, dx = 5;\quad b)\ \int_0^5 \int_{\frac{3y^2}{25}}^{\sqrt{\frac{9y}{5}}} dx\, dy = 5.$$

Calcular por integración doble el área finita de la superficie limitada por cada uno de los siguientes pares de curvas:

2. $y = 4x - x^2$, $y = x$. *Sol.* $4\tfrac{1}{2}$.

3. $y^2 = 4x$, $2x - y = 4$. 9.

4. $y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$. *Sol.* $^{32}\!/_3$.

5. $y^2 = 2x$, $x^2 = 6y$. 4.

6. $y^2 = 4x$, $x = 12 + 2y - y^2$. $^{4096}\!/_{75}$.

7. $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$. $\pi - \frac{8}{3}$.

8. $y^2 = 9 + x$, $y^2 = 9 - 3x$. 48.

9. $(x^2 + 4a^2)y = 8a^3$, $2y = x$, $x = 0$. $a^2(\pi - 1)$.

10. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$, $x + y = a$. $\frac{1}{3}a^2$.

11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x + y = a$. $\frac{1}{32}(16 - 3\pi)a^2$.

12. $y = x^3 - 2x$, $y = 6x - x^3$. 16.

13. $x = 6y - y^2$, $y = x$.

14. $4y^2 = x^3$, $y = x$.

15. $y^2 = x + 4$, $y^2 = 4 - 2x$.

16. $x^2 + y^2 = 25$, $27y^2 = 16x^3$.

17. $(2a - x)y^2 = x^3$, $y^2 = ax$.

18. $x^2 - y^2 = 14$, $x^2 + y^2 = 36$.

247. Volumen bajo una superficie. En el Artículo 244 hemos estudiado el volumen de un sólido limitado por una superficie

$$z = f(x, y), \qquad (1)$$

el plano XOY y un cilindro. Las generatrices del cilindro eran paralelas a OZ, y su base era una región S en el plano XOY. El volumen de este sólido es, según (A),

$$V = \iint_S z\, dx\, dy = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2)$$

El orden de integración y los extremos de las integrales son los mismos que para el área de la región S. El volumen de un sólido de este tipo es el ''volumen bajo la superficie (1)''. El problema análogo para el plano, ''área bajo una curva'', se ha tratado en el Capítulo XIV. Como caso especial, el volumen puede estar limitado enteramente por la superficie y el plano XOY.

Obsérvese que el elemento de volumen en (2) es un prisma recto de base $dx\,dy$ y altura z.

EJEMPLO 1. Hallar el volumen limitado por el paraboloide elíptico

$$4z = 16 - 4x^2 - y^2 \qquad (3)$$

y el plano XOY.

Solución. Despejando z de (3), obtenemos

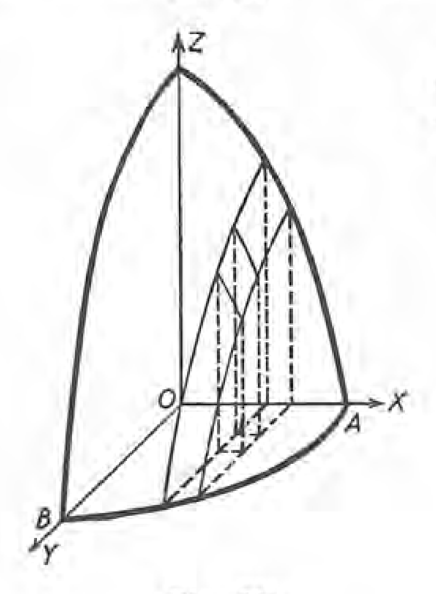
$$(4) \qquad z = 4 - x^2 - \frac{1}{4} y^2.$$

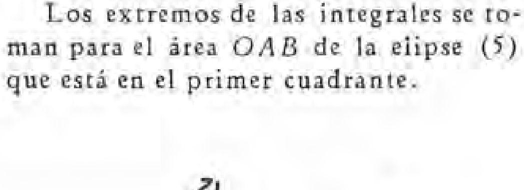
Haciendo $z = 0$, resulta

$$(5) \qquad 4x^2 + y^2 = 16,$$

que es la ecuación de la curva de la base del sólido en el plano XOY. Luego, según (2), empleando el valor z en (4),

$$(6) \qquad V = 4\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \left(4 - x^2 - \frac{1}{4} y^2\right) dy\, dx = 16\pi.$$




Los extremos de las integrales se toman para el área OAB de la elipse (5) que está en el primer cuadrante.

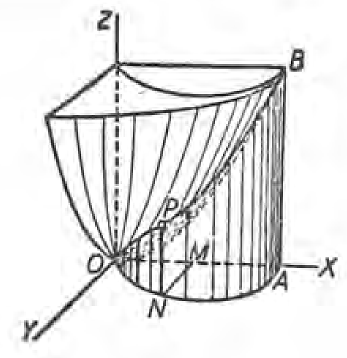


Fig. 226

Fig. 227

EJEMPLO 2. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide de revolución

$$(7) \qquad x^2 + y^2 = az,$$

el plano XOY y el cilindro

$$(8) \qquad x^2 + y^2 = 2ax.$$

Solución. Despejando z de (7), y determinando los extremos para el área de la base del cilindro (8) en el plano XOY, obtenemos, empleando (2),

$$V = 2\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} \frac{x^2 + y^2}{a}\, dy\, dx = \frac{3}{2}\pi a^3$$

Para el área ONA (fig. 227), $MN = \sqrt{2ax - x^2}$ [obtenida despejando y de (8)]; y $OA = 2a$. Estos son los extremos.

PROBLEMAS

1. Hallar el volumen bajo la superficie $z = 4 - x^2$, arriba del plano $z = 0$ y limitado por la curva $y^2 = 4x$.

$$Sol. \quad V = 2\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} (4 - x^2)\, dy\, dx = 17{,}24.$$

2. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo del plano $x + z = 2$, arriba de $z = 0$ y adentro de $x^2 + y^2 = 4$.

$$Sol. \quad V = 2\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} (2 - x)\, dy\, dx = 8\pi.$$

3. Hallar el volumen limitado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados. *Sol.* $\frac{1}{6}abc$.

4. Hallar el volumen limitado arriba por $x + z = 4$, abajo por $z = 0$ y lateralmente por $y^2 = 4x$. *Sol.* $\frac{512}{15}$.

5. Hallar el volumen del sólido limitado arriba por $y^2 = a^2 - az$ y abajo por $z = 0$, y dentro de $x^2 + y^2 = a^2$. *Sol.* $\frac{3}{4}\pi a^3$.

6. Hallar el volumen comprendido debajo del paraboloide elíptico

$$z = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2$$

y arriba de $z = 0$. *Sol.* 3π.

7. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo del plano

$$x + y + z = 8,$$

arriba de $z = 0$ y entre los planos $x + 2y = 8$, $x - 2y = 8$. *Sol.* $170\frac{2}{3}$.

8. Hallar el volumen limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + az = a^2$ y los planos $x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$. *Sol.* $\frac{5}{12}a^3$.

9. Un sólido está limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4ax$, $x = 3a$, y situado en el interior de $y^2 = ax$. Hallar el volumen.

Sol. $(6\pi + 9\sqrt{3})a^3$.

10. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de la superficie cilíndrica $y^2 = a^2 - az$, arriba de $z = 0$ y dentro de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = ax$. *Sol.* $\frac{15}{64}\pi a^3$.

11. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de $z = 2x + a$, arriba de $z = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 = 2ax$. *Sol.* $3\pi a^3$.

12. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de $y^2 + z = 4$, arriba de $z = 0$ y dentro de las superficies cilíndricas $y^2 - 2x = 0$, $y^2 = 8 - 2x$.

Sol. $\frac{512}{15}$.

13. Un sólido está limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = az$, la superficie cilíndrica $y^2 = a^2 - ax$ y los planos $x = 0$, $z = 0$. Hallar el volumen.

Sol. $\frac{4}{7} a^3$.

14. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de

$$4z = 16 - 4x^2 - y^2,$$

arriba de $z = 0$ y dentro de $x^2 + y^2 = 2x$. *Sol.* $\frac{43}{16}\pi$.

15. Los ejes de dos superficies cilíndricas de revolución se cortan en ángulo recto. Sus radios son iguales ($= r$). Hallar el volumen común. *Sol.* $\frac{16}{3} r^3$.

16. Hallar el volumen de la superficie cerrada $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. (Su intersección con cada plano coordenado es la astroide, Cap. XXVI.)

Sol. $\frac{4}{35}\pi a^3$.

17. Hallar el volumen común a $y^2 + z^2 = 4ax$ y $x^2 + y^2 = 2ax$.

Sol. $(2\pi + \frac{16}{3}) a^3$.

248. Instrucciones para establecer, en la práctica, una integral doble. Ahora enunciaremos una regla para llegar a establecer la integral doble que dará una magnitud buscada. Veremos algunas aplicaciones en los artículos siguientes. La regla correspondiente para la integración simple se ha dado en el Artículo 156.

PRIMER PASO. *Se trazan las curvas que limitan la región en cuestión.*

SEGUNDO PASO. *En un punto cualquiera* $P(x, y)$ *dentro del recinto se construye el elemento de área rectangular* $\Delta x \, \Delta y$.

TERCER PASO. *Se determina la función* $f(x, y)$ *por la cual* $\Delta x \, \Delta y$ *debe multiplicarse para dar la magnitud buscada asociada al elemento de área rectangular.*

CUARTO PASO. *La integral que se busca es*

$$\int\int f(x, y) dx\, dy$$

extendida a la región dada. El orden de integración y los extremos de las integrales se determinan como para calcular el área misma.

249. Momento de una superficie y centros de gravedad. Este problema se ha tratado en el Artículo 177 por integración simple. Muchas veces conviene más la integración doble.

Seguiremos la regla del Artículo 248. Los momentos de una superficie para el elemento rectangular del área son respectivamente

$$x \, \Delta x \, \Delta y, \text{ con respecto a } OY,$$
$$y \, \Delta x \, \Delta y, \text{ con respecto a } OX.$$

Luego para la superficie entera, empleando la notación del Artículo 177, tenemos

$$(C) \qquad M_x = \int\int y\,dx\,dy, \quad M_y = \int\int x\,dx\,dy.$$

El centro de gravedad de la superficie se da por

$$(D) \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{\text{área}}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{\text{área}}.$$

En (*C*) las integrales dan los valores de las integrales dobles de las funciones

$$f(x, y) = y \quad \text{y} \quad f(x, y) = x,$$

respectivamente, extendidas al área dada. (Art. 245.)

Para una superficie limitada por una curva, el eje de las x y dos ordenadas (el "área bajo la curva"), deducimos de (*C*)

$$(1) \qquad M_x = \int_a^b \int_0^y y\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

$$M_y = \int_a^b \int_0^y x\,dy\,dx = \int_a^b xy\,dx.$$

Estas ecuaciones están de acuerdo con (2) del Artículo 177. Obsérvese que y en (1) es la ordenada de un punto de la curva, y su valor en función de x debe hallarse de la ecuación de la curva y sustituirse en el integrando antes de integrar.

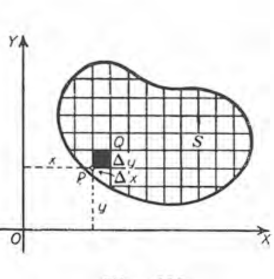


Fig. 228

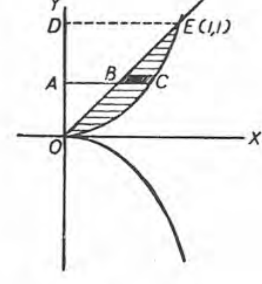


Fig. 229

EJEMPLO. Hallar el centro de gravedad de la superficie situada en el primer cuadrante y limitada por la parábola semicúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

Solución. El orden y los extremos de la integración se han hallado en el ejemplo 1 del Artículo 246.

Luego, empleando (*C*),

$$M_x = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} y\,dx\,dy = \int_0^1 (y^{5/3} - y^2)\,dy = \frac{1}{24}.$$

$$M_y = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^{4/3} - y^2)\,dy = \frac{1}{21}.$$

Puesto que $A = \text{área} = \frac{1}{10}$,

tenemos, según (*D*), $\bar{x} = \frac{10}{21} = 0{,}48$, $\bar{y} = \frac{5}{12} = 0{,}42$.

250. Teorema de Pappus. Una relación útil entre el centro de gravedad y el volumen de un sólido de revolución se expresa en el siguiente teorema:

Si un recinto plano gira alrededor de un eje situado en su plano y no lo corta, el volumen del sólido de revolución así engendrado es igual al producto del área del recinto por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.

Demostración. Hagamos girar alrededor del eje de las x el recinto S (fig. 228). El elemento de área rectangular dentro de la región S en $P(x, y)$ engendrará un cilindro circular hueco cuyo volumen ΔV es

$$\Delta V = \pi(y + \Delta y)^2\,\Delta x - \pi y^2\,\Delta x.$$

Descomponiendo en factores y simplificando, obtenemos

$$\Delta V = 2\,\pi(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Ahora bien, en (1), Art. 245, (x, y) en $f(x, y)$ es un punto "interior al rectángulo PQ o sobre su contorno". Pero $(x, y + \frac{1}{2}\Delta y)$ es un punto del contorno de PQ. Por tanto, sea $f(x, y) = 2\,\pi y$. Entonces ΔV tiene la forma $f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$, y según (1), Artículo 245, y (**C**)

$$(1) \qquad V_x = 2\,\pi \iint_S y\,\Delta x\,\Delta y = 2\,\pi\,M_x.$$

Por último, empleando (***D***), obtenemos

$$(2) \qquad V_x = 2\,\pi\bar{y}\cdot A,$$

en donde A es el área del recinto S. El segundo miembro es el producto del área por la circunferencia que describe su centro de

gravedad. Por tanto, el teorema queda demostrado, y podemos escribir:

$$(3) \qquad V = 2\,\pi\bar{y}\cdot A.$$

Si se conocen dos de las cantidades V, $\bar{y}$, A, la otra puede hallarse por medio de la fórmula (3).

EJEMPLO. Hallar, por el teorema de Pappus, el centro de gravedad del trapecio $OMPB$ de la figura 230.

Solución. El área $OMPB = \frac{1}{2}(3+5)8 = 32$. Haciendo girar la figura alrededor de OX, el sólido que se forma es un tronco de cono de revolución. Luego según (12), Artículo 1, puesto que $a = 8$, $R = 5$, $r = 3$, resulta:

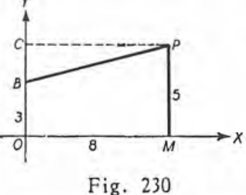


Fig. 230

$$V_x = \frac{8\,\pi}{3}(25+9+15) = \frac{392}{3}\pi.$$

Luego, según (3),

$$\bar{y} = \frac{V_x}{2\,\pi A} = \frac{392}{192} = 2{,}04.$$

Haciendo girar la figura alrededor de OY, el volumen que se engendra es la diferencia entre los volúmenes del cilindro engendrado por $OCPM$ y del cono engendrado por el triángulo BCP. Por tanto,

$$V_y = 320\,\pi - \frac{128\,\pi}{3} = \frac{832}{3}\,\pi.$$

Luego, según el teorema, $\bar{x} = \dfrac{V_y}{2\,\pi A} = \dfrac{832}{192} = 4\dfrac{1}{3}$.

El centro de gravedad es $(4\frac{1}{3},\ 2{,}04)$.

PROBLEMAS

Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por cada una de las siguientes curvas:

1. $y = x^3$, $y = 4x$. (Area en el primer cuadrante.) *Sol.* $(\frac{16}{15}, \frac{64}{21})$.
2. $y = 6x - x^2$, $y = x$. $(\frac{5}{2}, 5)$.
3. $y = 4x - x^2$, $y = 2x - 3$. $(1, \frac{3}{5})$.
4. $x^2 = 4y$, $x - 2y + 4 = 0$. $(1, \frac{8}{5})$.
5. $y = x^2$, $2x - y + 3 = 0$. $(1, \frac{17}{5})$.
6. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = 2x - 3$. $(2, -\frac{3}{5})$.

7. $y^2 = x,\ x + y = 2,\ y = 0$ (Primer cuadrante.) *Sol.* $(\frac{32}{35},\ \frac{5}{14})$.

8. $y^2 = x,\quad x + y = 2,\quad x = 0.$ $(\frac{8}{25},\ \frac{11}{10})$.

9. $y^3 = x^2,\quad 2y = x.$ $(\frac{10}{3},\ \frac{40}{21})$.

10. $4y = 3x^2,\quad 2y^2 = 9x.$ $(\frac{9}{10},\ \frac{27}{20})$.

11. $y^2 = 2x,\quad y = x - x^2.$ $(\frac{14}{15},\ -\frac{11}{15})$.

12. $y^2 = 8x,\quad x + y = 6.$ $(\frac{34}{5},\ -4)$.

13. $y^2 = 4x,\quad y^2 = 5 - x.$ $(\frac{11}{5},\ 0)$.

14. $y = 6x - x^2,\quad x + y = 6.$ $(\frac{7}{2},\ 5)$.

15. $x = 4y - y^2,\quad y = x.$ $(\frac{12}{5},\ \frac{3}{2})$.

16. $y = 4x - x^2,\quad y = 5 - 2x.$ $(3,\ \frac{3}{5})$.

17. $y^2 = 4x,\quad 2x - y = 4.$ $(\frac{8}{5},\ 1)$.

18. $y = x^2 - 2x - 3,\quad y = 6x - x^2 - 3.$ $(2,\ 1)$.

19. $x^2 + y^2 = 1,\quad x + y = 1.$ $(0{,}585,\ 0{,}585)$.

20. $x^2 + y^2 = 32,\quad y^2 = 4x.$

21. $y^2 = 4x,\quad 2x + y = 4.$

22. $x^2 + y^2 - 10x = 0,\quad x^2 = y.$

23. $x^2 = y,\quad 2y = 6x - x^2.$

24. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$ (Area en el primer cuadrante.) $\left(\dfrac{256\,a}{315\,\pi},\ \dfrac{256\,a}{315\,\pi}\right)$.

25. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}},\quad x = 0,\quad y = 0.$ $\left(\dfrac{a}{5},\ \dfrac{a}{5}\right)$.

26. Hallar el centro de gravedad de la superficie bajo una arcada de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta),\ y = a(1 - \cos\theta)$.

Sol. $(\pi a,\ \dfrac{5a}{6})$.

27. Empleando el teorema de Pappus, hallar el centro de gravedad de un semicírculo.

Sol. Distancia del diámetro $= \dfrac{4r}{3\pi}$.

28. Empleando el teorema de Pappus, hallar el centro de gravedad de la parte de superficie de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ que está en el primer cuadrante.

Sol. $\left(\dfrac{4a}{3\pi},\ \dfrac{4b}{3\pi}\right)$.

29. Empleando el teorema de Pappus, hallar el volumen del toro que se engendra haciendo girar el círculo $(x - b)^2 + y^2 = a^2$ $(b > a)$ alrededor del eje de las y. *Sol.* $2\pi^2a^2b$.

30. Un rectángulo gira alrededor de un eje que está en su plano y que es perpendicular a una diagonal en uno de sus extremos. Hallar el volumen del sólido engendrado.

251. Centro de presión de líquidos. El problema de calcular la presión de un líquido sobre una pared vertical se estudió en el Artículo 179.

Las presiones sobre los elementos rectangulares de la figura 231 constituyen un sistema de fuerzas paralelas, puesto que son perpendiculares al plano XOY del recinto. La resultante de este sistema de fuerzas es la presión total P del líquido, dada por **(D)**, Art. 179.

$$(1) \qquad P = \overline{W}\int_a^b yx\,dx.$$

Fig. 231

El punto de aplicación de P se llama *centro de presión del líquido*. Deseamos hallar la coordenada $x(= x_0)$ de este punto.

Con este fin emplearemos el *principio de momentos de fuerza*, que se puede enunciar así:

La suma de los momentos de un sistema de fuerzas paralelas con respecto a un eje es igual al momento de su resultante con respecto a este eje.

Ahora bien, la presión dP del líquido sobre el elemento rectangular EP es, según el Artículo 179,

$$(2) \qquad dP = \overline{W}xy\,\Delta x.$$

El momento de esta fuerza con respecto al eje OY es el producto de dP por su brazo de palanca, $OE\ (= x)$, o sea, empleando (2),

$$(3) \qquad \text{Momento de } dP = x\,dP = \overline{W}x^2y\,\Delta x.$$

De esto tenemos, para el momento total de la presión distribuída del líquido,

$$(4) \qquad \text{Momento total} = \int_a^b \overline{W}x^2y\,dx.$$

Pero el momento de la presión resultante P del líquido es x_0P Luego

(5) $$x_0 P = \overline{W} \int_a^b x^2 y \, dx.$$

Despejando x_0 y empleando (1), obtenemos para la *profundidad del centro de presión,* la siguiente fórmula:

(6) $$x_0 = \frac{\int_a^b x^2 \, dA}{\int_a^b x \, dA},$$

en donde dA = elemento de área = $y \, dx$.

En (6) el denominador es el momento de la superficie plana $ABCD$ con respecto a OY (véase el Art. 177). El numerador es una integral que no hemos encontrado hasta ahora. Se llama el *momento de inercia de la superficie* ABCD *con respecto a* OY.

Ordinariamente se emplea la letra I para el momento de inercia con respecto a un eje, y se añade un subíndice para señalar el eje. Así (6) se convierte en

(7) $$x_0 = \frac{I_y}{M_y}.$$

La notación ordinaria para el momento de inercia con respecto a un eje l es

(8) $$I_l = \int r^2 \, dA,$$

en donde

(9) r = distancia del elemento dA al eje l.

El problema de este artículo es uno de los muchos que conducen a momentos de inercia. En el Artículo 252 se explica el cálculo de momentos de inercia por integración doble y simple; también se dan aplicaciones.

252. Momento de inercia de una superficie. En mecánica el momento de inercia de una superficie con respecto a un eje es un concepto importante. Ahora vamos a explicar el cálculo de los momentos de inercia. Seguiremos la regla del Artículo 248.

Para el rectángulo elemental PQ en $P(x, y)$ el momento de inercia con respecto a OX se define como

(1) $$y^2 \Delta x \Delta y,$$

y con respecto al eje de las y es

(2) $$x^2 \Delta x \Delta y.$$

Entonces, si I_x e I_y son los momentos de inercia correspondientes a la superficie entera, tenemos (compárese con (8) del Artículo 251)

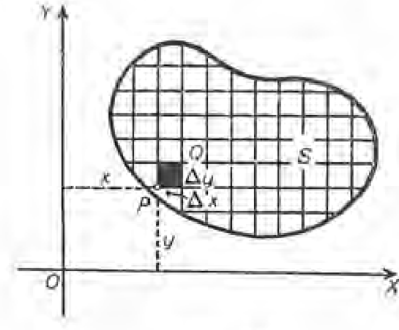


Fig. 232

(E) $$I_x = \int\int y^2\,dx\,dy,$$
$$I_y = \int\int x^2\,dx\,dy.$$

Los radios de giro r_x y r_y vienen dados por la fórmula

(F) $$r_x^2 = \frac{I_x}{\text{área}}, \quad r_y^2 = \frac{I_y}{\text{área}}.$$

En (E) las funciones cuyas integrales se extienden a la superficie son $f(x, y) = y^2$ y $f(x, y) = x^2$, respectivamente.

Las fórmulas (E) se simplifican para una superficie, ''bajo una curva''; es decir, una superficie limitada por una curva, el eje de las x y dos ordenadas. Así obtenemos

(3) $$I_x = \int_a^b \int_0^y y^2\,dy\,dx = \frac{1}{3}\int_a^b y^3\,dx,$$
$$I_y = \int_a^b \int_0^y x^2\,dy\,dx = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

En estas ecuaciones y es la ordenada de un punto de la curva, y su valor, en función de x, se obtiene de la ecuación de la curva y se sustituye en el integrando.

Las fórmulas para los momentos de inercia I se escriben en la forma

(G) $$I = Ar^2,$$

en donde A = área y r = radio de giro. Esta forma se obtiene despejando de (F) los valores de I_x e I_y.

Dimensiones. Si la unidad lineal es 1 cm, el momento de inercia tiene las dimensiones cm^4. Según (F), r_x y r_y son longitudes en centímetros.

EJEMPLO 1. Hallar I_x, I_y y los radios de giro correspondientes para la superficie del ejemplo 1 del Artículo 246.

Solución. Empleando el mismo orden de integración y los mismos extremos, tenemos, según (E),

$$I_x = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} y^2\,dx\,dy = \int_0^1 (y^{8/3} - y^3)\,dy = \frac{1}{44}.$$

$$I_y = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 (y^2 - y^3)\,dy = \frac{1}{36}.$$

Puesto que A = área = $\frac{1}{10}$, encontramos, según (F),

$$r_x = 0{,}48, \quad r_y = 0{,}53.$$

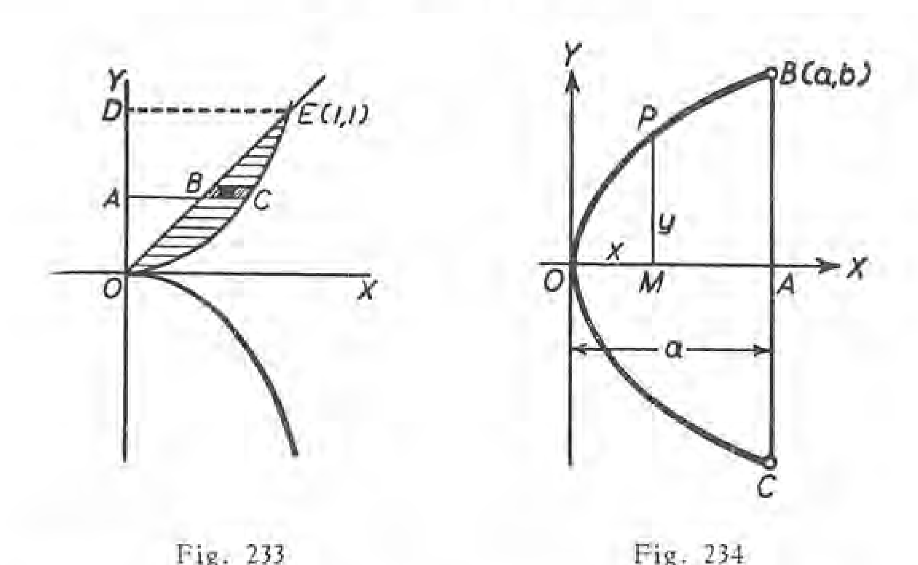


Fig. 233 Fig. 234

EJEMPLO 2. Hallar I_x e I_y para el segmento parabólico BOC en la figura 234.

Solución. La ecuación de la parábola referida a los ejes coordenados que se indican es

$$(4) \qquad y^2 = 2\,px.$$

Puesto que $B\,(a,\ b)$ es un punto de la curva, obtenemos, sustituyendo $x = a$, $y = b$ en (4),

$$b^2 = 2\,pa.$$

Despejando $2\,p$ de esta ecuación, y sustituyendo su valor en (4), obtenemos

$$(5) \qquad y^2 = \frac{b^2 x}{a}, \quad \text{o sea,} \quad y = \frac{b x^{1/2}}{a^{1/2}}.$$

Los momentos de inercia de la superficie bajo el arco OPB en el primer cuadrante serán las mitades de los momentos buscados. Por tanto, empleando (3) y sustituyendo el valor de y según (5), obtenemos

$$\frac{1}{2} I_x = \frac{1}{3}\int_0^a \frac{b^3}{a^{3/2}} x^{3/2}\, dx = \frac{2}{15} ab^3. \quad \therefore \quad I_x = \frac{4}{15} ab^3.$$

$$\frac{1}{2} I_y = \int_0^a x^2 \frac{b}{a^{1/2}} x^{1/2}\, dx = \frac{2}{7} a^3 b. \quad \therefore \quad I_y = \frac{4}{7} a^3 b.$$

Para el área del segmento, encontramos

$$\frac{1}{2} A = \int_0^a y\, dx = \int_0^a \frac{b}{a^{1/2}} x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3} ab. \quad \therefore \quad A = \frac{4}{3} ab.$$

Luego, según (F),

$$r_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1}{5} b^2, \quad \text{e} \quad I_x = \frac{1}{5} Ab^2,$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3}{7} a^2, \quad \text{e} \quad I_y = \frac{3}{7} Aa^2.$$

Los resultados están en la forma (G).

En la figura 165 el eje OY está en la superficie del líquido. Si en cualquier figura llamamos s a este eje, entonces la profundidad del centro de presión es, según (7), Art. 251,

$$(6) \qquad x_0 = \frac{I_s}{M_s} = \frac{r_s^2}{h_s},$$

si $\qquad r_s =$ radio de giro alrededor del eje s

y $\qquad h_s =$ profundidad del centro de gravedad debajo del eje s.

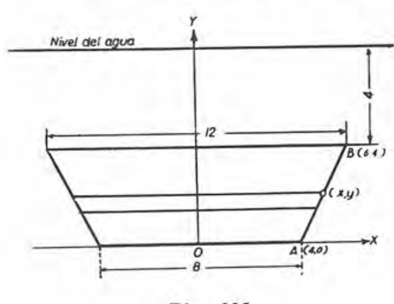


Fig. 235

EJEMPLO 3. Hallar la profundidad del centro de la presión sobre la compuerta trapecial de la figura 235. Compárese con el ejemplo 2, Art. 179.

Solución. Elíjanse los ejes OX y OY como se muestra, y trácese una tira elemental horizontal. Sea r la distancia de esta tira al eje s en el nivel de agua. Entonces

$$r = 8 - y, \quad dA = 2\, x\, dy.$$

Luego, según (8), Art. 251, y según la definición del momento de superficie (Art. 177), tenemos

$$(7)\qquad I_s = \int r^2\, dA = \int (8-y)^2\, 2\,x\, dy,$$

$$(8)\qquad M_s = \int r\, dA = \int (8-y)\, 2\,x\, dy.$$

La ecuación de AB es $y = 2x - 8$. Despejando x, sustituyendo en (7) y (8) e integrando con extremos $y = 0$, $y = 4$, obtenemos

$$I_s = \int_0^4 (8-y)^2\,(8+y)\,dy = 1\,429\tfrac{1}{3}.$$

$$M_s = \int_0^4 (64 - y^2)\,dy = 234\tfrac{2}{3}.$$

De aquí, según (7), Art. 251, $x_0 = 6{,}09$.

253. Momento polar de inercia. El momento de inercia del rectángulo elemental PQ con respecto al origen O es el producto del área por $\overline{OP}^2$, es decir,

$$(1)\qquad (x^2+y^2)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Luego, según el Artículo 248, para el área entera

$$(2)\qquad I_O = \int\int (x^2+y^2)dx\,dy.$$

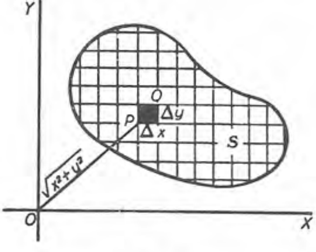


Fig. 236

No obstante, podemos escribir el segundo miembro como la suma de dos integrales. En efecto, es evidente que (2) es lo mismo que

$$(3)\qquad I_O = \int\int x^2\,dx\,dy + \int\int y^2\,dx\,dy = I_x + I_y.$$

De aquí tenemos el siguiente teorema:

El momento de inercia de una área con respecto al origen es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto al eje de las x *y al eje de las* y.

PROBLEMAS

Hallar I_x, I_y e I_0 para cada una de las figuras que se describen a continuación:

1. El semicírculo que está a la derecha del eje de las y y limitado por $x^2 + y^2 = r^2$.

Sol. $I_x = I_y = \frac{Ar^2}{4}$.

2. El triángulo isósceles de altura h y base a cuyos vértices son $(0, 0)$, $\left(h, \frac{a}{2}\right)$, $\left(h, -\frac{a}{2}\right)$.

Sol. $I_x = \frac{Aa^2}{24}$, $I_y = \frac{Ah^2}{2}$.

3. El triángulo rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, (b, a), $(b, 0)$.

Sol. $I_x = \frac{Aa^2}{6}$, $I_y = \frac{Ab^2}{2}$.

4. La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sol. $I_x = \frac{Ab^2}{4}$, $I_y = \frac{Aa^2}{4}$.

5. La superficie del primer cuadrante limitada por $y^2 = 4x$, $x = 4$, $y = 0$.

Sol. $I_x = \frac{16\,A}{5}$, $I_y = \frac{48\,A}{7}$.

6. La superficie incluída entre la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 2y$.

Sol. $I_x = \frac{19\,A}{20}$, $I_y = \frac{53\,A}{20}$.

7. La superficie incluída entre las elipses $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ y $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

Sol. $I_x = \frac{5\,A}{2}$, $I_y = \frac{19\,A}{4}$.

8. La superficie incluída entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la circunferencia $x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

Sol. $I_x = \frac{239\,A}{60}$, $I_y = \frac{17\,A}{4}$.

9. La superficie incluída entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$ y la circunferencia $x^2 + (y + 3)^2 = 4$.

Sol. $I_x = \frac{71\,A}{8}$, $I_y = 10\,A$.

10. La superficie limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la elipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Sol. $I_x = \frac{23\,A}{5}$, $I_y = \frac{53\,A}{5}$.

11. La superficie limitada por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Sol. $I_x = I_y = \frac{7\,Aa^2}{64}$.

12. Hallar la profundidad del centro de presión sobre una compuerta triangular cuya base es horizontal y al nivel de la superficie del agua.

13. Hallar la profundidad del centro de presión sobre una compuerta rectangular de 2 m de ancho y 1 m de hondo, cuando el nivel del agua está 1,25 m arriba de la parte superior de la compuerta.

Sol. 1,8 m debajo de la superficie del agua.

14. Hallar la profundidad del centro de presión sobre el extremo de un tanque cilíndrico horizontal de petróleo de 2 m de diámetro cuando la profundidad del petróleo es: *a*) 1 m; *b*) 1,6 m; *c*) 2,4 m.

Sol. *a*) $\frac{3\pi}{16} = 0,59$ m; *b*) 0,96 m aprox.; *c*) $\frac{221}{140} = 1,58$ m.

254. Coordenadas polares. Area plana. Cuando las ecuaciones de las curvas que limitan una superficie plana se dan en coordenadas polares, es necesario hacer algunas modificaciones a los procedimientos anteriores.

Ahora se divide la figura en porciones elementales como sigue:

Se trazan arcos circulares con el centro común O, siendo la diferencia de los radios sucesivos $\Delta\varrho$. Así, en la figura 237,

$$OP = \varrho, \quad OS = \varrho + \Delta\varrho.$$

Después se trazan desde O rectas tales que el ángulo formado por dos rectas consecutivas cualesquiera sea siempre el mismo e igual a $\Delta\theta$. Así, en la figura 237 el ángulo es $POR = \Delta\theta$.

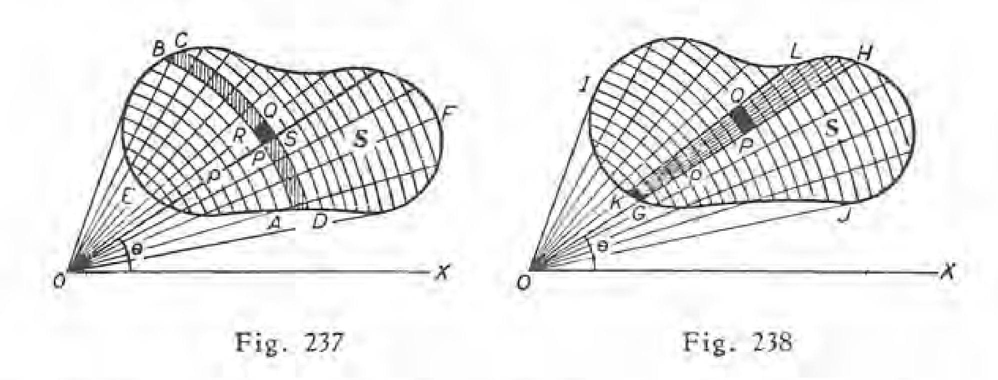


Fig. 237 Fig. 238

De esta manera la figura quedará dividida en un gran número de porciones rectangulares, como $PSQR$ (fig. 237).

Sea $PSQR = \Delta A$. Ahora bien, ΔA es la diferencia de las áreas de los sectores circulares POR y SOQ. Por tanto,

$$(1) \qquad \Delta A = \tfrac{1}{2}(\varrho + \Delta\varrho)^2\,\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\,\varrho^2\,\Delta\theta$$
$$= \varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\theta + \tfrac{1}{2}\,\Delta\varrho^2\,\Delta\theta.$$

La función $f(x, y)$ del Artículo 245 ha de reemplazarse por una función que emplee coordenadas polares. Sea ésta $F(\varrho, \theta)$. Entonces, procediendo como en el Artículo 245, elegimos un punto (ϱ, θ) de ΔA, formamos el producto $F(\varrho, \theta)\,\Delta A$ para cada ΔA dentro de la región S, sumamos estos productos y, finalmente, hacemos que $\Delta\varrho \to 0$ y $\Delta\theta \to 0$. En el Artículo 258 se demostró que el valor límite de esta suma doble puede hallarse por integración sucesiva. Podemos, pues, escribir (compárese con (1), Art. 245)

$$(2) \qquad \lim_{\substack{\Delta\varrho \to 0 \\ \Delta\theta \to 0}} \sum\sum F(\varrho, \theta)\,\Delta A = \int\!\!\int_S F(\varrho, \theta)\,\varrho\, d\varrho\, d\theta,$$

y a esta expresión la llamamos *la integral doble de la función* $F(\varrho, \theta)$ *extendida a la región* S.

Obsérvese que en (2) el valor de ΔA dado por (1) se ha reemplazado en la integral por $\varrho\, d\varrho\, d\theta$.

La aplicación más sencilla de (2) es la de hallar el área de la región S. Entonces tenemos

$$(H) \qquad A = \int\!\!\int \varrho\, d\varrho\, d\theta = \int\!\!\int \varrho\, d\theta\, d\varrho.$$

Estas fórmulas se recuerdan fácilmente si consideramos los elementos de área como rectángulos con dimensiones $\varrho\, d\theta$ y $d\varrho$, y, por tanto, de área $\varrho\, d\theta\, d\varrho$.

Las figuras 239 y 240 ilustran de un modo general la diferencia de de los procedimientos indicados por las dos integrales.

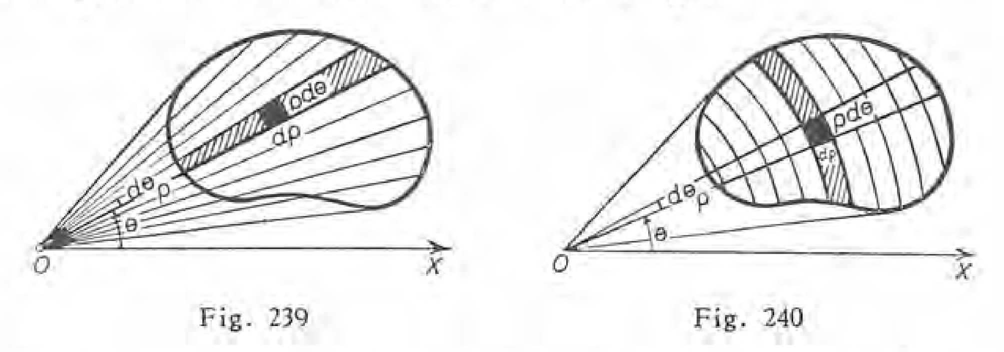


Fig. 239 Fig. 240

En la primera, puesto que $d\varrho$ antecede a $d\theta$, integramos en primer lugar con respecto a ϱ, manteniendo θ constante. Este proceso cubrirá la tira radial $KGHL$ (fig. 238). Los extremos para ϱ son $\varrho = OG$ y $\varrho = OH$, que se encuentran resolviendo con respecto a ϱ en función de θ la ecuación (o las ecuaciones) de la curva (o de las curvas) que limita la figura. Después integramos haciendo variar θ, siendo los extremos $\theta = \angle JOX$ y $\theta = \angle IOX$.

La segunda integración en (H) se ejecuta integrando con respecto a θ, permaneciendo ϱ constante. Este paso cubre la tira circular $ABCD$ (fig. 237) entre dos arcos circulares consecutivos. Después se integra haciendo variar ϱ.

Cuando la superficie está limitada por una curva y dos de sus radios vectores (área barrida por el radio vector), obtenemos, de la primera forma en (H),

$$A = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{0}^{\varrho} \varrho \, d\varrho \, d\theta = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2 \, d\theta ,$$

de acuerdo con (D) del Artículo 159.

Las integrales dobles en coordenadas polares tienen una de las formas

$$(3) \qquad \int\int F(\varrho, \theta)\, \varrho \, d\varrho \, d\theta$$

o

$$\int\int F(\varrho, \theta)\, \varrho \, d\theta \, d\varrho .$$

EJEMPLO 1. Hallar los extremos para la integral doble que permite calcular alguna magnitud pedida relativa al área de la superficie interior a la circunferencia $\varrho = 2r\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $\varrho = r$ (fig. 241).

Solución. Los puntos de intersección son $A\left(r, \frac{\pi}{3}\right)$ y $B\left(r, -\frac{\pi}{3}\right)$. Empleando la primera forma de (3), tendremos que los extremos para ϱ son

$$\varrho = OG = r,$$

$$\varrho = OH = 2r\cos\theta;$$

y para θ son $\frac{\pi}{3}$ y $-\frac{\pi}{3}$.

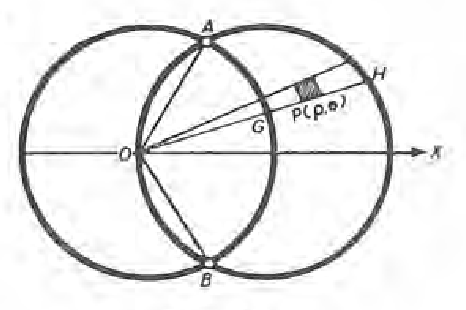


Fig. 241

EJEMPLO 2. Hallar el área de la superficie interior a la circunferencia $\varrho = 2r\cos\theta$ y exterior a la circunferencia $\varrho = r$.

Solución. Según el ejemplo anterior, tenemos

$$A = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{r}^{2r\cos\theta} \varrho \, d\varrho \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(4r^2\cos^2\theta - r^2)\, d\theta$$

$$= r^2\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 1.91\, r^2 .$$

255. Fórmulas que emplean coordenadas polares. No hay dificultad en establecer las siguientes fórmulas:

(1) $$M_x = \int\int \rho^2 \operatorname{sen} \theta \, d\rho \, d\theta .$$

(2) $$M_y = \int\int \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta .$$

(3) $$I_x = \int\int \rho^3 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\rho \, d\theta .$$

(4) $$I_y = \int\int \rho^3 \cos^2 \theta \, d\rho \, d\theta .$$

(5) $$I_O = \int\int \rho^3 \, d\rho \, d\theta .$$

Habrá que cambiarse el orden de las diferenciales si se ejecuta en primer lugar la integración con respecto a θ.

EJEMPLO 1. A causa de sus importantes aplicaciones, vamos ahora a determinar los momentos de inercia de un círculo.

Sea a = el radio. Entonces, según (5), el momento polar de inercia con respecto al centro es

(6) $$I_O = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi a^4}{2} = \frac{A}{2} a^2 ,$$

en donde A = área del círculo.

Además, puesto que, por simetría, $I_x = I_y$, tenemos, según (3), Art. 253,

(7) $$I_x = \frac{1}{2} I_O = \frac{A}{4} a^2 .$$

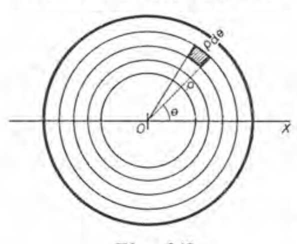


Fig. 242

Estas fórmulas nos dicen: *a*) *El momento polar de inercia de un círculo con respecto a su centro es igual al producto de la mitad del área por el cuadrado del radio;* *b*) *el momento polar de inercia con respecto a un diámetro cualquiera es igual al producto de un cuarto del área por el cuadrado del radio.*

EJEMPLO 2. Hallar el centro de gravedad de un lazo de la lemniscata

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta .$$

Solución. Puesto que OX es un eje de simetría, tenemos $\bar{y} = 0$.

$$\frac{1}{2} A = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \cos 2\theta \, d\theta = \frac{a^2}{4} .$$

Cálculo del momento:

$$\frac{1}{2}M_y = \int_0^{\frac{1}{4}\pi}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \varrho^2 \cos\theta \, d\varrho \, d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(\cos 2\theta)^{3/2}\cos\theta \, d\theta.$$

$$= \frac{1}{3}a^3\int_0^{\frac{1}{4}\pi}(1-2\,\text{sen}^2\,\theta)^{3/2}\cos\theta \, d\theta \qquad \text{según (5), Art. 2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\int_0^1 (1-z^2)^{3/2}\,dz \left(\text{si sen}\,\theta = \frac{1}{2}z\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{32}a^3\sqrt{2}.$$

Luego $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{\pi}{8}a\sqrt{2} = 0{,}55\,a$.

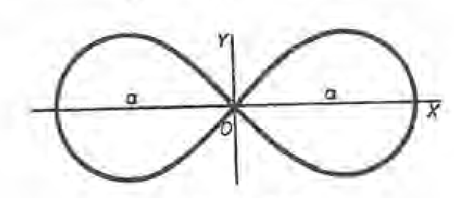


Fig. 243

Fig. 244

EJEMPLO 3. Hallar I_O para la región limitada por la circunferencia

$$\varrho = 2\,r\cos\theta.$$

Solución. Sumando con respecto a los elementos en la tira OP (fig. 244), los extremos de ϱ son cero y $2\,r\cos\theta$ (obtenidos de la ecuación de la circunferencia).

Sumando con respecto a todas esas tiras, los extremos de θ son $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, según (5),

$$I_O = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2r\cos\theta}\varrho^3\,d\varrho\,d\theta = \frac{3\pi r^4}{2}.$$

O bien, sumando en primer lugar con respecto a los elementos en una tira circular (como QR), tenemos

$$I_O = \int_0^{2r}\int_{-\text{arc cos}\frac{\rho}{2r}}^{\text{arc cos}\frac{\rho}{2r}}\varrho^3\,d\theta\,d\varrho = \frac{3\pi r^4}{2}.$$

PROBLEMAS

Hallar el área de cada una de las superficies siguientes:

1. Interior al circulo $\varrho = 3/2$ y a la derecha de la recta $4\,\varrho\cos\theta = 3$.

Sol. $\frac{3(4\pi - 3\sqrt{3})}{16}$.

2. Interior al círculo $\rho = 3 \cos \theta$ y exterior al círculo $\rho = \frac{3}{2}$.

Sol. $\dfrac{3(2\pi + 3\sqrt{3})}{8}$.

3. Interior al círculo $\rho = 3 \cos \theta$ y exterior al círculo $\rho = \cos \theta$.

Sol. 2π.

4. Interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos \theta$ y a la derecha de la recta $4\rho \cos \theta = 3$.

Sol. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{16}$.

5. Interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos \theta$ y exterior al círculo $\rho = 1$.

Sol. $\dfrac{\pi}{4} + 2$.

6. Interior al círculo $\rho = 1$ y exterior a la cardioide $\rho = 1 + \cos \theta$.

Sol. $2 - \dfrac{\pi}{4}$.

7. Interior al círculo $\rho = 3 \cos \theta$ y exterior a la cardioide $\rho = 1 + \cos \theta$.

Sol. π.

8. Interior al círculo $\rho = 1$ y exterior a la parábola $\rho(1 + \cos \theta) = 1$.

Sol. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}$.

9. Interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos \theta$ y exterior a la parábola $\rho(1 + \cos \theta) = 1$.

Sol. $\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4}{3}$.

10. Interior al círculo $\rho = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta$ y exterior al círculo $\rho = 1$.

Sol. $\dfrac{1}{2}$.

11. Interior al círculo $\rho = \operatorname{sen} \theta$ y exterior a la cardioide $\rho = 1 - \cos \theta$.

Sol. $1 - \dfrac{\pi}{4}$.

12. Interior a la lemniscata $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ y exterior al círculo $\rho = a$.

Sol. $0{,}684\, a^2$.

13. Interior a la cardioide $\rho = 4(1 + \cos \theta)$ y exterior a la parábola $\rho(1 - \cos \theta) = 3$. Sol. $5{,}504$.

14. Interior al círculo $\rho = 2a \cos \theta$ y exterior al círculo $\rho = a$. Hallar también el centro de gravedad, I_x e I_y.

Sol. $A = \left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) a^2$, $\bar{x} = \dfrac{(8\pi + 3\sqrt{3})\, a}{2\,(2\pi + 3\sqrt{3})}$,

$I_x = \left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{3\sqrt{3}}{16}\right) a^4$, $I_y = \left(\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{11\sqrt{3}}{16}\right) a^4$.

15. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por la cardioide $\varrho = a(1 + \cos\theta)$.

Sol. $\bar{x} = \frac{5a}{6}$.

16. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por un lazo de la curva $\varrho = a\cos 2\theta$.

Sol. $\bar{x} = \frac{128\sqrt{2}\,a}{105\pi}$.

17. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por un lazo de la curva $\varrho = a\cos 3\theta$.

Sol. $\bar{x} = \frac{81\sqrt{3}\,a}{80\pi}$.

18. Hallar I_y para la lemniscata $\varrho^2 = a^2\cos 2\theta$.

Sol. $\frac{A}{48}(3\pi + 8)a^2$.

19. Hallar I_x para la cardioide $\varrho = a(1 + \cos\theta)$.

20. Hallar I_x e I_y para un lazo de la curva $\varrho = a\cos 2\theta$.

21. Demostrar, por medio de (1) del Artículo 254, que

$$\lim_{\substack{\Delta\varrho \to 0 \\ \Delta\theta \to 0}} \frac{\Delta A}{\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\theta} = 1,$$

y que, por tanto, ΔA "difiere de $\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\theta$ en un infinitésimo de orden superior" (Art. 99). Entonces ΔA en el primer miembro de (2), Art. 254, puede reemplazarse por $\varrho\,\Delta\varrho\,\Delta\theta$. (La demostración se omite.)

256. Método general para hallar las áreas de las superficies curvas. El método que se dió en el Artículo 164 era aplicable sólo al área de una superficie de revolución. Ahora vamos a dar un método más general. Sea

$$(1) \qquad z = f(x, y)$$

la ecuación de la superficie KL en la figura 245, y supongamos que se pida calcular el área de la región S' de la superficie.

Designemos por S la región del plano XOY que es la proyección ortogonal de S' sobre este plano. Hagamos pasar planos paralelos a YOZ y XOZ a distancias iguales

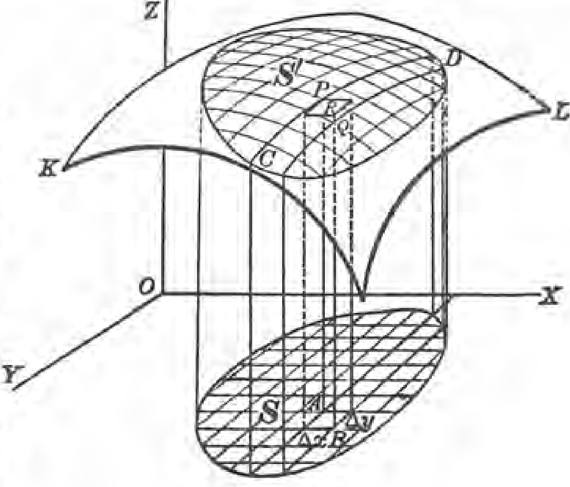


Fig. 245

a Δx y Δy respectivamente. Como vimos en el Artículo 244, estos planos forman prismas truncados (como PB) limitados por arriba por una porción (como PQ) de la superficie dada, siendo la proyección de esta porción sobre el plano XOY un rectángulo (como AB), de área $\Delta x\, \Delta y$. Este rectángulo forma la base inferior del prisma. Las coordenadas de P son (x, y, z).

Ahora consideremos el plano tangente a la superficie KL en el punto P. Evidentemente, el mismo rectángulo AB es la proyección sobre el plano XOY de la porción PR del plano tangente que es intersecada por el prisma PB. Designando por γ el ángulo que forman el plano tangente y el plano XOY, tenemos

$$\text{Area } AB = \text{área } PR \cdot \cos \gamma,$$

[La proyección de una área plana sobre un segundo plano es igual al producto del área de la porción proyectada por el coseno del ángulo entre los planos.]

o sea,

$$\Delta y\ \Delta x = \text{área } PR \cdot \cos \gamma.$$

Ahora bien, γ es igual al ángulo que forman OZ y la recta perpendicular al plano tangente trazada por O. Por tanto, según **(H)**, Artículo 237, y (2) y (3) del Artículo 4, tenemos

$$\cos \gamma = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces $$\text{Area } PR = \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y\ \Delta x.$$

Tomamos éste como el elemento de área de la región S'. Entonces definimos el área de la región S' como

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum\sum \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \Delta y\ \Delta x,$$

extendiéndose la suma a la región S, como en el Artículo 245. Denotando por A el área de la región S', tenemos

$$(I) \qquad A = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dy\, dx,$$

y los extremos de la integración dependen de *la proyección sobre el plano* XOY *de la región cuya área deseamos calcular*. Así, para (I)

deducimos los extremos de la curva o curvas que limitan la región S en el plano XOY, exactamente como lo hemos hecho en los artículos anteriores.

Antes de integrar, debe reducirse la expresión

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

a una función de x y y solamente, empleando la ecuación de la superficie curva.

Si conviene más proyectar el área buscada sobre el plano XOZ, empléese la fórmula

$$(J) \qquad A=\iint_S\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\,dx,$$

en donde los extremos de las integrales se hallan de las curvas que limitan la región S, que ahora es la proyección de la superficie cuya área se busca sobre el plano XOZ.

Análogamente, podemos emplear

$$(K) \qquad A=\iint_S\left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\,dy,$$

hallándose los extremos de las curvas que limitan la proyección de la superficie cuya área se busca sobre el plano YOZ.

En algunos problemas se pide el área de la porción de una superficie determinada por una segunda superficie que la corta. En tal caso, las derivadas parciales que se necesitan para sustituirse en la fórmula deben hallarse de la ecuación de la superficie cuya área parcial se desea.

Puesto que los extremos de las integrales se encuentran proyectando la superficie cuya área se busca sobre uno de los planos de coordenadas, debe recordarse que:

Para hallar la proyección sobre el plano XOY *de la superficie cuya área se busca, debe eliminarse* z *entre las ecuaciones de las superficies cuyas intersecciones forman el contorno de la superficie.*

Análogamente, para hallar la proyección sobre el plano XOZ *basta eliminar* y, *y para hallar la proyección sobre el plano* YOZ *basta eliminar* x.

Esta área de una superficie curva da un ejemplo más de la *integración de una función sobre una área dada*. Así, en (*I*) integramos la función

$$\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

sobre la proyección en el plano XOY de la superficie curva en cuestión.

Como ya se ha observado, (*J*) y (*K*) deben reducirse a

$$\int\int f(x,\, z)\,dz\,dx \quad \text{y} \quad \int\int f(y,\, z)\,dy\,dz,$$

respectivamente, por medio de la ecuación de la superficie en la que está la superficie curva en cuestión.

EJEMPLO 1. Hallar el área de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ por integración doble.

Solución. Sea ABC (fig. 246) un octavo de la superficie. En este caso:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z},$$

y $$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{z^2} = \frac{r^2}{r^2-x^2-y^2}.$$

La proyección sobre el plano XOY es AOB, una región limitada por $x = 0$ (es decir, OB), $y = 0$ (es decir, OA) y $x^2 + y^2 = r^2$ (es decir, BA).

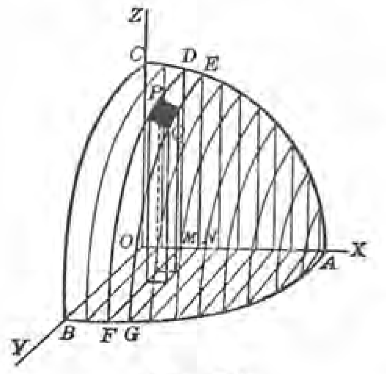


Fig. 246

Integrando en primer lugar con respecto a y, sumamos todos los elementos a lo largo de una tira (como $DEGF$) que se proyecta sobre el plano XOY en una tira (como $MNGF$); es decir, los extremos de y son cero y MF $(=\sqrt{r^2-x^2})$. Después, la integración con respecto a x suma todas esas tiras que componen la superficie ABC; es decir, los extremos de x son cero y OA $(= r)$. Sustituyendo en (*I*), obtenemos

$$\frac{A}{8} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{r\,dy\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = \frac{\pi r^2}{2},$$

o sea, $$A = 4\,\pi r^2.$$

EJEMPLO 2. El centro de una esfera de radio r está en la superficie de un cilindro recto, cuya base tiene un radio igual a $\frac{r}{2}$. Hallar el área de la parte de la superficie del cilindro que está dentro de la esfera.

Solución. Tomando el origen de coordenadas en el centro de la esfera, una generatriz del cilindro como el eje de las z y un diámetro de una sección recta del cilindro como eje de las x, la ecuación de la esfera es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

y la del cilindro

$$x^2 + y^2 = rx.$$

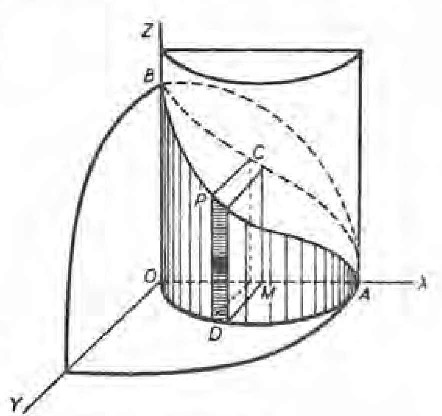


Fig. 247

Evidentemente, $ODAPB$ (fig. 247) es un cuarto de la superficie cilíndrica cuya área se busca. Puesto que esta superficie se proyecta en el arco semicircular ODA en el plano XOY, no hay región S de la que pudiéramos determinar los extremos en este plano: en consecuencia vamos a proyectar la superficie sobre el plano XOZ. Entonces la región S sobre la que integramos es $OACB$, que está limitada por $z = 0$ (es decir, OA), $x = 0$ (es decir, OB) y $z^2 + rx = r^2$ (es decir, ACB); la última ecuación se encuentra eliminando y entre las ecuaciones de las dos superficies. En primer lugar integramos con respecto a z; esto quiere decir que sumamos todos los elementos en una tira vertical (como PD), siendo los extremos de z cero y $\sqrt{r^2 - rx}$. Después, integrando con respecto a x, sumamos todas esas tiras, siendo los extremos de x cero y r.

Puesto que la superficie cuya área se busca está sobre el cilindro, es preciso hallar de la ecuación del cilindro las derivadas parciales que se necesitan para aplicar la fórmula (J).

Por tanto, $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{r - 2x}{2y}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Sustituyendo en (J),

$$\frac{A}{4} = \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \left[1 + \left(\frac{r - 2x}{2y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz\, dx.$$

Sustituyendo el valor de y en función de x obtenido de la ecuación del cilindro, resulta

$$A = 2r \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2 - rx}} \frac{dz\, dx}{\sqrt{rx - x^2}} = 2r \int_0^r \frac{\sqrt{r^2 - rx}}{\sqrt{rx - x^2}}\, dx$$

$$= 2r \int_0^r \sqrt{\frac{r}{x}}\, dx = 4r^2.$$

PROBLEMAS

1. En el ejemplo anterior, hallar el área de la parte de la superficie esférica interceptada por el cilindro.

$$Sol.\quad 4\,r\int_0^r\int_0^{\sqrt{rx-x^2}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=2\,(\pi-2)\,r^2.$$

2. Los ejes de dos cilindros circulares rectos iguales se cortan en ángulo recto. El radio de sus bases es r. Hallar el área de la superficie de uno de ellos que está dentro del otro.

SUGESTION. Tómense como ecuaciones de los cilindros

$$x^2+z^2=r^2 \quad \text{y} \quad x^2+y^2=r^2.$$

$$Sol.\quad 8\,r\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=8\,r^2.$$

3. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=2\,ay$ que está dentro de una hoja del cono $x^2+z^2=y^2$. *Sol.* $2\,\pi a^2$.

4. Hallar el área de la parte del cilindro $x^2+y^2=r^2$ que está entre el plano $z=mx$ y el plano XOY. *Sol.* $4\,r^2m$.

5. Hallar el área de la parte del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ limitada por los planos de coordenadas.

Sol. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$.

6. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=2\,ay$ que está dentro del paraboloide $by=x^2+z^2$. *Sol.* $2\,\pi ab$.

7. En el problema anterior, hallar el área de la porción del paraboloide que está dentro de la esfera.

8. Hallar el área de la superficie del paraboloide $y^2+z^2=4\,ax$ intersecada por el cilindro parabólico $y^2=ax$ y el plano $x=3\,a$. *Sol.* $\frac{56}{3}\pi a^2$.

9. En el problema anterior, hallar el área de la superficie del cilindro intersecada por el paraboloide y el plano.

Sol. $(13\sqrt{13}-1)\,\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

10. Hallar la superficie del cilindro $z^2+(x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha)^2=r^2$ situado en el primer octante.

SUGESTION. El eje de este cilindro es la recta $z=0$, $x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha=0$, y el radio de la base es r.

Sol. $\frac{r^2}{\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}$.

11. Hallar el área de la porción de la superficie del cilindro $y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por una curva cuya proyección sobre el plano XY es $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
Sol. $\frac{12}{5} a^2$.

12. Hallar por integración el área de la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ que está entre los planos paralelos $x = -8$ y $x = 6$.

257. Cálculo de volúmenes por integración triple. En muchos casos, si se dan las ecuaciones de las superficies que limitan un sólido, el volumen de éste puede calcularse por medio de tres integraciones sucesivas. El procedimiento no es más que una extensión de los métodos que ya se han empleado en este capítulo (entre otros, véase el Art. 247).

Supongamos que mediante planos paralelos a los planos de coordenadas, dividimos el sólido en paralelepípedos rectangulares de dimensiones Δz, Δy, Δx, y que, como elemento de volumen, tomamos el volumen $\Delta z \cdot \Delta y \cdot \Delta x$, de uno de estos paralelepípedos.

Si ahora sumamos todos esos elementos dentro de la región R limitada por las superficies dadas, sumando en primer lugar todos los elementos en una columna paralela a uno de los ejes de coordenadas, después sumando todas esas columnas en una rebanada paralela a uno de los planos de coordenadas que contenga ese eje y, por último, sumando todas esas rebanadas dentro de la región en cuestión, entonces el volumen V del sólido será el límite de esta suma triple cuando Δz, Δy, Δx tienden a cero. Es decir,

$$(1) \qquad V = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum_R\sum\sum \Delta z \, \Delta y \, \Delta x,$$

extendiéndose las sumas a toda la región R que limitan las superficies dadas. Este límite se representa por

$$(L) \qquad V = \int\int_R\int dz \, dy \, dx.$$

Por extensión del principio del Artículo 245, llamamos a (L) la *integral triple de la función* $f(x, y, z) = 1$ *extendida a la región* R. Muchos problemas se resuelven mediante la integración de una función *variable* de x, y, z extendida a una región dada. La notación es

$$(2) \qquad \int\int_R\int f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx,$$

que representa, por supuesto, el límite de una suma triple análoga a las sumas dobles que ya hemos discutido. En tratados más adelantados se demuestra que el valor de la integral triple (2) se determina por integración sucesiva. Los extremos o límites de las integrales se hallan de la misma manera que para los de (L).

Ejemplos sencillos de aplicación de (2) son las fórmulas para el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de un sólido homogéneo, a saber,

$$V\bar{x} = \int\int\int x\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\bar{y} = \int\int\int y\,dx\,dy\,dz,$$

$$V\bar{z} = \int\int\int z\,dx\,dy\,dz.$$

Estas se obtienen razonando como en el Artículo 249, empleando momentos de volumen. En los integrandos, (x, y, z) es un punto interior.

El centro de gravedad estará en cualquier plano de simetría.

EJEMPLO 1. Hallar el volumen de la porción del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

que está en el primer octante.

Solución. Sea O-ABC (fig. 248) la porción del elipsoide cuyo volumen se pide, siendo las ecuaciones de las superficies que los limitan

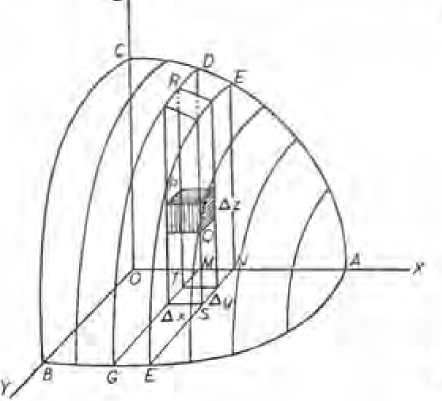


Fig. 248

$$(3) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ (= ABC),$$

$$(4) \qquad z = 0 \ (= OAB),$$

$$(5) \qquad y = 0 \ (= OAC),$$

$$(6) \qquad x = 0 \ (= OBC).$$

Trazando planos paralelos a los planos de coordenadas el cuerpo se divide en elementos que son paralelepípedos rectángulos de dimensiones Δx, Δy, Δz. En la figura, PQ es uno de estos elementos.

Integrando en primer lugar con respecto a z, sumamos todos esos elementos en una columna (como RS), siendo los extremos de z, según (4) y (3), cero y $TR = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, respectivamente, obtenidos despejando z.

Integrando después con respecto a y, sumamos todas esas columnas en una rebanada (como $DEMNGF$), siendo los extremos de y cero [según (5)] y $MG = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ (según la ecuación de la curva AGB, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, despejando y).

Por último, integrando con respecto a x, sumamos todas esas rebanadas dentro de la región entera O-ABC, siendo los extremos de x, cero [según (6)] y $OA = a$.

Luego,
$$V = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz\, dy\, dx$$
$$= \frac{\pi cb}{4a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi abc}{6}.$$

Por tanto, el volumen del elipsoide entero es $\frac{4\pi abc}{3}$.

EJEMPLO 2. Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies

(7) $$z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2,$$

(8) $$z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2.$$

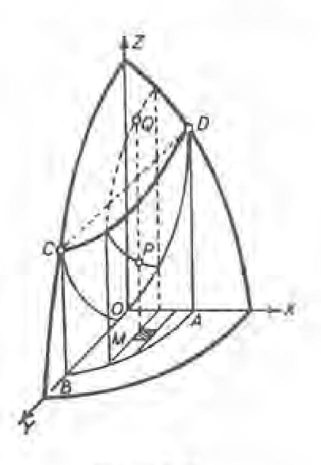


Fig. 249

Solución. Las superficies son los paraboloides elípticos de la figura 249. Eliminando z entre (7) y (8), encontramos

(9) $$4x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 4,$$

que es la ecuación del cilindro $ABCD$ (véase la figura) que pasa por la curva de intersección de (7) y (8) y tiene las generatrices paralelas a OZ.

Tenemos

(10) $$V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} \int_{3x^2+\frac{1}{4}y^2}^{4-x^2-\frac{1}{4}y^2} dz\, dy\, dx.$$

Los extremos se determinan como sigue:

Integrando con respecto a z, sumamos los elementos de volumen $dz\, dy\, dx$ en una columna de base $dy\, dx$ desde la superficie (8) hasta la superficie (7) (de MP a MQ en la figura). Por consiguiente, los extremos de z se dan por los segundos miembros de estas ecuaciones.

Así encontramos

(11) $$V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{2(1-x^2)}} (4 - 4x^2 - \tfrac{1}{2}y^2)\, dy\, dx.$$

Los extremos para esta integral doble son los correspondientes para la región OAB, la porción de la base del cilindro (9) que está en el primer cuadrante. Ejecutando las operaciones en (11), hallamos $V = 4\pi\sqrt{2} = 17,77$ unidades cúbicas.

Puede ser que el problema dado sea tal que la primera integración deba ejecutarse con respecto a x o y, no con respecto a z como arriba. Entonces los extremos deben determinarse conforme a la discusión anterior.

258. Cálculo de volúmenes, empleando coordenadas cilíndricas. En muchos problemas que implican integraciones, el trabajo se simplifica bastante empleando coordenadas cilíndricas (ϱ, θ, z) según se definen en (7) del Artículo 4. A menudo la ecuación cilíndrica de cualquiera de las superficies que limitan el cuerpo puede escribirse directamente a partir de su definición. En todo caso puede hallarse a partir de su ecuación cartesiana por medio de la sustitución

$$(1) \qquad x = \varrho \cos \theta, \quad y = \varrho \operatorname{sen} \theta.$$

Las coordenadas cilíndricas son útiles, sobre todo, cuando una de las superficies que limitan el cuerpo es una superficie de revolución. En efecto, la ecuación de una superficie, cuando el eje es OZ, tiene la forma $z = f(\varrho)$; es decir, no aparece la coordenada θ.

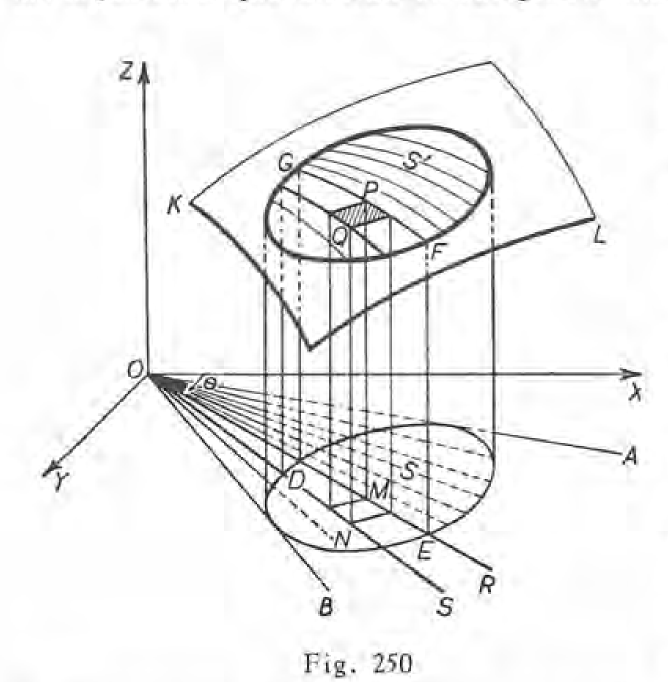


Fig. 250

Volumen bajo una superficie. Sea

$$(2) \qquad z = F(\varrho, \theta)$$

la ecuación cilíndrica de una superficie, como KL de la figura 250. Deseamos hallar el volumen del sólido limitado arriba por esta superficie, debajo por el plano XOY y lateralmente por la superficie cilíndrica cuya sección recta por el plano XOY es la región S. Esta superficie cilíndrica interseca en la superficie (2) la región S'.

Para ello, dividamos el sólido en elementos de volumen como sigue: dividamos S en elementos de área ΔA trazando rectas radiales desde O y arcos de círculos de centros O, como en el Artículo 254. Hagamos pasar planos por las rectas radiales y OZ. Hagamos pasar por los arcos circulares dentro de S superficies cilíndricas de revolución con eje OZ. De esta manera el sólido queda dividido en columnas tales como $MNPQ$, en donde área $MN = \Delta A$ y $MP = z$. Así el elemento de volumen es un prisma recto con base ΔA y altura z. Por tanto,

$$\Delta V = z\,\Delta A. \tag{3}$$

El volumen V se halla sumando los prismas (3) cuyas bases están dentro de S, y determinando el límite de esta suma cuando el número de las rectas radiales y los arcos circulares dentro de S aumenta infinitamente de manera que $\Delta\rho \rightarrow 0$ y $\Delta\theta \rightarrow 0$. Es decir,

$$V = \lim_{\substack{\Delta\rho \rightarrow 0 \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} \sum\sum z\,\Delta A. \tag{4}$$

Ahora demostremos que el límite doble en (4) puede encontrarse por integración sucesiva. (Compárese con el Artículo 244.) Esto se hace hallando el volumen aproximado de una rebanada del sólido incluída entre dos planos radiales como ROZ y SOZ, y después tomando el límite de la suma de estas rebanadas.

Sea $DEFG$ la sección del sólido en el plano ROZ. Los valores de z a lo largo de la curva GPF se dan por (2) cuando θ (= ángulo XOR) se mantiene fijo. En el plano ROZ tomemos OR y OZ como ejes rectangulares, y (ρ, z) como coordenadas. Sea $(\bar{\rho}, \bar{z})$ el centro de gravedad de la superficie $DEFG$. Entonces, según (2) y (3) del Artículo 177,

$$\bar{\rho}\cdot \text{área } DEFG = \int_{OD}^{OE} \rho z\,d\rho = \int_{OD}^{OE} \rho F(\rho, \theta)d\rho.$$

La integral será una función de θ.

Hagamos ahora girar el recinto $DEFG$ alrededor de OZ. Según el Art. 250, el volumen del sólido así engendrado es $2\pi\bar{\rho}\cdot$ área $DEFG$. Los planos ROZ y SOZ cortan de este sólido de revolución un prisma cuadrangular cuyo volumen es $\Delta\theta\bar{\rho}\cdot$ área $DEFG$, puesto que el ángulo $ROS = \Delta\theta$ (radianes). Por tanto,

$$\Delta\theta \int_{OD}^{OE} \rho\, F(\rho, \theta)d\rho \tag{5}$$

es igual, aproximadamente, al volumen de la rebanada del sólido incluída entre los planos ROZ y SOZ. El límite de la suma de los prismas (5) cuando $\Delta\theta \to 0$ es el volumen exacto.

Por tanto,

$$(6) \qquad V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta,$$

en donde

$$\alpha = \angle XOA, \quad \beta = \angle XOB, \quad \rho_1 = OD = f_1(\theta), \quad \rho_2 = OE = f_2(\theta),$$

valores que han de determinarse según las ecuaciones polares de las curvas que limitan la región S.

El elemento de la integral en (6), a saber,

$$F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta = z\rho\, d\rho\, d\theta,$$

puede concebirse como el volumen de un prisma recto de altura z y base de área $\rho\, d\rho\, d\theta$. Así se reemplaza ΔA en (3) por $\rho\, \Delta\rho\, \Delta\theta$, como en el Artículo 254.

Ahora tenemos la fórmula *

$$(M) \qquad V = \int\int_S z\rho\, d\rho\, d\theta = \int\int_S F(\rho, \theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

para el volumen bajo la superficie (2) y los extremos de las integrales se hallan como se hallaron en el Artículo 254 los extremos para el área de la región S.

De (M) y (4) podemos deducir (2) del Artículo 254.

EJEMPLO 1. Demostrar que el volumen del sólido limitado por el elipsoide de revolución $b^2(x^2+y^2) + a^2z^2 = a^2b^2$ y la superficie cilíndrica $x^2+y^2-ax=0$ viene dado por la fórmula

$$(7) \qquad V = 4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Determinar el valor de esta integral.

Solución. Según (1), la ecuación cilíndrica del elipsoide es

$$b^2\rho^2 + a^2z^2 = a^2b^2.$$

Por tanto,

$$(8) \qquad z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

---

* El *orden* de la integración no importa. La demostración se omite.

La ecuación polar de la circunferencia $x^2 + y^2 - ax = 0$ que limita la región S en el plano XY es, según (1),

(9) $$\varrho = a \cos \theta.$$

Para el semicírculo los extremos de ϱ son cero y $a \cos \theta$, cuando θ se mantiene fijo; y para θ, cero y $\frac{1}{2}\pi$. Sustituyendo en (M) el valor de z según (8), y los extremos mencionados, obtenemos (7). Integrando

$$V = \frac{2}{9}\, a^2 b\,(3\pi - 4) = 1{,}206\, a^2 b.$$

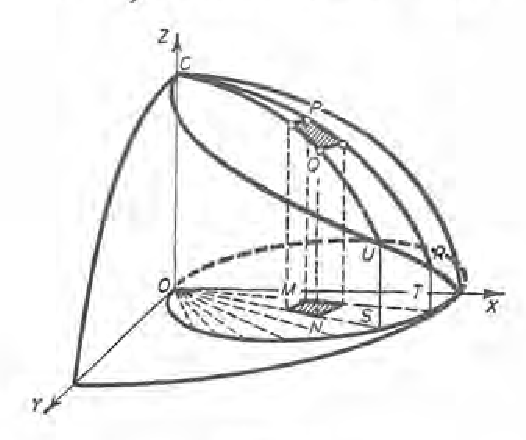


Fig. 251

Cálculo de volúmenes por integración triple. El elemento de volumen ΔV será ahora un *elemento* del prisma recto que se empleó en (3); es decir, un prisma recto con base ΔA y altura Δz. El sólido se divide en tales elementos haciendo pasar por él los planos y superficies cilíndricas que se emplearon en la figura 250, y también planos paralelos al plano XOY a distancias iguales a Δz. Ahora tenemos

(10) $$\Delta V = \Delta z\, \Delta A.$$

Sumando, y tomando el límite cuando $\Delta z \to 0$, $\Delta\varrho \to 0$, $\Delta\theta \to 0$, tenemos

(N) $$V = \int\int\int \varrho\, dz\, d\varrho\, d\theta,$$

puesto que ΔA puede reemplazarse por $\varrho\, \Delta\varrho\, \Delta\theta$ como antes.

Las fórmulas (3) del Artículo 257 para el centro de gravedad se convierten en

$$V\bar{x} = \int\int\int \varrho^2 \cos\theta\, dz\, d\varrho\, d\theta, \quad V\bar{y} = \int\int\int \varrho^2 \operatorname{sen}\theta\, dz\, d\varrho\, d\theta,$$

$$V\bar{z} = \int\int\int \varrho z\, dz\, d\varrho\, d\theta,$$

cuando se emplean las coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 2. Hallar el volumen del sólido cuya superficie superior está sobre la esfera

$$(11) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 8$$

y cuya superficie inferior está sobre el paraboloide de revolución

$$(12) \qquad x^2 + y^2 = 2z.$$

Solución. La figura 252 muestra la esfera y el paraboloide en el primer octante. La curva de intersección AB está en el plano $z = 2$. Su proyección DE sobre el plano XY es la circunferencia

$$(13) \qquad x^2 + y^2 = 4.$$

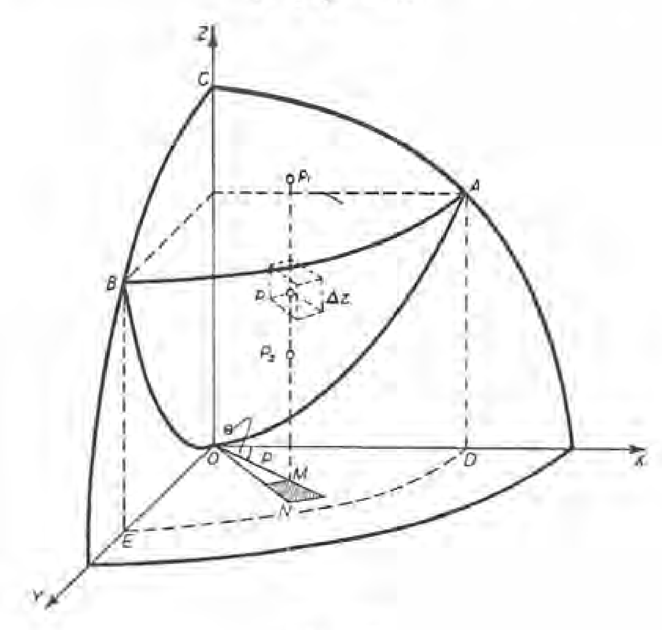


Fig. 252

Las ecuaciones cilíndricas son, según (1),

$$(14) \qquad \rho^2 + z^2 = 8 \quad [\text{la esfera } (11)];$$

$$(15) \qquad \rho^2 = 2z \quad [\text{el paraboloide } (12)];$$

$$(16) \qquad \rho = 2 \quad [\text{la circunferencia } (12)].$$

Un elemento de área ΔA en el círculo (16) ha sido dibujado en $M(\rho, \theta)$ en la figura. Un elemento de volumen ΔV se muestra en $P(\rho, \theta, z)$.

Tenemos, según (N),

$$(17) \qquad V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{\sqrt{8-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta.$$

Los extremos de las integrales se hallan como sigue: Integrando con respecto a z (manteniendo fijos ρ y θ), sumamos los elementos de volumen (10) en una columna desde la superficie (15) hasta la superficie (14) (de MP_2 a MP_1 en la figura). Según (15), $z = MP_2 = \frac{1}{2}\rho^2$; según (14), $z = MP_1 = \sqrt{8 - \rho^2}$;

estos son los extremos de z. Los extremos de ϱ y θ son los correspondientes al círculo (16). La integración con respecto a ϱ da la suma de las columnas en la rebanada incluída entre el plano que pasa por OZ y OM y el que pasa por OZ y ON. La integración final suma estas rebanadas.

Integrando en (17),

$$V = \frac{4}{3}\pi(8\sqrt{2} - 7) = 18{,}1.$$

En los siguientes problemas, las fórmulas (M) y (N) deben emplearse cuando la ecuaciones de las superficies que limitan al cuerpo vienen dadas en coordenadas cilíndricas. Si para trazar una figura, se necesitan las ecuaciones rectangulares correspondientes, pueden obtenerse por medio de la transformación

$$(18) \qquad \varrho^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \text{arc tg}\,\frac{y}{x}.$$

Pueden agregarse a éstas las siguientes:

$$(19) \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

PROBLEMAS

1. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo de la superficie cilíndrica $x^2 + z = 4$, arriba del plano $x + z = 2$ e incluído entre los planos $y = 0$, $y = 3$.

Sol. $V = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_{2-x}^{4-x^2} dz\,dx\,dy = 13{,}5$ unidades cúbicas.

2. Resolver el ejemplo 2 del Artículo 247 empleando coordenadas cilíndricas.

Sol. $V = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2a\cos\theta} \frac{\varrho^3}{a}\,d\varrho\,d\theta = \frac{3}{2}\pi a^3.$

3. Hallar el volumen del sólido limitado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$ y debajo por el paraboloide elíptico $z = 3x^2 + y^2$.

Sol. $V = 4\int_0^1 \int_0^{2\sqrt{1-x^2}} \int_{3x^2+y^2}^{4-x^2} dz\,dy\,dx = 4\pi.$

4. Dos planos se cortan bajo un ángulo de α radianes, en un diámetro de una esfera de radio a. Hallar el volumen de la *cuña esférica* incluída entre los planos y la superficie esférica, empleando coordenadas cilíndricas.

Sol. $\frac{2}{3}\alpha a^3$.

5. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo del plano $z = x$ y arriba del paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$. *Sol.* $\frac{1}{32}\pi$.

6. Resolver el problema 5 empleando coordenadas cilíndricas.

$$Sol. \quad V = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\cos\theta}\int_{\rho^2}^{\rho\cos\theta} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \tfrac{1}{32}\pi.$$

7. Hallar el volumen del sólido limitado por la esfera $\rho^2 + z^2 = a^2$ dentro del cilindro $\rho = a \cos\theta$. *Sol.* $\frac{2}{3}a^3(\pi - \frac{4}{3})$.

8. Hallar el volumen del espacio comprendido arriba de $z = 0$, debajo del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2\,ax$, empleando coordenadas cilíndricas. *Sol.* $\frac{32}{9}a^3$.

9. Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x + 1$ y $2\,z = x^2 + y^2$. *Sol.* $\frac{3}{4}\pi$.

10. En el problema 3, demostrar que la integración con respecto a z da (sin integración adicional) $V = 4\,A - 4\,I_y - I_x$, en donde A es el área de la elipse $4\,x^2 + y^2 = 4$, I_x e I_y son los momentos de inercia para esta elipse dados por las fórmulas (E) del Artículo 252.

11. Hallar el volumen del espacio comprendido debajo del plano $2\,z = 4 + \rho\cos\theta$, arriba de $z = 0$ y dentro del cilindro $\rho = 2\cos\theta$. *Sol.* $\frac{5}{2}\pi$.

12. Un sólido está limitado por el paraboloide de revolución $az = \rho^2$ y el plano $z = c$. Hallar el centro de gravedad. *Sol.* $(0,\ 0,\ \frac{2}{3}c)$.

13. Un sólido está limitado por el hiperboloide $z^2 = a^2 + \rho^2$ y la hoja superior del cono $z^2 = 2\,\rho^2$. Hallar el volumen. *Sol.* $\frac{2}{3}\pi a^3(\sqrt{2} - 1)$.

14. Hallar el centro de gravedad del sólido del problema 13. *Sol.* $[0,\ 0,\ \frac{3}{8}a(\sqrt{2} + 1)]$.

15. Hallar el centro de gravedad del sólido del problema 1. *Sol.* $(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{12}{5})$.

16. Hallar el centro de gravedad del sólido del problema 2. *Sol.* $(\frac{4}{3}a,\ 0,\ \frac{10}{9}a)$.

17. Hallar el centro de gravedad del sólido del problema 8.

18. Hallar el volumen del sólido limitado debajo por $z = 0$, arriba por el cono $z = a - \rho$ y lateralmente por $\rho = a\cos\theta$. *Sol.* $\frac{1}{36}a^3(9\pi - 16)$.

19. Hallar el centro de gravedad del sólido del problema anterior.

20. Hallar el volumen del sólido debajo de la superficie esférica $\rho^2 + z^2 = 25$ y arriba de la hoja superior de la superficie cónica $z = \rho + 1$.

21. Comparar el ejemplo 3 del Artículo 165 y el ejemplo 1 del Artículo 257, y deducir (N) del Artículo 165 de (L) del Artículo 257.

22. Deducir la fórmula (2) del Artículo 178 de la primera fórmula de (3) del Artículo 257.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Hallar el volumen del sólido limitado arriba por la esfera $\varrho^2 + z^2 = r^2$, debajo por el cono $z = \varrho \operatorname{ctg} \phi$, e incluído entre los planos $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, siendo ϕ y β ángulos agudos. (El sólido es parte de una cuña esférica, como $O\text{-}SQN$ de la figura 197, cuando se traza OQ.)

$$Sol. \quad \frac{1}{3} r^3 \Delta\beta \,(1 - \cos\phi).$$

2. Hallar (sin integración) el volumen del sólido limitado por la esfera $\varrho^2 + z^2 = r^2$, los conos $z = \varrho \operatorname{ctg} \phi$ y $z = \varrho \operatorname{ctg} (\phi + \Delta\phi)$ y los planos $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, empleando el resultado del problema anterior. (El sólido es uno como $O\text{-}P_1RQS$, de la figura 197, cuando se trazan OR y OQ.)

$$Sol. \quad \frac{2}{3} r^3 \Delta\beta \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\Delta\phi.$$

3. Hallar (sin integración) el volumen del sólido limitado por $z = \varrho \operatorname{ctg}\phi$, $z = \varrho \operatorname{ctg}(\phi + \Delta\phi)$, $\theta = \beta$, $\theta = \beta + \Delta\beta$, e incluído entre las esferas $\varrho^2 + z^2 = r^2$, $\varrho^2 + z^2 = (r + \Delta r)^2$, empleando el resultado del problema 2.

$$Sol. \quad 2\,\Delta\beta\,\Delta r \operatorname{sen}\left(\phi + \frac{1}{2}\Delta\phi\right) \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\phi \left(r^2 + r\,\Delta r + \frac{1}{3}\Delta r^2\right).$$

(El sólido se obtiene de la figura 197 prolongando cada uno de los radios OP_1, OR, OQ, OS, una distancia Δr hasta P_1', R', Q', S' sobre la esfera $\varrho^2 + z^2 = (r + \Delta r)^2$. Los conos cortan esta esfera según los arcos circulares $P_1'R'$ y $Q'S'$; los planos la cortan según los arcos de círculos máximos $P_1'S'$, $R'Q'$. El sólido tiene los vértices $P_1RQS\text{-}P_1'R'Q'S'$.)

4. El sólido del problema 3 es el elemento de volumen ΔV cuando se emplean coordenadas esféricas, (8) del Artículo 4, sustituyendo β por θ. Entonces un vértice P de ΔV tiene las coordenadas esféricas (r, ϕ, θ). Demostrar del problema 3 que

$$\lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta\theta \to 0 \\ \Delta\phi \to 0}} \frac{\Delta V}{r^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta r\,\Delta\phi\,\Delta\theta} = 1.$$

Luego ΔV difiere de $r^2 \operatorname{sen}\phi\,\Delta r\,\Delta\phi\,\Delta\theta$ en un infinitésimo de orden superior (Art. 99).

5. En el sólido del problema anterior, demostrar que las aristas de ΔV que se encuentran en un vértice cualquiera son mutuamente perpendiculares, y que las longitudes de las que se cortan en (r, ϕ, θ) son, respectivamente, Δr, $r\,\Delta\phi$, $r \operatorname{sen}\phi\,\Delta\theta$.

6. Describir los tres sistemas de superficies (esferas, conos y planos) que han de trazarse para dividir un sólido R en elementos de volumen ΔV (problema 4) cuando se emplean coordenadas esféricas. Sea (r, ϕ, θ) un punto cualquiera de ΔV. Entonces escribimos

$$\lim_{\substack{\Delta r \to 0 \\ \Delta\theta \to 0 \\ \Delta\phi \to 0}} \sum\sum\sum F(r, \phi, \theta)\,\Delta V = \iiint_R F(r, \phi, \theta)\, r^2 \operatorname{sen}\phi\, dr\, d\phi\, d\theta.$$

En el primer miembro, ΔV puede reemplazarse por $r^2 \operatorname{sen} \phi \, \Delta r \, \Delta\phi \, \Delta\theta$ (véase el problema 4); es decir, por el producto de las tres aristas del problema 5. El segundo miembro se calcula por integración sucesiva. (La demostración se omite.)

7. Efectuar la integración del problema anterior si $F(r, \phi, \theta) = r$ y si R es la esfera $r = 2a \cos \phi$, es decir, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$.

$$Sol. \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2a \cos \phi} r^3 \operatorname{sen} \phi \, dr \, d\phi \, d\theta = \frac{8}{5}\pi a^4.$$

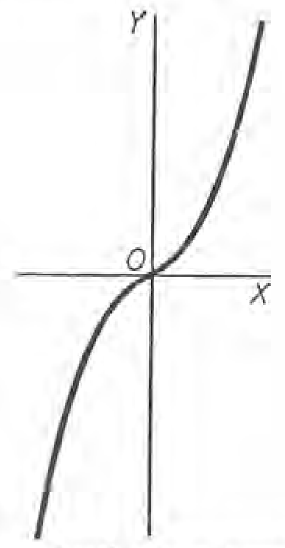
8. Efectuar la integración del problema 6 si $F(r, \phi, \theta) = r^2 \cos \phi$ y si R es la región $r = 2a \cos \phi$.

Sol. $\frac{64}{35}\pi a^5$.

CAPITULO XXVI

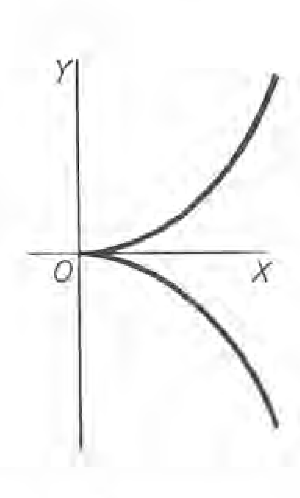
CURVAS IMPORTANTES

Para comodidad del estudiante, damos aquí las ecuaciones y gráficas de las curvas más comunes que se emplean en el texto.



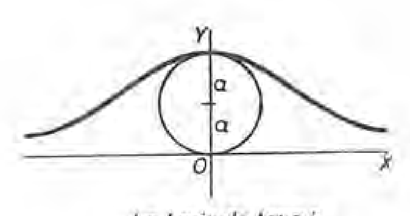
Parábola cúbica

$$y = ax^3.$$



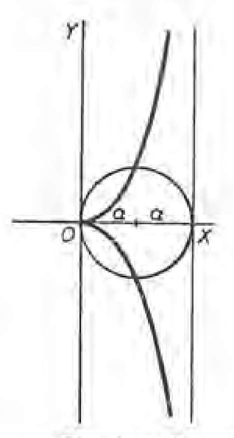
Parábola semicúbica

$$y^2 = ax^3.$$



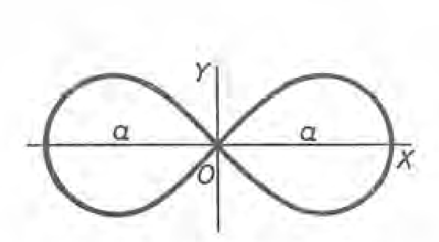
La bruja de Agnesi

$$x^2y = 4\,a^2\,(2\,a - y)$$



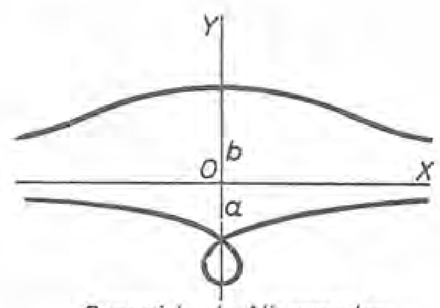
Cisoide de Diocles

$$y^2\,(2\,a - x) = x^3.$$



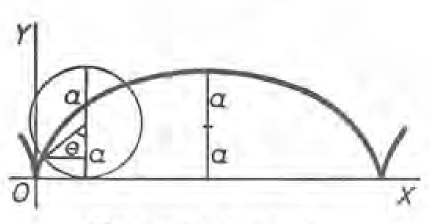
Lemniscata de Bernoulli

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$$



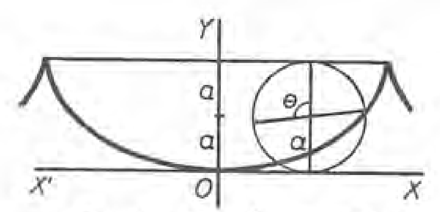
Concoide de Nicomedes

$$x^2y^2 = (y + a)^2(b^2 - y^2).$$
(En la figura, $b > a$.)



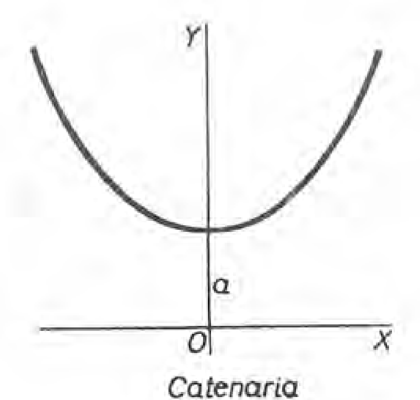
Cicloide ordinaria

$$x = a \text{ arc vers } \frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$



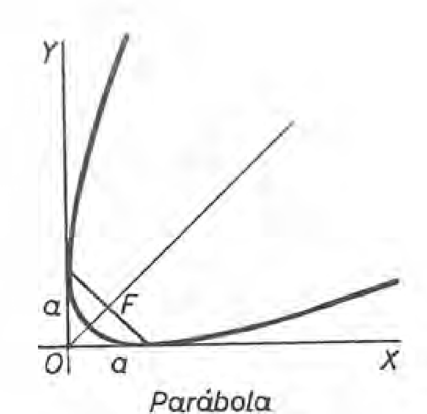
Cicloide con vértice en el origen

$$x = a \text{ arc vers } \frac{y}{a} + \sqrt{2ay - y^2}.$$
$$\begin{cases} x = a(\theta + \operatorname{sen} \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta). \end{cases}$$



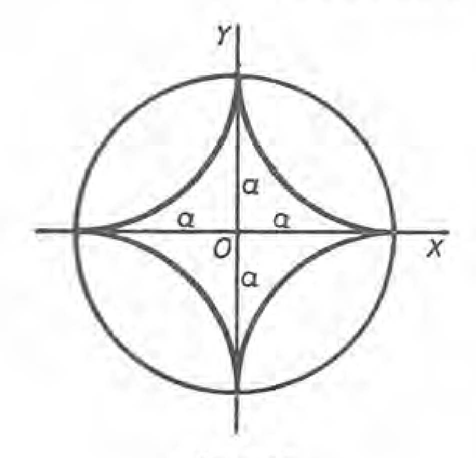
Catenaria

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \cosh \frac{x}{a}.$$



Parábola

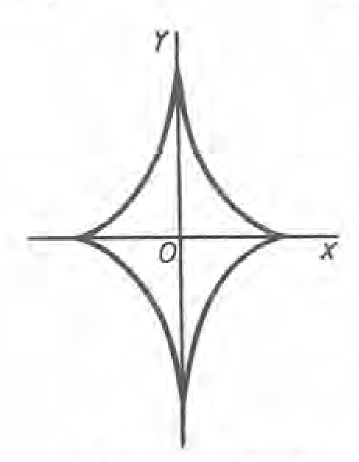
$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$$



Astroide

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

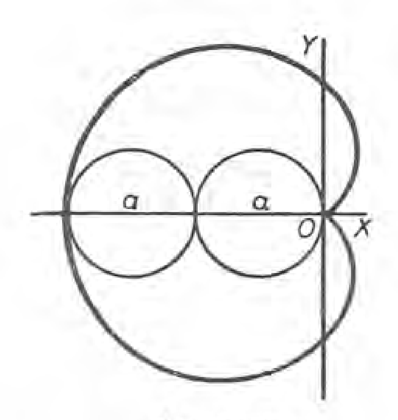
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = a \operatorname{sen}^3 \theta. \end{cases}$$



Evoluta de la elipse

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

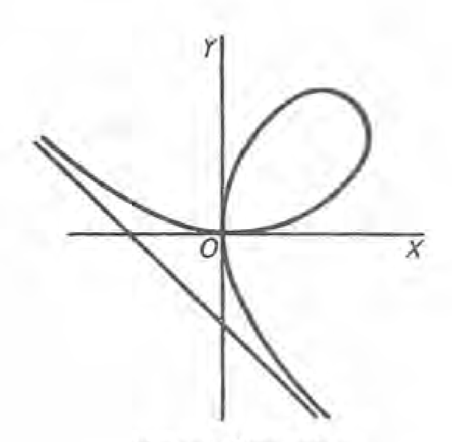
$$\begin{cases} x = a \cos^3 \theta, \\ y = b \operatorname{sen}^3 \theta. \end{cases}$$



Cardioide

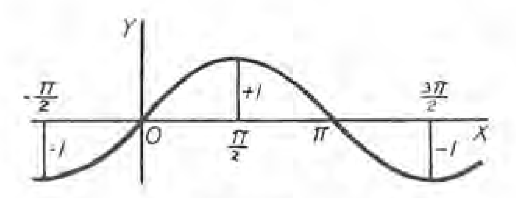
$$x^2 + y^2 + ax = a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\rho = a(1 - \cos\theta).$$



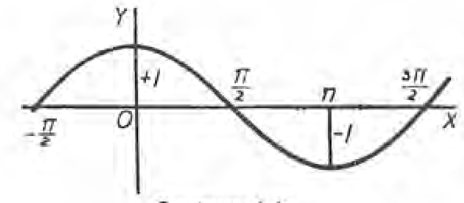
Hoja de Descartes

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$



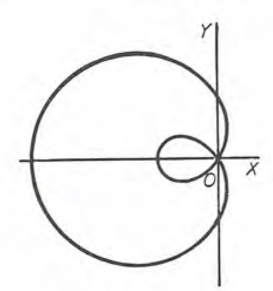
Sinusoide

$$y = \operatorname{sen} x.$$



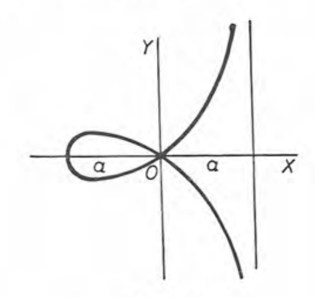
Cosinusoide

$$y = \cos x.$$



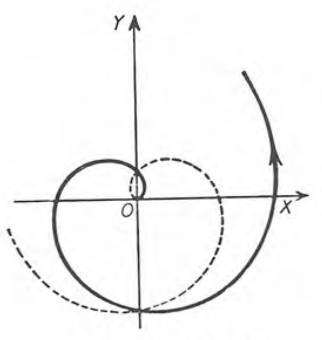
Caracol de Pascal

$\varrho = b - a \cos \theta$.
(En la figura , $b < a$.)



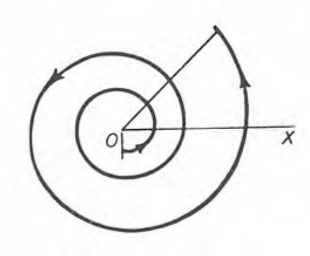
Estrofoide

$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x} .$$



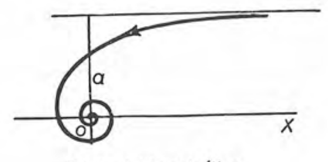
Espiral de Arquímedes

$\varrho = a\theta$.



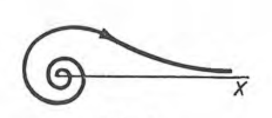
Espiral logarítmica

$\varrho = e^{a\theta}$, o sea ,
$\log \varrho = a\theta$.



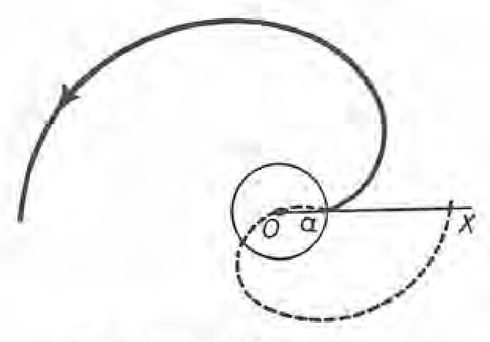
Espiral hiperbólica

$\varrho\theta = a$.



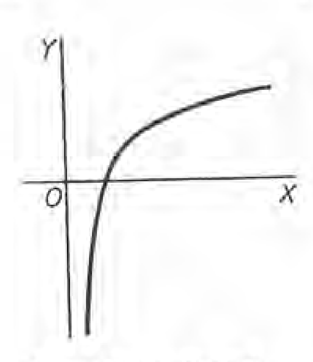
Lituus

$\varrho^2\theta = a^2$.



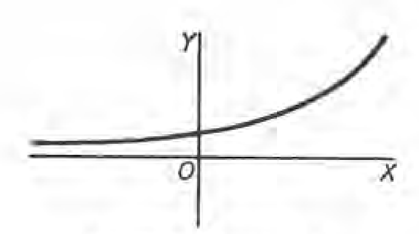
Espiral parabólica

$$(\varrho - a)^2 = 4\,ac\theta$$



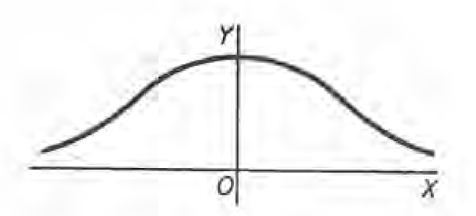
Curva logarítmica

$$y = \log x$$



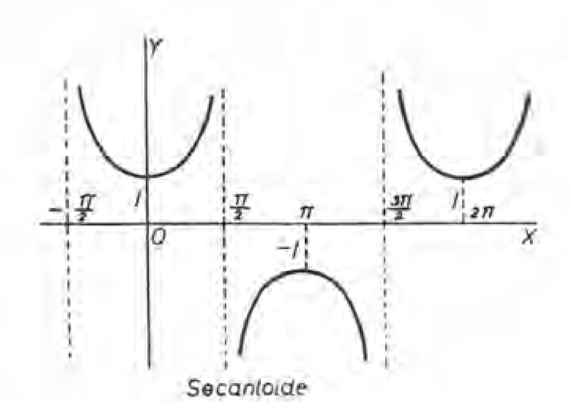
Curva exponencial

$$y = e^x$$



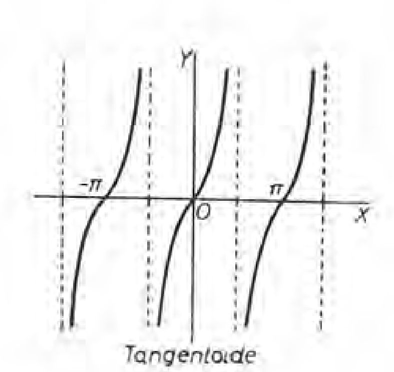
Curva de probabilidad (Curva de Gauss, Curva de campana)

$$y = e^{-x^2}$$



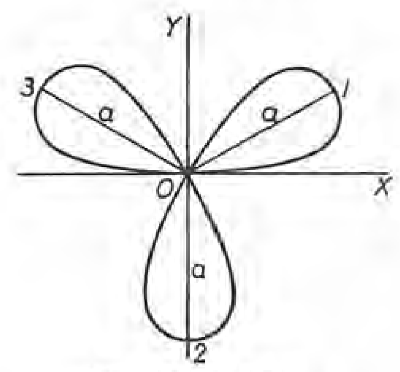
Secantoide

$$y = \sec x$$



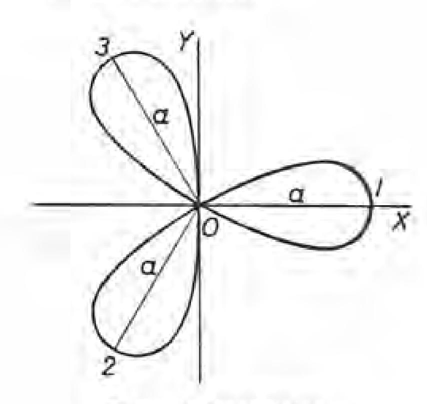
Tangentoide

$$y = \operatorname{tg} x$$



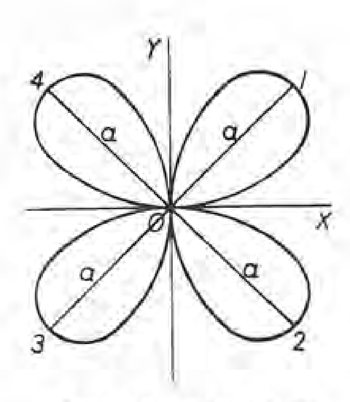
Rosa de tres hojas

$\rho = a \operatorname{sen} 3\theta$



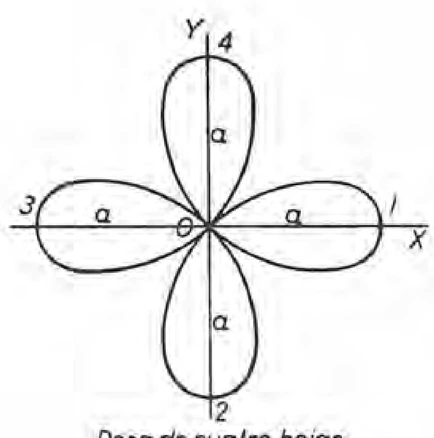
Rosa de tres hojas

$\rho = a \cos 3\theta$



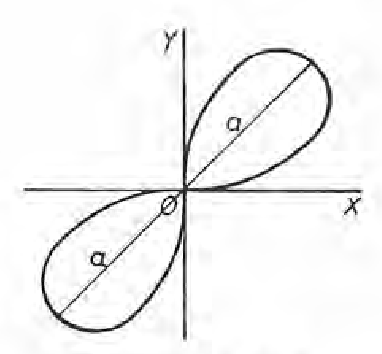
Rosa de cuatro hojas

$\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$



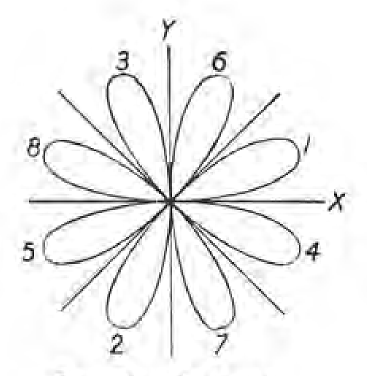
Rosa de cuatro hojas

$\rho = a \cos 2\theta$



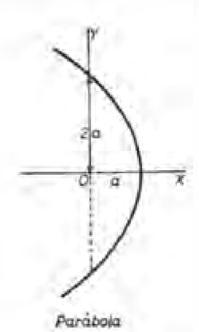
Rosa de dos hojas

$\rho^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$



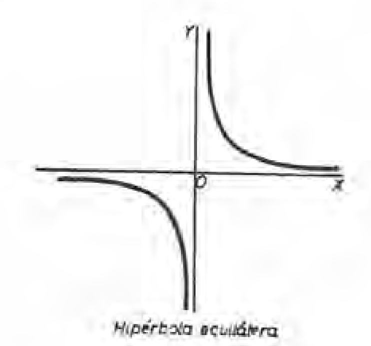
Rosa de ocho hojas

$\rho = a \operatorname{sen} 4\theta$



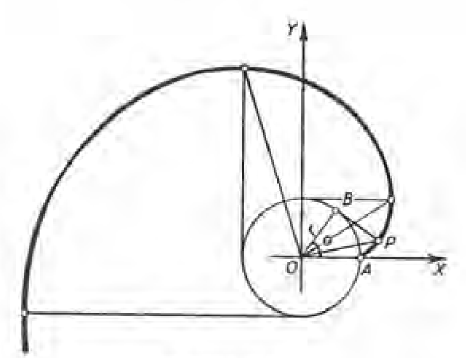
Parábola

$$\varrho = a \sec^2 \frac{\theta}{2}$$



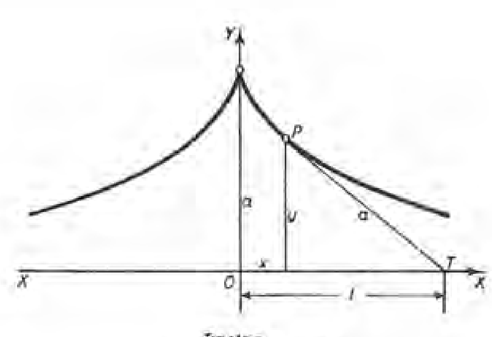
Hipérbola equilátera

$$xy = a$$



Evolvente del círculo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + r\theta \operatorname{sen}\theta\,, \\ y = r \operatorname{sen}\theta - r\theta\cos\theta \end{cases}$$



Tractriz
(Tractriz de Huygens)

$$x = a \operatorname{sech}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\begin{cases} x = t - a \operatorname{tgh}\dfrac{t}{a}\,, \\ y = a \operatorname{sech}\dfrac{t}{a} \end{cases}$$

CAPITULO XXVII

TABLA DE INTEGRALES

Algunas formas elementales

1. $\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x) + C.$

2. $\int a\,du = a \int du.$

3. $\int (du \pm dv \pm dw \pm \ldots) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \ldots.$

4. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$ $\qquad (n \neq -1)$

5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$

Formas racionales que contienen $a + bu$

(Véanse también las fórmulas 96-104 de reducción para las integrales binomias)

6. $\int (a + bu)^n\,du = \frac{(a + bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C.$ $\qquad (n \neq -1)$

7. $\int \frac{du}{a + bu} = \frac{1}{b} \ln (a + bu) + C.$

8. $\int \frac{u\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^2} [a + bu - a \ln (a + bu)] + C.$

9. $\int \frac{u^2\,du}{a + bu} = \frac{1}{b^3} [\tfrac{1}{2} (a + bu)^2 - 2a(a + bu) + a^2 \ln (a + bu)] + C.$

10. $\int \frac{u\,du}{(a + bu)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a + bu} + \ln (a + bu) \right] + C.$

11. $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left[a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2\,a \ln\,(a+bu)\right] + C.$

12. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bu} + \frac{a}{2\,(a+bu)^2}\right] + C.$

13. $\int \frac{du}{u\,(a+bu)} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

14. $\int \frac{du}{u^2\,(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

15. $\int \frac{du}{u\,(a+bu)^2} = \frac{1}{a\,(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left(\frac{a+bu}{u}\right) + C.$

Formas racionales que contienen $a^2 \pm b^2u^2$

16. $\int \frac{du}{a^2+b^2u^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{bu}{a} + C.$

17. $\int \frac{du}{a^2-b^2u^2} = \frac{1}{2\,ab}\ln\left(\frac{a+bu}{a-bu}\right) + C.$ $\qquad (a^2 > b^2u^2)$

$\int \frac{du}{b^2u^2-a^2} = \frac{1}{2\,ab}\ln\left(\frac{bu-a}{bu+a}\right) + C.$ $\qquad (a^2 < b^2u^2)$

18. $\int u\,(a^2 \pm b^2u^2)^n\,du = \frac{(a^2 \pm b^2u^2)^{n+1}}{\pm\,2\,b^2\,(n+1)} + C.$ $\qquad (n \neq -1)$

19. $\int \frac{u\,du}{a^2 \pm b^2u^2} = \frac{1}{\pm\,2\,b^2}\ln\,(a^2 \pm b^2u^2) + C.$

20. $\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m-1}}{\pm\,b^2\,(m-2\,p+1)\,(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$

$\qquad - \frac{a^2\,(m-1)}{\pm\,b^2\,(m-2\,p+1)}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p}.$

21. $\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{u^{m+1}}{2\,a^2\,(p-1)\,(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$

$\qquad - \frac{m-2\,p+3}{2\,a^2\,(p-1)}\int \frac{u^m\,du}{(a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}.$

22. $\int \frac{du}{u\,(a^2 \pm b^2u^2)} = \frac{1}{2\,a^2}\ln\left(\frac{u^2}{a^2 \pm b^2u^2}\right) + C.$

23. $$\int \frac{du}{u^m (a^2 \pm b^2u^2)^p} = -\frac{1}{a^2 (m-1) u^{m-1} (a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$$
$$- \frac{\pm b^2 (m+2p-3)}{a^2 (m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2} (a^2 \pm b^2u^2)^p}.$$

24. $$\int \frac{du}{u^m (a^2 \pm b^2u^2)^p} = \frac{1}{2a^2 (p-1) u^{m-1} (a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}$$
$$+ \frac{m+2p-3}{2a^2 (p-1)} \int \frac{du}{u^m (a^2 \pm b^2u^2)^{p-1}}.$$

Formas que contienen $\sqrt{a+bu}$

Los radicales pueden quitarse en el integrando haciendo $a + bu = v^2$. Véanse también las fórmulas 96-104 de reducción para las integrales binomias

25. $$\int u\sqrt{a+bu}\,du = -\frac{2(2a-3bu)(a+bu)^{3/2}}{15b^2} + C.$$

26. $$\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2(8a^2-12abu+15b^2u^2)(a+bu)^{3/2}}{105b^3} + C.$$

27. $$\int u^m\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^m(a+bu)^{3/2}}{b(2m+3)} - \frac{2am}{b(2m+3)}\int u^{m-1}\sqrt{a+bu}\,du.$$

28. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = -\frac{2(2a-bu)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C.$$

29. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2(8a^2-4abu+3b^2u^2)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C.$$

30. $$\int \frac{u^m\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^m\sqrt{a+bu}}{b(2m+1)} - \frac{2am}{b(2m+1)}\int \frac{u^{m-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}.$$

31. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right) + C, \text{ para } a > 0.$$

32. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, \text{ para } a < 0.$$

33. $$\int \frac{du}{u^m\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(2m-3)}{2a(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{a+bu}}.$$

34. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}.$$

35. $$\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^m} = -\frac{(a+bu)^{3/2}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(2m-5)}{2a(m-1)}\int \frac{\sqrt{a+bu}\,du}{u^{m-1}}.$$

Formas que contienen $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

En este grupo de fórmulas podemos reemplazar

$$\ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{u}{a},$$

$$\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) \text{ por } \cosh^{-1} \frac{u}{a},$$

$$\ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) \text{ por } \operatorname{senh}^{-1} \frac{a}{u}.$$

36. $$\int (u^2 \pm a^2)^{1/2}\, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

37. $$\int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\, du = \frac{u\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} \pm \frac{na^2}{n+1} \int (u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}\, du. \qquad (n \neq -1)$$

38. $$\int u\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\, du = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C. \qquad (n \neq -2)$$

39. $$\int u^m\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\, du = \frac{u^{m-1}\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} - \frac{\pm a^2(m-1)}{n+m+1} \int u^{m-2}\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\, du.$$

40. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = \ln\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

41. $$\int \frac{du}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} = \frac{u}{\pm a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C.$$

42. $$\int \frac{u\, du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{1-\frac{n}{2}}}{2-n} + C.$$

43. $$\int \frac{u^2\, du}{(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{\pm a^2}{2} \ln\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

44. $$\int \frac{u^2\, du}{(u^2 \pm u^2)^{3/2}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\,(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C.$$

45. $$\int \frac{u^m\, du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m-1}}{(m-n+1)\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{\pm a^2(m-1)}{m-n+1} \int \frac{u^{m-2}\, du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

46. $$\int \frac{u^m\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{\pm a^2(n-2)\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{\pm a^2(n-2)} \int \frac{u^m\,du}{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

47. $$\int \frac{du}{u\,(u^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right) + C.$$

48. $$\int \frac{du}{u\,(u^2-a^2)^{1/2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + C.$$

49. $$\int \frac{du}{u^2\,(u^2 \pm a^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{\pm a^2 u} + C.$$

50. $$\int \frac{du}{u^3\,(u^2+a^2)^{1/2}} = -\frac{\sqrt{u^2+a^2}}{2\,a^2u^2} + \frac{1}{2\,a^3} \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right) + C.$$

51. $$\int \frac{du}{u^3\,(u^2-a^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{2\,a^2u^2} + \frac{1}{2\,a^3} \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + C.$$

52. $$\int \frac{du}{u^m\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{\pm a^2(m-1)\,u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m+n-3}{\pm a^2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

53. $$\int \frac{du}{u^m\,(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{\pm a^2(n-2)\,u^{m-1}(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{\pm a^2(n-2)} \int \frac{du}{u^m(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

54. $$\int \frac{(u^2+a^2)^{1/2}\,du}{u} = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln \left(\frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right) + C.$$

55. $$\int \frac{(u^2-a^2)^{1/2}\,du}{u} = \sqrt{u^2-a^2} - a \operatorname{arc\,sec} \frac{u}{a} + C.$$

56. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{1/2}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C.$$

57. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = -\frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{\pm a^2(m-1)\,u^{m-1}} - \frac{m-n-3}{\pm a^2(m-1)} \int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^{m-2}}.$$

58. $$\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)\,u^{m-1}} + \frac{\pm a^2 n}{n-m+1}\int \frac{(u^2 \pm a^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du}{u^m}.$$

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$

59. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C.$$

60. $$\int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = \frac{u\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{a^2 n}{n+1}\int (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du. \qquad (n \neq -1)$$

61. $$\int u\,(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = -\frac{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C. \qquad (n \neq -2)$$

62. $$\int u^m (a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du = -\frac{u^{m-1}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+m+1} + \frac{a^2(m-1)}{n+m+1}\int u^{m-2}(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}\,du.$$

63. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C.$$

64. $$\int \frac{du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2 - u^2}} + C.$$

65. $$\int \frac{u\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{(a^2 - u^2)^{1-\frac{n}{2}}}{n-2} + C.$$

66. $$\int \frac{u^2\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C.$$

67. $$\int \frac{u^2\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{\sqrt{a^2 - u^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C.$$

68. $$\int \frac{u^m\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{u^{m-1}}{(m-n+1)(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{a^2(m-1)}{m-n+1}\int \frac{u^{m-2}\,du}{(a^2 - u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

69. $$\int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{u^{m+1}}{a^2(n-2)(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{m-n+3}{a^2(n-2)} \int \frac{u^m\,du}{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

70. $$\int \frac{du}{u(a^2-u^2)^{½}} = -\frac{1}{a} \ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C = -\frac{1}{a}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C.$$

71. $$\int \frac{du}{u^2(a^2-u^2)^{½}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C.$$

72. $$\int \frac{du}{u^3(a^2-u^2)^{½}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2\,a^2u^2} - \frac{1}{2\,a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{2\,a^2u^2} - \frac{1}{2\,a^3}\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C.$$

73. $$\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{a^2(m-1)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(m-1)} \int \frac{du}{u^{m-2}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

74. $$\int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{a^2(n-2)u^{m-1}(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{m+n-3}{a^2(n-2)} \int \frac{du}{u^m(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}}.$$

75. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{½}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right) + C = \sqrt{a^2-u^2} - a\cosh^{-1}\frac{a}{u} + C.$$

76. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{½}\,du}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \text{arc sen}\frac{u}{a} + C.$$

77. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = -\frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}+1}}{a^2(m-1)u^{m-1}} + \frac{m-n-3}{a^2(m-1)} \int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^{m-2}}.$$

78. $$\int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du}{u^m} = \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}}}{(n-m+1)u^{m-1}} + \frac{a^2n}{n-m+1} \int \frac{(a^2-u^2)^{\frac{n}{2}-1}\,du}{u^m}.$$

Formas que contienen $\sqrt{2\,au \pm u^2}$

Las fórmulas 96 - 104 de reducción para las integrales binomias pueden aplicarse escribiendo $\sqrt{2\,au \pm u^2} = u^{1/2}(2\,a \pm u)^{1/2}$.

79. $$\int \sqrt{2\,au - u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2\,au-u^2} + \frac{a^2}{2}\,\text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

80. $$\int u\sqrt{2\,au-u^2}\,du = -\frac{3\,a^2+au-2\,u^2}{6}\sqrt{2\,au-u^2} + \frac{a^3}{2}\,\text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

81. $$\int u^m\sqrt{2\,au-u^2}\,du = -\frac{u^{m-1}(2\,au-u^2)^{3/2}}{m+2} + \frac{a(2\,m+1)}{m+2}\int u^{m-1}\sqrt{2\,au-u^2}\,du.$$

82. $$\int \frac{\sqrt{2\,au-u^2}\,du}{u} = \sqrt{2\,au-u^2} + a\,\text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

83. $$\int \frac{\sqrt{2\,au-u^2}\,du}{u^2} = -\frac{2\sqrt{2\,au-u^2}}{u} - \text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

84. $$\int \frac{\sqrt{2\,au-u^2}\,du}{u^3} = -\frac{(2\,au-u^2)^{3/2}}{3\,au^3} + C.$$

85. $$\int \frac{\sqrt{2\,au-u^2}\,du}{u^m} = -\frac{(2\,au-u^2)^{3/2}}{a(2\,m-3)\,u^m} + \frac{m-3}{a\,(2\,m-3)}\int \frac{\sqrt{2\,au-u^2}\,du}{u^{m-1}}.$$

86. $$\int \frac{du}{\sqrt{2\,au-u^2}} = \text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

87. $$\int \frac{du}{\sqrt{2\,au+u^2}} = \ln\,(u + a + \sqrt{2\,au+u^2}) + C.$$

88. $$\int F\,(u,\ \sqrt{2\,au+u^2})\,du = \int F\,(z-a,\ \sqrt{z^2-a^2})\,dz,$$
en donde $z = u + a$.

89. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{2\,au-u^2}} = -\sqrt{2\,au-u^2} + a\,\text{arc cos}\left(1-\frac{u}{a}\right) + C.$$

90. $$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{(u+3a)\sqrt{2au-u^2}}{2} + \frac{3a^2}{2}\operatorname{arc\,cos}\left(1-\frac{u}{a}\right)+C.$$

91. $$\int \frac{u^m\,du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{u^{m-1}\sqrt{2au-u^2}}{m} + \frac{a(2m-1)}{m}\int \frac{u^{m-1}\,du}{\sqrt{2au-u^2}}.$$

92. $$\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au}+C.$$

93. $$\int \frac{du}{u^m\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{a(2m-1)u^m} + \frac{m-1}{a(2m-1)}\int \frac{du}{u^{m-1}\sqrt{2au-u^2}}.$$

94. $$\int \frac{du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u-a}{a^2\sqrt{2au-u^2}}+C.$$

95. $$\int \frac{u\,du}{(2au-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a\sqrt{2au-u^2}}+C.$$

Fórmulas de reducción para las integrales binomias

96. $$\int u^m(a+bu^q)^p\,du = \frac{u^{m-q+1}(a+bu^q)^{p+1}}{b(pq+m+1)} - \frac{a(m-q+1)}{b(pq+m+1)}\int u^{m-q}(a+bu^q)^p\,du.$$

97. $$\int u^m(a+bu^q)^p\,du = \frac{u^{m+1}(a+bu^q)^p}{pq+m+1} + \frac{apq}{pq+m+1}\int u^m(a+bu^q)^{p-1}\,du.$$

98. $$\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^p} = -\frac{1}{a(m-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}} - \frac{b(m-q+pq-1)}{a(m-1)}\int \frac{du}{u^{m-q}(a+bu^q)^p}.$$

99. $$\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^p} = \frac{1}{aq(p-1)u^{m-1}(a+bu^q)^{p-1}} + \frac{m-q+pq-1}{aq(p-1)}\int \frac{du}{u^m(a+bu^q)^{p-1}}.$$

100. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a + bu^q)} = \frac{1}{aq} \ln \left(\frac{u^q}{a + bu^q} \right) + C.$

101. $\displaystyle\int \frac{(a + bu^q)^p\, du}{u^m} = -\frac{(a + bu^q)^{p+1}}{a(m-1)u^{m-1}} - \frac{b(m - q - pq - 1)}{a(m-1)} \int \frac{(a + bu^q)^p\, du}{u^{m-q}}.$

102. $\displaystyle\int \frac{(a + bu^q)^p\, du}{u^m} = \frac{(a + bu^q)^p}{(pq - m + 1)u^{m-1}} + \frac{apq}{pq - m + 1} \int \frac{(a + bu^q)^{p-1}\, du}{u^m}.$

103. $\displaystyle\int \frac{u^m\, du}{(a + bu^q)^p} = \frac{u^{m-q+1}}{b(m - pq + 1)(a + bu^q)^{p-1}} - \frac{a(m - q + 1)}{b(m - qp + 1)} \int \frac{u^{m-q}\, du}{(a + bu^q)^p}.$

104. $\displaystyle\int \frac{u^m\, du}{(a + bu^q)^p} = \frac{u^{m+1}}{aq(p-1)(a + bu^q)^{p-1}} - \frac{m + q - pq + 1}{aq(p-1)} \int \frac{u^m\, du}{(a + bu^q)^{p-1}}.$

Formas que contienen $a + bu \pm cu^2$ $(c > 0)$

La expresión $a + bu + cu^2$ puede reducirse a un binomio escribiendo $u = z - \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}$.

Entonces $$a + bu + cu^2 = c(z^2 - k).$$

La expresión $a + bu - cu^2$ puede reducirse a un binomio escribiendo $u = z + \frac{b}{2c}$, $k = \frac{b^2 + 4ac}{4c^2}$.

Entonces $$a + bu - cu^2 = c(k - z^2).$$

105. $\displaystyle\int \frac{du}{a + bu + cu^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2cu + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right) + C,$ cuando $b^2 < 4ac$.

106. $\displaystyle\int \frac{du}{a + bu + cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left(\frac{2cu + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cu + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C,$ cuando $b^2 > 4ac$.

107. $\displaystyle\int \frac{du}{a + bu - cu^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + 4ac}} \ln \left(\frac{\sqrt{b^2 + 4ac} + 2cu - b}{\sqrt{b^2 + 4ac} - 2cu + b} \right) + C.$

108. $$\int \frac{(Mu+N)\,du}{a+bu\pm cu^2} = \frac{\pm M}{2c}\ln(a+bu\pm cu^2) + \left(N \mp \frac{bM}{2c}\right)\int\frac{du}{a+bu\pm cu^2}.$$

109. $$\int \sqrt{a+bu+cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} - \frac{b^2-4ac}{8c^{3/2}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right)+C.$$

110. $$\int \sqrt{a+bu-cu^2}\,du = \frac{2cu-b}{4c}\sqrt{a+bu-cu^2} + \frac{b^2+4ac}{8c^{3/2}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

111. $$\int \frac{du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right)+C.$$

112. $$\int \frac{du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

113. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu+cu^2}} = \frac{\sqrt{a+bu+cu^2}}{c} - \frac{b}{2c^{3/2}}\ln\left(2cu+b+2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right)+C.$$

114. $$\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu-cu^2}} = -\frac{\sqrt{a+bu-cu^2}}{c} + \frac{b}{2c^{3/2}}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{2cu-b}{\sqrt{b^2+4ac}}\right)+C.$$

Otras formas algebraicas

115. $$\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\log_e\left(\sqrt{a+u}+\sqrt{b+u}\right)+C.$$

116. $$\int \sqrt{\frac{a-u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a-u)(b+u)} + (a+b)\operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{u+b}{a+b}}+C.$$

117. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b-u}}\,du = -\sqrt{(a+u)(b-u)}$

$- (a+b) \text{ arc sen } \sqrt{\frac{b-u}{a+b}} + C.$

118. $\int \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = -\sqrt{1-u^2} + \text{arc sen } u + C.$

119. $\int \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2 \text{ arc sen } \sqrt{\frac{u-a}{b-a}} + C.$

Formas exponenciales y logarítmicas

120. $\int e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a} + C.$

121. $\int b^{au}\,du = \frac{b^{au}}{a \ln b} + C.$

122. $\int u e^{au}\,du = \frac{e^{au}}{a^2}(au - 1) + C.$

123. $\int u^n e^{au}\,du = \frac{u^n e^{au}}{a} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au}\,du.$

124. $\int u^n b^{au}\,du = \frac{u^n b^{au}}{a \ln b} - \frac{n}{a \ln b}\int u^{n-1} b^{au}\,du + C.$

125. $\int \frac{b^{au}\,du}{u^n} = -\frac{b^{au}}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{a \ln b}{n-1}\int \frac{b^{au}\,du}{u^{n-1}}.$

126. $\int \ln u\,du = u \ln u - u + C.$

127. $\int u^n \ln u\,du = u^{n+1}\left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C.$

128. $\int u^m \ln^n u\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1}\ln^n u - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\,du.$

129. $\int e^{au} \ln u\,du = \frac{e^{au} \ln u}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{au}}{u}\,du.$

130. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln(\ln u) + C.$

Formas trigonométricas

En formas que contienen tg u, ctg u, sec u, csc u, y que no aparecen debajo, emplear en primer lugar las relaciones

$$\text{tg } u = \frac{\text{sen } u}{\cos u}, \quad \text{ctg } u = \frac{\cos u}{\text{sen } u}, \quad \sec u = \frac{1}{\cos u}, \quad \csc u = \frac{1}{\text{sen } u}.$$

131. $\int \text{sen } u \, du = -\cos u + C.$

132. $\int \cos u \, du = \text{sen } u + C.$

133. $\int \text{tg } u \, du = -\ln \cos u + C = \ln \sec u + C.$

134. $\int \text{ctg } u \, du = \ln \text{sen } u + C.$

135. $\int \sec u \, du = \int \frac{du}{\cos u} = \ln (\sec u + \text{tg } u) + C$

$$= \ln \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

136. $\int \csc u \, du = \int \frac{du}{\text{sen } u} = \ln (\csc u - \text{ctg } u) + C$

$$= \ln \text{tg } \frac{u}{2} + C.$$

137. $\int \sec^2 u \, du = \text{tg } u + C.$

138. $\int \csc^2 u \, du = -\text{ctg } u + C.$

139. $\int \sec u \, \text{tg } u \, du = \sec u + C.$

140. $\int \csc u \, \text{ctg } u \, du = -\csc u + C.$

141. $\int \text{sen}^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \text{sen } 2u + C.$

142. $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \text{sen } 2u + C.$

143. $\int \cos^n u \, \text{sen } u \, du = -\frac{\cos^{n+1} u}{n+1} + C.$

144. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u \cos u \, du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{n+1} + C.$

145. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nu \, du = -\frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C.$

146. $\displaystyle\int \cos mu \cos nu \, du = \frac{\operatorname{sen}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{sen}(m-n)u}{2(m-n)} + C.$

147. $\displaystyle\int \operatorname{sen} mu \cos nu \, du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C.$

148. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + \cos a \cos u} = 2 \csc a \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u) + C.$

149. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos a + \cos u} = \csc a \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} u}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} u} \right) + C$

$(\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} u < \operatorname{ctg}^2 \tfrac{1}{2} a)$

$= 2 \csc a \operatorname{tgh}^{-1} (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u) + C$

$(\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} u < \operatorname{ctg}^2 \tfrac{1}{2} a).$

150. $\displaystyle\int \frac{du}{1 + \cos a \operatorname{sen} u} = 2 \csc a \operatorname{arc\,tg} (\csc a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + \operatorname{ctg} a) + C.$

151. $\displaystyle\int \frac{du}{\cos a + \operatorname{sen} u} = \csc a \ln \left(\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} \frac{1}{2} u - \sec a}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \frac{1}{2} u + \sec a} \right) + C$

$[(\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + \csc a)^2 < 1]$

$= -2 \csc a \operatorname{tgh}^{-1} (\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + \csc a) + C$

$[(\operatorname{ctg} a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} u + \csc a)^2 < 1]$

152. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 \cos^2 u + b^2 \operatorname{sen}^2 u} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{b \operatorname{tg} u}{a} \right) + C.$

153. $\displaystyle\int e^{au} \operatorname{sen} nu \, du = \frac{e^{au}(a \operatorname{sen} nu - n \cos nu)}{a^2 + n^2} + C.$

154. $\displaystyle\int e^{au} \cos nu \, du = \frac{e^{au}(n \operatorname{sen} nu + a \cos nu)}{a^2 + n^2} + C.$

155. $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C.$

156. $\displaystyle\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C.$

Fórmulas de reducción para integrales trigonométricas:

157. $$\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du.$$

158. $$\int \cos^n u\, du = \frac{\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du.$$

159. $$\int \frac{du}{\operatorname{sen}^n u} = -\frac{\cos u}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

160. $$\int \frac{du}{\cos^n u} = \frac{\operatorname{sen} u}{(n-1)\cos^{n-1} u} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^{n-2} u}.$$

161. $$\int \cos^m u \operatorname{sen}^n u\, du = \frac{\cos^{m-1} u \operatorname{sen}^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} u \operatorname{sen}^n u\, du.$$

162. $$\int \cos^m u \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m u \operatorname{sen}^{n-2} u\, du.$$

163. $$\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^n u} = \frac{1}{(m-1)\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{du}{\cos^{m-2} u \operatorname{sen}^n u}.$$

164. $$\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^n u} = -\frac{1}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m-1} u} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{du}{\cos^m u \operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

165. $$\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^n u} = -\frac{\cos^{m+1} u}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} u} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^{n-2} u}.$$

166. $$\int \frac{\cos^m u\, du}{\operatorname{sen}^n u} = \frac{\cos^{m-1} u}{(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} u} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} u\, du}{\operatorname{sen}^n u}.$$

167. $$\int \frac{\operatorname{sen}^n u\, du}{\cos^m u} = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u}{(m-1)\cos^{m-1} u} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\operatorname{sen}^n u\, du}{\cos^{m-2} u}.$$

168. $$\int \frac{\operatorname{sen}^n u\, du}{\cos^m u} = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u}{(n-m)\cos^{m-1} u} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-2} u\, du}{\cos^m u}.$$

169. $$\int \operatorname{tg}^n u\, du = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} u\, du.$$

170. $\int \operatorname{ctg}^n u\, du = -\frac{\operatorname{ctg}^{n-1} u}{n-1} - \int \operatorname{ctg}^{n-2} u\, du.$

171. $$\int e^{au} \cos^n u\, du = \frac{e^{au} \cos^{n-1} u\,(a \cos u + n \operatorname{sen} u)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au} \cos^{n-2} u\, du.$$

172. $$\int e^{au} \operatorname{sen}^n u\, du = \frac{e^{au} \operatorname{sen}^{n-1} u\,(a \operatorname{sen} u - n \cos u)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{au} \operatorname{sen}^{n-2} u\, du.$$

173. $$\int u^m \cos au\, du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(au \operatorname{sen} au + m \cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2} \cos au\, du.$$

174. $$\int u^m \operatorname{sen} au\, du = \frac{u^{m-1}}{a^2}(m \operatorname{sen} au - au \cos au) - \frac{m(m-1)}{a^2}\int u^{m-2} \operatorname{sen} au\, du.$$

Funciones trigonométricas inversas

175. $\int \operatorname{arc\,sen} u\, du = u \operatorname{arc\,sen} u + \sqrt{1-u^2} + C.$

176. $\int \operatorname{arc\,cos} u\, du = u \operatorname{arc\,cos} u - \sqrt{1-u^2} + C.$

177. $\int \operatorname{arc\,tg} u\, du = u \operatorname{arc\,tg} u - \ln \sqrt{1+u^2} + C.$

178. $\int \operatorname{arc\,ctg} u\, du = u \operatorname{arc\,ctg} u + \ln \sqrt{1+u^2} + C.$

179. $$\int \operatorname{arc\,sec} u\, du = u \operatorname{arc\,sec} u - \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) + C = u \operatorname{arc\,sec} u - \cosh^{-1} u + C.$$

180. $$\int \operatorname{arc\,csc} u\, du = u \operatorname{arc\,csc} u + \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right) + C = u \operatorname{arc\,csc} u + \cosh^{-1} u + C.$$

Funciones hiperbólicas

181. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C.$

182. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C.$

183. $\int \operatorname{tgh} u\, du = \ln \cosh u + C.$

184. $\int \operatorname{ctgh} u\, du = \ln \operatorname{senh} u + C.$

185. $\int \operatorname{sech} u\, du = \operatorname{arc\,tg} (\operatorname{senh} u) + C = \operatorname{gd} u + C.$

186. $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln \operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u + C.$

187. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \operatorname{tgh} u + C.$

188. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = - \operatorname{ctgh} u + C.$

189. $\int \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, du = - \operatorname{sech} u + C.$

190. $\int \operatorname{csch} u \operatorname{ctgh} u\, du = - \operatorname{csch} u + C.$

191. $\int \operatorname{senh}^2 u\, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u - \tfrac{1}{2} u + C.$

192. $\int \cosh^2 u\, du = \tfrac{1}{4} \operatorname{senh} 2u + \tfrac{1}{2} u + C.$

193. $\int \operatorname{tgh}^2 u\, du = u - \operatorname{tgh} u + C.$

194. $\int \operatorname{ctgh}^2 u\, du = u - \operatorname{ctgh} u + C.$

195. $\int u \operatorname{senh} u\, du = u \cosh u - \operatorname{senh} u + C.$

196. $\int u \cosh u\, du = u \operatorname{senh} u - \cosh u + C.$

197. $$\int \operatorname{senh}^{-1} u\,du = u \operatorname{senh}^{-1} u - \sqrt{1+u^2} + C.$$

198. $$\int \cosh^{-1} u\,du = u \cosh^{-1} u - \sqrt{u^2-1} + C.$$

199. $$\int \operatorname{tgh}^{-1} u\,du = u \operatorname{tgh}^{-1} u + \tfrac{1}{2}\ln(1-u^2) + C.$$

200. $$\int \operatorname{ctgh}^{-1} u\,du = u \operatorname{ctgh}^{-1} u + \tfrac{1}{2}\ln(1-u^2) + C.$$

201. $$\int \operatorname{sech}^{-1} u\,du = u \operatorname{sech}^{-1} u + \operatorname{gd}(\operatorname{tgh}^{-1} u) + C$$
$$= u \operatorname{sech}^{-1} u + \operatorname{arc\,sen} u + C.$$

202. $$\int \operatorname{csch}^{-1} u\,du = u \operatorname{csch}^{-1} u + \operatorname{senh}^{-1} u + C.$$

203. $$\int \operatorname{senh} mu \operatorname{senh} nu\,du = \frac{\operatorname{senh}(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\operatorname{senh}(m-n)u}{2(m-n)} + C. \qquad \left(m \gtrless n\right)$$

204. $$\int \cosh mu \cosh nu\,du = \frac{\operatorname{senh}(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\operatorname{senh}(m-n)u}{2(m-n)} + C. \qquad \left(m \gtrless n\right)$$

205. $$\int \operatorname{senh} mu \cosh nu\,du = \frac{\cosh(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cosh(m-n)u}{2(m-n)} + C. \qquad \left(m \gtrless n\right)$$

206. $$\int \frac{du}{\cosh a + \cosh u} = 2 \operatorname{csch} a \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} a) + C.$$

207. $$\int \frac{du}{\cos a + \cosh u} = 2 \csc a \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a) + C.$$

208. $$\int \frac{du}{1 + \cos a \cosh u} = 2 \csc a \operatorname{tgh}^{-1}(\operatorname{tgh} \tfrac{1}{2} u \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a) + C$$
$$(\operatorname{tgh}^2 \tfrac{1}{2} u < \operatorname{ctg}^2 \tfrac{1}{2} a).$$

209. $$\int e^{au} \operatorname{senh} nu\,du = \frac{e^{au}(a \operatorname{senh} nu - n \cosh nu)}{a^2 - n^2} + C.$$

210. $$\int e^{au} \cosh nu\,du = \frac{e^{au}(a \cosh nu - n \operatorname{senh} nu)}{a^2 - n^2} + C.$$

INDICE ALFABETICO

F

G

H

I

—o0o—

La edición, composición, diseño e impresión de esta obra fueron realizados bajo la supervisión de GRUPO NORIEGA EDITORES.
Balderas 95, Col. Centro. México, D.F. C.P. 06040
7270990000309879DP9212I

